УДК 532.517.4, 517.956

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ЛЕЙТА ВОЛНОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СРЕДЕ С НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Ю. А. Чиркунов

Новосибирский государственный архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 630008 Новосибирск, Россия
E-mail: chr101@mail.ru

Исследована обобщенная феноменологическая модель Лейта волновой турбулентности в среде с нестационарной вязкостью. С использованием методов группового анализа получены основные модели, обладающие нетривиальными симметриями. Для каждой модели найдены все инвариантные подмодели. Описывающие эти подмодели инвариантные решения либо найдены в явном виде, либо удовлетворяют полученным интегральным уравнениям. С помощью основных моделей исследованы турбулентные процессы, для которых в начальный момент времени при фиксированном значении модуля волнового числа заданы либо энергетический спектр турбулентности и его градиент, либо энергетический спектр турбулентности и скорость его изменения. Установлено, что решения задач, описывающих эти процессы, существуют и единственны при определенных условиях.

Ключевые слова: обобщенная феноменологическая нелинейная модель Лейта волновой турбулентности, нестационарная вязкость, групповой анализ, инвариантные подмодели, точные решения нелинейных дифференциальных уравнений, “деструктивные волны”.

DOI: 10.15372/PMTF20190215

Введение. Феноменологическая нелинейная модель Лейта волновой турбулентности построена таким образом, что в случае исчезающей вязкости существуют два стационарных состояния: спектр Колмогорова, соответствующий каскадному состоянию, и распределение Рэлея — Джинса, соответствующее состоянию термодинамического равновесия [1]. Наиболее общее устойчивое состояние этой модели определяется “нелинейной смесью” постоянного потока энергии с термодинамической составляющей [2]. Нестационарный спектр описывается автомодельным решением второго рода [3], для которого спектр при больших волновых числах формируется за конечный промежуток времени. Такое поведение было продемонстрировано в [2, 4] с помощью численного моделирования течения с исчезающей вязкостью и в отсутствие внешних сил. Интегральные уравнения, описывающие все существенно различающиеся инвариантные подмодели этой модели в отсутствие воздействия внешних сил, а также в отсутствие и при наличии постоянной вязкости, получены в [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00446_а).

Обобщение модели Лейта в отсутствие вязкости изучено в [6, 7], при наличии нестационарной вязкости специального вида — в [8].

В настоящей работе исследуется обобщенная модель Лейта для волновой турбулентности специальной размерности при наличии нестационарной вязкости и в отсутствие внешних сил. Эта модель описывается уравнением

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{8}\,\frac{\partial}{\partial k}\Big(k^a E^b\,\frac{\partial}{\partial k}\,(kE)\Big) - \nu(t)k^c E, \tag{1}$$

где $E(k,t)$ — энергетический спектр турбулентности; t — время; k — модуль волнового числа; $\nu(t)$ — кинематическая вязкость; a, b, c — вещественные числа, являющиеся параметрами этой обобщенной модели. Параметр a зависит от типа волн (капиллярных, гравитационных и др.), параметр b — от количества сталкивающихся волн, параметр c — от характеристик среды. Спектр нормализуется таким образом, что плотность кинетической энергии равна $\displaystyle\int\limits_{k_0}^{k} E\,dk$ ($k_0 > 0$ — начальное значение модуля волнового числа).

Предполагается, что параметры a, b, c и кинематическая вязкость $\nu(t)$ удовлетворяют условию

$$ab\nu'(t) \neq 0. \tag{2}$$

Цель настоящей работы — найти все базисные модели (1), имеющие разные групповые свойства, и исследовать инвариантные решения, описывающие все существенно различающиеся инвариантные подмодели, а также выяснить физический смысл этих решений.

1. Групповая классификация. Задача групповой классификации модели (1) решается с помощью алгоритма, предложенного в [8, 9]. В отличие от классического алгоритма [10] этот алгоритм позволяет, во-первых, избежать трудностей, возникающих при анализе классифицирующих уравнений с использованием алгоритма [10]; во-вторых, существенно уменьшить объем вычислений.

Произвольным элементом уравнения (1) является вектор-функция $\boldsymbol{f} = (a, b, c, \nu(t))$, структурные уравнения для которой записываются следующим образом:

$$\boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{f}_E = \boldsymbol{0}, \qquad a_t = 0, \quad b_t = 0, \quad c_t = 0. \tag{3}$$

Оператор обобщенных преобразований эквивалентности уравнения (1) имеет вид

$$\xi^0\,\partial_t + \xi^1\,\partial_k + \eta\,\partial_E + \boldsymbol{\zeta}\cdot\partial_{\boldsymbol{f}},$$

где ξ^0, ξ^1, η — гладкие функции переменных (t, k, E); $\boldsymbol{\zeta}$ — гладкая вектор-функция переменных $(t, k, E, \boldsymbol{f})$. Условие инвариантности многообразия, задаваемого уравнениями (1)–(3) относительно этого оператора (с учетом правила продолжения оператора [8, 9]), после расщепления по параметрическим производным эквивалентно переопределенной системе уравнений, решениями которой являются все специализации произвольного элемента и соответствующие преобразования эквивалентности уравнения (1), образующие множество обобщенных преобразований эквивалентности этого уравнения. Для нахождения специализаций произвольного элемента исследуем воздействие группы эквивалентностей уравнения (1) с каждым полученным произвольным элементом или, точнее, воздействие фактор-группы этой группы эквивалентностей относительно ядра основных групп уравнения (1) на само уравнение (1) с этим произвольным элементом, в результате чего образуются классы эквивалентных уравнений. Для того чтобы найти все неэквивалентные уравнения, построим оптимальную систему подгрупп для рассматриваемой группы эквивалентностей или, точнее, фактор-группу этой группы эквивалентностей относительно ядра основных групп уравнения (1). Преобразования эквивалентности, действующие на $\boldsymbol{f}$ тождественно, образуют ядро основных групп уравнения (1) с этим произвольным элементом, т. е. допускаются уравнением (1) для всех элементов $\boldsymbol{f}$, обладающих рассматриваемым произволом. Помимо ядра основных групп уравнение (1) допускает каждую подгруппу группы эквивалентностей при условии, что эта подгруппа действует на элемент $\boldsymbol{f}$ тождественно. Для каждой подгруппы построенной оптимальной системы подгрупп элемент $\boldsymbol{f}$ задается при условии, что эта подгруппа действует на элемент тождественно. Сформулируем окончательные результаты групповой классификации уравнения (1) