УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОСЛОЙНОЙ КОМПОЗИТНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

А. Н. Андреев

Кемеровский государственный университет, 650043 Кемерово

Исследована устойчивость равновесия слоистой композитной круговой конической усеченной оболочки при нагружении равномерным внешним давлением. Выполнен параметрический анализ критических интенсивностей давления, включающий оценку таких факторов, как поперечные сдвиги, моментность основного равновесного состояния, докритические деформации.

1. Линеаризованные дифференциальные уравнения устойчивости многослойной ортотропной конической оболочки. Рассмотрим ортотропную круговую коническую усеченную оболочку толщиной h, собранную из m композитных слоев волокнистой структуры. Пусть 2α — угол раствора конуса, $s = x^1$ — расстояние, отсчитываемое вдоль образующей конуса от его вершины ($0 < a \leqslant s \leqslant b$), $\varphi = x^2$ — угловая координата ($-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$). Параметры Ламе A_1, A_2 и радиусы кривизны R_1, R_2 координатных линий имеют вид

$$A_1 = 1, \quad A_2 = s\sin\alpha, \quad R_1 = \infty, \quad R_1 = s\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{1.1}$$

Ограничимся рассмотрением того случая, когда направления осей ортотропии совпадают с направлениями координатных осей, а структурные параметры армирования всех слоев оболочки не зависят от угловой координаты φ, но могут зависеть от меридиональной координаты s, как это имеет место, например, при армировании слоев оболочки в окружном или меридиональном направлении волокнами постоянного сечения. Считая оболочку достаточно тонкой, пренебрегаем во всех уравнениях величинами порядка h/R_2 по сравнению с единицей.

В основу анализа устойчивости равновесия оболочки положим неклассические уравнения [1], позволяющие учесть поперечные сдвиговые деформации. Переходя в тензорных уравнениях [1] от компонент тензоров к их физическим составляющим, а от ковариантных производных к частным и учитывая равенства (1.1), приходим к замкнутой системе линеаризованных дифференциальных уравнений устойчивости конической оболочки. Система включает следующие группы зависимостей:

— соотношения упругости

$$\begin{gathered}\sigma_{11}^{(k)} = a_{11}^{(k)}\varepsilon_{11}^{(k)} + a_{12}^{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)}, \quad \sigma_{22}^{(k)} = a_{12}^{(k)}\varepsilon_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)}, \quad \sigma_{12}^{(k)} = a_{33}^{(k)}\gamma_{12}^{(k)},\\ \tau_{13}^{(k)} = c_{11}^{(k)}\gamma_{13}^{(k)}, \quad \tau_{23}^{(k)} = c_{22}^{(k)}\gamma_{23}^{(k)};\end{gathered} \tag{1.2}$$

— закон распределения вариаций физических составляющих вектора перемещений по толщине пакета слоев

$$v_1^{(k)} = u_1 - z\frac{\partial w}{\partial s} + \mu_{11}^{(k)}\pi_1, \qquad v_2^{(k)} = u_2 - \frac{z}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + \mu_{22}^{(k)}\pi_2, \qquad v_3^{(k)} = w, \tag{1.3}$$

$$\mu_{\lambda\lambda}^{(k)} = \frac{f(z) - f(h_{k-1})}{c_{\lambda\lambda}^{(k)}} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f(h_j) - f(h_{j-1})}{c_{\lambda\lambda}^{(j)}}, \qquad \lambda = 1,\, 2;$$

— соотношения между вариациями деформаций и физических составляющих вектора перемещений

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^{(k)} &= \frac{\partial u_1}{\partial s} - z\,\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \mu_{11}^{(k)}\,\frac{\partial \pi_1}{\partial s} + \frac{\partial \mu_{11}^{(k)}}{\partial s}\,\pi_1 + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s}\,\frac{\partial w}{\partial s},\\
\varepsilon_{22}^{(k)} &= \frac{1}{A_2}\Big[\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{z}{A_2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu_{22}^{(k)}\,\frac{\partial \pi_2}{\partial \varphi} + \sin\alpha\Big(u_1 - z\,\frac{\partial w}{\partial s} + \mu_{11}^{(k)}\pi_1\Big)\Big] + \frac{w}{R_2} + \frac{1}{A_2}\,\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi}\,\frac{1}{A_2}\,\frac{\partial w}{\partial \varphi},\\
\gamma_{12}^{(k)} &= \frac{1}{A_2}\Big[\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - z\,\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial \varphi} + \mu_{11}^{(k)}\,\frac{\partial \pi_1}{\partial \varphi} - \sin\alpha\Big(u_2 - \frac{z}{A_2}\,\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \mu_{22}^{(k)}\pi_2\Big)\Big] + \\
&\quad + \frac{\partial u_2}{\partial s} - z\,\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{1}{A_2}\,\frac{\partial w}{\partial \varphi}\Big) + \mu_{22}^{(k)}\,\frac{\partial \pi_2}{\partial s} + \frac{\partial \mu_{22}^{(k)}}{\partial s}\,\pi_2 + \frac{1}{A_2}\,\frac{\partial \tilde{w}}{\partial s}\,\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{A_2}\,\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi}\,\frac{\partial w}{\partial s},\\
\gamma_{13}^{(k)} &= \frac{f'(z)}{c_{11}^{(k)}}\,\pi_1, \qquad \gamma_{23}^{(k)} = \frac{f'(z)}{c_{22}^{(k)}}\,\pi_2;
\end{aligned} \tag{1.4}$$

— зависимости между вариациями обобщенных внутренних усилий и моментов в поверхности оболочки и вариациями внутренних напряжений в ее слоях

$$\begin{gathered}
\|T_{\beta\lambda}, M_{\beta\lambda}, S_{\beta\lambda}\| = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\beta\lambda}^{(k)}\|1, z, \mu_{\lambda\lambda}^{(k)}\|\, dz,\\
Q_\lambda = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{h_{k-1}}^{h_k} \Big[\sigma_{1\lambda}^{(k)}\,\frac{\partial \mu_{\lambda\lambda}^{(k)}}{\partial s} + \sigma_{2\rho}^{(k)}\,\frac{\sin\alpha}{A_2}\,(\mu_{11}^{(k)} - \mu_{22}^{(k)}) + \sigma_{\lambda 3}^{(k)}\,\frac{f'(z)}{c_{\lambda\lambda}^{(k)}}\Big]\, dz, \quad \beta,\, \lambda,\, \rho = 1,\, 2, \quad \lambda \neq \rho;
\end{gathered} \tag{1.5}$$

— дифференциальные уравнения нейтрального равновесия конической оболочки, составленные в вариациях обобщенных усилий и моментов,

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial s}\,(A_2 T_{11}) - T_{22}\sin\alpha + \frac{\partial T_{21}}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial T_{22}}{\partial \varphi} + T_{21}\sin\alpha + \frac{\partial}{\partial s}\,(A_2 T_{12}) = 0,\\
\frac{\partial^2}{\partial s^2}\,(A_2 M_{11}) - \sin\alpha\,\frac{\partial M_{22}}{\partial s} + 2\,\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial s\,\partial \varphi} + \frac{1}{A_2}\,\frac{\partial^2 M_{22}}{\partial \varphi^2} + 2\,\frac{\sin\alpha}{A_2}\,\frac{\partial M_{21}}{\partial \varphi} - \frac{A_2 T_{22}}{R_2} + \\
+ \frac{\partial}{\partial s}\Big(A_2\tilde{T}_{11}\,\frac{\partial w}{\partial s} + A_2 T_{11}\,\frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} + \tilde{T}_{21}\,\frac{\partial w}{\partial \varphi} + T_{21}\,\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi}\Big) + \\
+ \frac{\partial}{\partial \varphi}\Big(\tilde{T}_{12}\,\frac{\partial w}{\partial s} + T_{12}\,\frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} + \frac{\tilde{T}_{22}}{A_2}\,\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{T_{22}}{A_2}\,\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi}\Big) = 0,\\
\frac{\partial}{\partial s}\,(A_2 S_{11}) - S_{22}\sin\alpha + \frac{\partial S_{21}}{\partial \varphi} - A_2 Q_1 = 0, \quad \frac{\partial S_{22}}{\partial \varphi} + S_{21}\sin\alpha + \frac{\partial}{\partial s}\,(A_2 S_{12}) - A_2 Q_2 = 0.
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь скобки у индексов физических составляющих векторов и тензоров опущены, знаком «~» отмечены характеристики основного состояния; z — нормальная координата, отсчитываемая от внутренней поверхности оболочки:

$$z \in [0, h] = \bigcup_{k=1}^{m} [h_{k-1}, h_k],$$

причем k-му слою оболочки ($k = 1, 2, \ldots, m$) соответствует промежуток $[h_{k-1}, h_k]$ изменения этой координаты. Функцию $f(z)$ запишем в виде

$$f(z) = z^3 - 1{,}5hz^2, \tag{1.7}$$

соответствующем квадратичной зависимости поперечных сдвиговых напряжений от переменной z [1, 2].

Уравнения (1.1)–(1.7) составляют полную систему неклассических дифференциальных уравнений задачи устойчивости конической оболочки. Порядок этой системы равен 12, что требует задания на границе области 6 краевых условий. В случае замкнутой в окружном направлении оболочки с жестко защемленными торцами эти условия заключаются в 2π-периодичности решения по угловой координате φ и обращении в нуль обобщенных перемещений в защемленных сечениях [1, 2]:

$$w = \frac{\partial w}{\partial s} = u_1 = u_2 = \pi_1 = \pi_2 = 0 \quad \text{при} \quad s = a, \quad s = b. \tag{1.8}$$

Уравнения (1.1)–(1.7) позволяют учесть ортотропию деформативных свойств, низкую сдвиговую жесткость всех или части слоев, моментность докритического состояния, докритические деформации, поэтому они применимы для анализа устойчивости равновесия тонкостенной слоистой композитной конической оболочки при весьма общих условиях ее нагружения и опирания. К достоинствам этих уравнений относится независимость их порядка и структуры от числа слоев оболочки и строения пакета слоев в целом, что упрощает постановку и исследование задачи устойчивости многослойной оболочки как краевой задачи на собственные значения для линейной системы дифференциальных уравнений с частными производными. Коэффициенты $\tilde{T}_{\beta\lambda}$, $\partial\tilde{w}/\partial s$, $\partial\tilde{w}/\partial\varphi$ этой системы зависят от параметра внешних нагрузок и определяются в результате интегрирования соответствующей линейной или нелинейной краевой задачи статики. Неклассические уравнения статики конической оболочки можно получить из общих уравнений [2] тем же путем, что и уравнения ее устойчивости. Линеаризованный вариант этих уравнений выводится из уравнений (1.1)–(1.7), если опустить в (1.4) параметрические члены (отмечены знаком «~») и заменить в (1.6) фиктивную поперечную нагрузку истинной. Такие линеаризованные дифференциальные уравнения приведены в п. **2**.

Для оценки влияния поперечных сдвиговых деформаций на критические параметры устойчивости используется предельный переход [1, 2]

$$c_{\beta\beta}^{(k)} \to \infty \tag{1.9}$$

($k = 1, 2, \ldots, m$; $\beta = 1, 2$) от уравнений (1.1)–(1.7) к классическим уравнениям устойчивости конической оболочки.

Введем переменные

$$x = \frac{s}{b}, \qquad \lambda = \frac{P}{E_1^c}, \qquad w = hy_1, \qquad y_2 = \frac{\partial y_1}{\partial x}, \qquad u_1 = by_3,$$
$$u_2 = by_4, \qquad \pi_1 = E_1^c bh^{-3} y_5, \qquad \pi_2 = E_1^c bh^{-3} y_6, \tag{1.10}$$
$$\frac{\partial}{\partial s}(A_2 M_{11}) - M_{22}\sin\alpha + 2\frac{\partial M_{12}}{\partial\varphi} + A_2\tilde{T}_{11}\frac{\partial w}{\partial s} + A_2 T_{11}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial s} + \tilde{T}_{21}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + T_{21}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\varphi} = h^2 E_1^c y_7,$$
$$A_2 M_{11} = h^2 b E_1^c y_8, \quad A_2 T_{11} = hbE_1^c y_9, \quad A_2 T_{12} = hbE_1^c y_{10}, \quad A_2 S_{11} = h^4 b y_{11}, \quad A_2 S_{12} = h^4 b y_{12},$$

где x — безразмерная независимая переменная ($a/b \leqslant x \leqslant 1$); P и λ — соответственно размерный и безразмерный параметры нагрузки; $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_{12}]^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец вариаций безразмерных кинематических и силовых характеристик напряженно-деформированного состояния оболочки; E_1^c — модуль Юнга материала связующего первого слоя.

С помощью переменных (1.10) дифференциальные уравнения устойчивости (1.1)–(1.7) и краевые условия (1.8) представим в матричной форме

$$A(x, D_\varphi)\,\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x} = B(x, D_\varphi)\boldsymbol{y} + \lambda C(x, D_\varphi)\boldsymbol{y}; \tag{1.11}$$

$$\|E_6, O_6\|\boldsymbol{y}(a/b, \varphi) = \mathbf{0}, \qquad \|E_6, O_6\|\boldsymbol{y}(1, \varphi) = \mathbf{0}. \tag{1.12}$$

Здесь E_6, O_6 — единичная и нулевая матрицы (размерности 6×6); A, B, C — матрицы (12×12) с элементами — полиномами от дифференциального оператора D_φ ($D_\varphi = \partial/\partial\varphi$) с коэффициентами, зависящими от переменной x. При неосесимметричном основном равновесном состоянии элементы матрицы параметрических членов C зависят также от угловой координаты φ. Выражения для элементов матриц A, B, C из-за громоздкости здесь не приводятся. Укажем лишь нулевые и ненулевые столбцы матрицы C, объединяя номера первых в множество K, а номера вторых — в множество J [3]. В зависимости от того, учитываются докритические деформации или нет, число нулевых столбцов матрицы C равно 8 или 10:

$$J = \{1, 2, 9, 10\}, \qquad K = \{1, 2, \ldots, 12\} - J; \tag{1.13}$$

$$J = \{1, 2\}, \qquad K = \{1, 2, \ldots, 12\} - J. \tag{1.14}$$

Отметим, что при вычеркивании из матриц (12×12) A, B, C 5, 6, 11, 12-й строк и столбцов получаются соответствующие матрицы (8×8) коэффициентов классической системы дифференциальных уравнений устойчивости конической оболочки. Это следует из предельного перехода (1.9), поскольку при $c_{\beta\beta}^{(k)} \to \infty$ элементы указанных строк и столбцов матриц A, B, C обращаются в нуль.

2. Устойчивость ортотропной слоистой конической оболочки при равномерном внешнем давлении. Исследуем устойчивость равновесия многослойной ортотропной круговой конической усеченной жестко защемленной оболочки, нагруженной равномерно распределенным внешним давлением интенсивности P. В этом случае равновесное напряженно-деформированное состояние оболочки осесимметрично, а угловая компонента $\tilde{v}_2^{(k)}$ вектора перемещений и связанные с ней величины равны нулю, что позволяет упростить параметрические члены уравнений устойчивости, полагая

$$\tilde{T}_{12} = \tilde{T}_{21} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi} = 0. \tag{2.1}$$

Определение равновесного напряженно-деформированного состояния оболочки также упрощается и сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений при соответствующих краевых условиях. В линейном приближении эта система включает следующие группы зависимостей:

— соотношения упругости

$$\tilde{\sigma}_{11}^{(k)} = a_{11}^{(k)}\tilde{\varepsilon}_{11}^{(k)} + a_{12}^{(k)}\tilde{\varepsilon}_{22}^{(k)}, \quad \tilde{\sigma}_{22}^{(k)} = a_{12}^{(k)}\tilde{\varepsilon}_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)}\tilde{\varepsilon}_{22}^{(k)}, \quad \tilde{\tau}_{13}^{(k)} = c_{11}^{(k)}\tilde{\gamma}_{13}^{(k)}; \tag{2.2}$$

— закон распределения физических составляющих вектора перемещений по толщине пакета слоев

$$\tilde{v}_1^{(k)} = \tilde{u}_1 - z\,\frac{d\tilde{w}}{ds} + \mu_{11}^{(k)}\tilde{\pi}_1, \qquad \tilde{v}_3^{(k)} = \tilde{w}; \tag{2.3}$$

— соотношения деформации — перемещения

$$\tilde{\varepsilon}_{11}^{(k)} = \frac{d\tilde{u}_1}{ds} - z\,\frac{d^2\tilde{w}}{ds^2} + \mu_{11}^{(k)}\,\frac{d\tilde{\pi}_1}{ds} + \frac{\partial \mu_{11}^{(k)}}{\partial s}\,\tilde{\pi}_1, \tag{2.4}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{22}^{(k)} = \frac{\sin\alpha}{A_2}\Big[\tilde{u}_1 - z\frac{d\tilde{w}}{ds} + \mu_{11}^{(k)}\tilde{\pi}_1\Big] + \frac{\tilde{w}}{R_2}, \qquad \tilde{\gamma}_{13}^{(k)} = \frac{f'(z)}{c_{11}^{(k)}}\,\tilde{\pi}_1;$$

— зависимости (1.5) между обобщенными внутренними усилиями и моментами в поверхности оболочки и внутренними напряжениями в ее слоях;

— дифференциальные уравнения равновесия элемента оболочки в усилиях и моментах

$$\frac{d}{ds}(A_2\tilde{T}_{11}) - \tilde{T}_{22}\sin\alpha = 0, \qquad \frac{d}{ds}(A_2\tilde{S}_{11}) - \tilde{S}_{22}\sin\alpha - A_2\tilde{Q}_1 = 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}(A_2\tilde{M}_{11}) - \frac{d\tilde{M}_{22}}{ds}\sin\alpha - \frac{A_2\tilde{T}_{22}}{R_2} = A_2P.$$

Функция $f(z)$ имеет вид (1.7). Введем переменные

$$s = bx, \quad \tilde{w} = \frac{Ph\tilde{y}_1}{E_1^c}, \quad \tilde{y}_2 = \frac{d\tilde{y}_1}{dx}, \quad \tilde{u}_1 = \frac{Pb\tilde{y}_3}{E_1^c}, \quad \tilde{\pi}_1 = Pbh^{-3}\tilde{y}_4, \tag{2.6}$$

$$\frac{d}{ds}(A_2\tilde{M}_{11}) - \tilde{M}_{22}\sin\alpha = Ph^2\tilde{y}_5, \quad A_2\tilde{M}_{11} = Ph^2b\tilde{y}_6, \quad A_2\tilde{T}_{11} = Phb\tilde{y}_7, \quad A_2\tilde{S}_{11} = \frac{Ph^4b\tilde{y}_8}{E_1^c},$$

где $\tilde{\boldsymbol{y}} = [\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_8]^{\rm T}$ — вектор-столбец безразмерных кинематических и силовых характеристик напряженно-деформированного состояния оболочки; x — безразмерная независимая переменная ($a/b \leqslant x \leqslant 1$); E_1^c — модуль Юнга материала связующего первого слоя.

С помощью переменных (2.6) систему дифференциальных уравнений осесимметричного изгиба конической оболочки и соответствующие краевые условия представим в матричной форме

$$\tilde{\boldsymbol{y}}'(x) = A(x)\tilde{\boldsymbol{y}}(x) + \boldsymbol{f}(x), \quad \|E_4, O_4\|\tilde{\boldsymbol{y}}(a/b) = \boldsymbol{0}, \quad \|E_4, O_4\|\tilde{\boldsymbol{y}}(1) = \boldsymbol{0}. \tag{2.7}$$

Здесь $A(x)$ — матрица размерности 8×8; E_4, O_4 — единичная и нулевая матрицы (4×4); $\boldsymbol{f}(x)$ — 8-мерный вектор. Выражения для элементов матрицы $A(x)$ и вектора $\boldsymbol{f}(x)$ из-за громоздкости здесь не приводятся (в случае необходимости их можно получить из соотношений (1.1), (1.5), (1.7), (2.2)–(2.7)).

В результате численного исследования установлено, что строение спектра матрицы $A(x)$ в основном аналогично строению спектра матрицы коэффициентов неклассической системы дифференциальных уравнений осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки, описанному в [4]. Сильная неустойчивость этих дифференциальных уравнений, требующая применения специальных алгоритмов численного интегрирования краевой задачи изгиба, проявляется и в задаче (2.7). В рассмотренном ниже примере численное решение этой задачи получено методом инвариантного погружения [5, 6].

Интегрирования краевой задачи (2.7) удается избежать при анализе устойчивости оболочки в упрощенной постановке, когда пренебрегается докритическими деформациями и моментностью основного равновесного состояния. В этом приближении докритические углы поворота нормали принимаются равными нулю:

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial s} = 0, \tag{2.8}$$

а докритические усилия определяются равенствами

$$\tilde{T}_{11} = -PR_2(1 - a^2/s^2)/2, \qquad \tilde{T}_{22} = -PR_2, \tag{2.9}$$

полученными интегрированием безмоментных уравнений равновесия конической оболочки (см., например, [7]). Подчеркнем, что равенства (2.1) в данном случае выполняются строго, а равенства (2.8), (2.9) являются упрощающими допущениями. Погрешность, вносимая ими в определение критических параметров устойчивости, исследуется ниже.

Итак, характеристики основного равновесного состояния определены и матрица параметрических членов C сформирована, причем ее элементы не зависят от угловой переменной φ. Решение краевой задачи (1.11), (1.12) строим в форме тригонометрического ряда Фурье

$$\boldsymbol{y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{y}_n(x) \exp(in\varphi) \,. \tag{2.10}$$

($i = \sqrt{-1}$) с векторными коэффициентами $\boldsymbol{y}_n(x)$. Ясно, что представление решения задачи устойчивости в форме (2.10) позволяет удовлетворить условию его 2π-периодичности по координате φ. Подставляя разложение (2.10) в уравнения (1.11), краевые условия (1.12) и отделяя угловую переменную, приходим к распадающимся по индексу n линейным краевым задачам на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\boldsymbol{y}'_n(x) = A_n(x)\boldsymbol{y}_n(x) + \lambda B_n(x)\boldsymbol{y}_n(x), \qquad \|E_6, O_6\|\boldsymbol{y}_n(a/b) = \|E_6, O_6\|\boldsymbol{y}_n(1) = \mathbf{0}. \tag{2.11}$$

Элементы матриц $A_n(x)$, $B_n(x)$ легко получить из элементов матриц A, B, C, выполнив преобразование

$$D_\varphi \to in. \tag{2.12}$$

В силу вещественности решения $\boldsymbol{y}(x,\varphi)$ задачи (1.11), (1.12) коэффициенты $\boldsymbol{y}_n(x)$ и $\boldsymbol{y}_{-n}(x)$ разложения (2.10) комплексно сопряжены: $\boldsymbol{y}_{-n}(x) = \bar{\boldsymbol{y}}_n(x)$, поэтому достаточно рассматривать краевые задачи (2.11) лишь при $n \geqslant 0$. Отметим, что в уравнениях устойчивости (1.11) на 4, 6, 10, 12-ю компоненты вектора $\boldsymbol{y}$ действуют только нечетные степени оператора D_φ, а на остальные компоненты — только четные. Отсюда и из (2.12) следует, что путем преобразования $y_n^p \to iy_n^p$ ($p = 4$, 6, 10, 12 — номер компоненты вектора $\boldsymbol{y}_n$) задачи (2.11) приводятся к вещественным.

Безразмерная критическая интенсивность давления λ_{n_0} и вектор-функция $\boldsymbol{y}^*$, определяющая форму выпучивания оболочки, вычисляются по формулам

$$\lambda_{n_0} = \inf_{n \geqslant 0} \lambda_n, \qquad \boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{y}^*_{n_0}(x)\exp(in_0\varphi) + \bar{\boldsymbol{y}}^*_{n_0}(x)\exp(-in_0\varphi),$$

где λ_n, $\boldsymbol{y}^*_n(x)$ — наименьшее собственное значение и отвечающая ему собственная вектор-функция n-й краевой задачи (2.11).

Численное решение задач (2.11) получено методом [3, 5] с использованием ортонормированной координатной системы

$$\boldsymbol{Y}_{kj}(x) = \sqrt{\frac{2k-1}{1-a/b}}\, P_{k-1}\Big(2\,\frac{x-a/b}{1-a/b} - 1\Big)\boldsymbol{e}_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, L; \quad j \in J, \tag{2.13}$$

в которой $P_k(t)$ — ортогональные на отрезке $[-1;\,1]$ полиномы Лежандра; $\boldsymbol{e}_j$ — векторы стандартного ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^{12}$. Из (1.13), (1.14) следует, что координатная система (2.13) состоит из $4L$ или $2L$ векторов в зависимости от того, учитываются докритические деформации или нет. Поэтому для определения собственных значений и собственных векторов задач (2.11) методом [3, 5] в первом случае требуется интегрирование краевых задач для матриц размерности $12 \times 4L$ и решение алгебраической проблемы собственных значений для матриц размерности $4L \times 4L$, во втором случае — то же для матриц размерности $12 \times 2L$ и $2L \times 2L$ соответственно. Краевые задачи для матричных дифференциальных уравнений решены методом инвариантного погружения [5], а при нахождении собственных значений использовался QR-алгоритм в сочетании с приведением

Таблица 1

L	$10^2 P_3^*/E_1^c$	n_0
3	0,765	3
4	0,723	3
5	0,711	3
6	0,704	3
7	0,704	3
8	0,704	3
9	0,704	3

Таблица 2

b/h	$10^2 P_1^*/E_1^c$	$10^2 P_2^*/E_1^c$	$10^2 P_3^*/E_1^c$	$10^2 P_4^*/E_1^c$	n_0
150	0,390	0,343	0,411	0,432	8
200	0,175	0,163	0,178	0,181	8
250	0,093	0,088	0,092	0,093	9
300	0,054	0,052	0,053	0,053	9
350	0,036	0,035	0,035	0,035	9

матрицы к форме Хессенберга [8]. Значение параметра L, достаточное для обеспечения высокой точности результата, определялось путем численного исследования скорости сходимости метода. Расчеты выполнены на МВК «Эльбрус-2».

3. Численные результаты. Введем следующие обозначения: P_1^* — критическая интенсивность давления, найденная на основе классических уравнений устойчивости конической оболочки без учета докритических деформаций и моментности основного состояния; P_2^* — критическая интенсивность давления, полученная на основе неклассических уравнений (1.11) без учета этих факторов; P_3^* — критическая интенсивность давления, найденная на основе уравнений (1.11) с учетом моментности основного состояния, но без учета докритических деформаций; P_4^* — критическая интенсивность давления, полученная на основе уравнений (1.11) с учетом и моментности, и докритических деформаций.

В табл. 1 приведены данные, позволяющие судить о скорости сходимости метода относительно параметра L. В первой графе указаны значения этого параметра, во второй и третьей — соответствующие им значения критического давления P_3^* и целочисленного параметра окружного волнообразования n_0. Результаты получены для двухслойной оболочки, первый (внутренний) слой которой армирован волокнами постоянного сечения в окружном направлении, второй — в меридиональном при следующих значениях параметров оболочки:

— геометрических

$$\alpha = \pi/8, \quad a/b = 0{,}2, \quad h/b = 0{,}33, \quad h_1 - h_0 = h_2 - h_1 = 0{,}5h; \tag{3.1}$$

— механических

$$E_1^c/E_2^c = 1, \quad E_1^c/E_1^a = E_2^c/E_2^a = 0{,}05, \quad \nu_1^c = \nu_2^c = \nu_1^a = \nu_2^a = 0{,}3; \tag{3.2}$$

— структурных

$$\omega_{z1} = \omega_{z2} = 0{,}5, \qquad \omega_1 = 0{,}5, \qquad \omega_2\big|_{x=a/b} = 0{,}9. \tag{3.3}$$

Здесь $h_k - h_{k-1}$, ω_k, ω_{zk} — толщина k-го слоя, интенсивность армирования в его поверхности и по высоте [9]; E_k^c, ν_k^c, E_k^a, ν_k^a ($k = 1, 2$) — модуль Юнга и коэффициент Пуассона связующего и армирующих волокон k-го слоя соответственно. Эффективные жесткости и податливости слоев определялись из уравнений структурной модели армированного слоя [9].

Из табл. 1 следует, что стабилизация процесса вычислений достигается уже при $L = 6$, данное или близкие к нему значения L подходят не только для параметров (3.1)–(3.3), но и для других рассмотренных ниже значений параметров оболочки. Дальнейшие численные расчеты проведены при $L = 8$.

В табл. 2 в зависимости от параметра b/h приведены расчетные значения критических интенсивностей давления для двухслойной композитной оболочки, внутренний слой

Таблица 3

E^a/E^c	$10^2\,P_1^*/E_1^c$	$10^2\,P_2^*/E_1^c$	$10^2\,P_3^*/E_1^c$	$10^2\,P_4^*/E_1^c$	n_0
10	0,137	0,129	0,142	0,145	8
20	0,175	0,163	0,178	0,181	8
30	0,203	0,187	0,203	0,206	8
40	0,225	0,206	0,221	0,224	8
50	0,246	0,224	0,238	0,241	8
60	0,265	0,240	0,254	0,257	8

которой армирован волокнами постоянного сечения в окружном направлении, внешний — в меридиональном. Результаты получены при $\alpha = \pi/20$, $a/b = 0{,}9$, остальные параметры имели значения (3.1)–(3.3). В табл. 2 показано, что неучет поперечных сдвигов приводит к завышению, а моментности и докритических деформаций — к занижению расчетных значений критических интенсивностей давления. Величины относительных погрешностей, вносимых в определение критических давлений неучетом этих факторов, достигают максимума при $b/h = 150$ и составляют соответственно 12,05; 20,12 и 4,85 %. Влияние всех исследуемых факторов ослабевает при увеличении параметра тонкостенности b/h и практически исчезает при $b/h = 350$.

В зависимости от параметра E^a/E^c ($E_1^a = E_2^a \equiv E^a$, $E_1^c = E_2^c \equiv E^c$) в табл. 3 приведены расчетные значения критических давлений двухслойной оболочки, внутренний слой которой армирован волокнами постоянного сечения в окружном направлении, внешний — в меридиональном. Результаты получены при $b/h = 200$, остальные параметры имели те же значения, что и в табл. 1. Из табл. 3 следует, что при увеличении параметра E^a/E^c (сопровождающемся увеличением податливости слоев оболочки на поперечные сдвиги [9]) влияние поперечных сдвиговых деформаций на расчетные значения критических давлений усиливается, а влияние моментности основного равновесного состояния и докритических деформаций ослабевает. Так, относительная погрешность, вносимая в определение критических давлений неучетом поперечных сдвиговых деформаций (моментности основного равновесного состояния), составляет 5,84 % (10,08 %) при $E^a/E^c = 10$ и 9,43 % (5,83 %) при $E^a/E^c = 60$. Отметим, что эффект ослабления влияния моментности основного состояния на критические параметры устойчивости для податливых на поперечные сдвиги оболочек выявлен и в работах [10, 11], где анализировалась устойчивость цилиндрической оболочки при внешнем давлении.

В табл. 4 в зависимости от параметра E_1/E_2 приведены расчетные значения критических давлений $P_1^*, \ldots, P_4^*$ трехслойной оболочки симметричного строения, собранной из

Таблица 4

E_1/E_2	$10^3\,P_1^*/E_1$	$10^3\,P_2^*/E_1$	$10^3\,P_3^*/E_1$	$10^3\,P_4^*/E_1$	n_0
10	1,148	0,863	0,993	1,008	5
15	1,106	0,755	0,866	0,879	5
20	1,087	0,684	0,780	0,790	5
25	1,075	0,627	0,709	0,718	5
30	1,066	0,579	0,649	0,656	5
35	1,061	0,542	0,604	0,611	5
40	1,056	0,505	0,562	0,568	6
45	1,053	0,471	0,520	0,525	6

Таблица 5

b/h	$10^3 P_1^*/E_1$	$10^3 P_2^*/E_1$	$10^3 P_3^*/E_1$	$10^3 P_4^*/E_1$	n_0
15	1,487	0,453	0,485	0,491	3
20	0,659	0,286	0,301	0,305	3
25	0,345	0,189	0,197	0,199	3
30	0,199	0,128	0,132	0,134	3
35	0,133	0,095	0,097	0,098	3

однородных изотропных слоев. Результаты получены при следующих параметрах:

$$\frac{b}{h} = 50, \quad \frac{a}{b} = 0{,}7, \quad \alpha = \frac{\pi}{10}, \quad \frac{E_1}{E_3} = 1, \quad t_1 = t_3 = 0{,}1h, \quad \iota_2 = 0{,}8h, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0{,}3 \qquad (3.4)$$

(E_k, ν_k, ι_k — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщина k-го слоя оболочки). В табл. 4 показано, что неучет поперечных сдвигов приводит к завышению, а моментности основного состояния и докритических деформаций — к занижению расчетных значений критических давлений. Относительная погрешность, вносимая в определение критических давлений неучетом поперечных сдвигов, возрастает при увеличении параметра E_1/E_2 от 24,82 % при $E_1/E_2 = 10$ до 55,27 % при $E_1/E_2 = 45$. Наличие столь значительной погрешности свидетельствует о принципиальной необходимости учета поперечных сдвигов в задачах устойчивости оболочек с существенно различными жесткостями слоев. Относительные погрешности от неучета моментности основного состояния и докритических деформаций уменьшаются при возрастании параметра E_1/E_2, составляя соответственно 15,06 и 1,51 % при $E_1/E_2 = 10$ и 10,40 и 0,96 % при $E_1/E_2 = 45$.

В табл. 5 в зависимости от параметра b/h приведены расчетные значения критических давлений трехслойной оболочки симметричного строения, собранной из однородных изотропных слоев. Результаты получены при $a/b = 0{,}2$, $E_1/E_2 = 20$, остальные параметры имели значения (3.4). Как и в предыдущем случае, из трех оцениваемых факторов — поперечных сдвиговых деформаций, моментности основного состояния, докритических деформаций — наиболее важным является первый. Так, при $b/h = 15$ относительная погрешность от неучета сдвигов достигает 69,54 %, в то время как погрешности от неучета моментности и докритических деформаций составляют 7,06 и 1,24 %. При увеличении параметра b/h относительная погрешность от неучета этих факторов убывает и при $b/h = 35$ составляет соответственно 28,57; 2,10 и 1,03 %.

В заключение отметим, что выявленные закономерности в зависимости критических давлений конической оболочки от моментности основного состояния и поперечных сдвигов аналогичны соответствующим закономерностям для цилиндрической оболочки, установленным в [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреев А. Н., Немировский Ю. В.** Устойчивость упругих многослойных армированных оболочек // Механика композит. материалов. 1979. № 1. С. 86–95.
2. **Андреев А. Н., Немировский Ю. В.** К теории упругих многослойных анизотропных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1977. № 5. С. 87–96.
3. **Андреев А. Н.** Свободные колебания слоистых упругих композитных оболочек вращения // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 5. С. 145–154.
4. **Андреев А. Н.** К оценке прочности упругой слоистой композитной оболочки вращения в геометрически нелинейной постановке // Прикл. механика. 1990. Т. 26, № 7. С. 43–49.

5. **Андреев А. Н.** О численном решении линейных краевых задач устойчивости слоистых оболочек вращения // Прикл. механика. 1989. Т. 25, № 8. С. 60–66.
6. **Андреев А. Н.** О численном интегрировании уравнений осесимметричного изгиба слоистых оболочек вращения методом инвариантного погружения // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 73. С. 137–148.
7. **Григолюк Э. И., Кабанов В. В.** Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978.
8. **Matrix** Eigensystem Routines — EISPACK Guide Extension / B. S. Garbow, et al. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977. (Lect. Notes Comput. Sci. V. 51).
9. **Немировский Ю. В.** К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин // Механика полимеров. 1972. № 5. С. 861–873.
10. **Андреев А. Н.** Об устойчивости слоистой цилиндрической оболочки при внешнем давлении // Прикл. механика. 1984. Т. 20, № 10. С. 59–64.
11. **Ванин Г. А., Семенюк Н. П., Емельянов Р. Ф.** Устойчивость оболочек из армированных материалов. Киев: Наук. думка, 1978.

Поступила в редакцию 11/IX 1997 г.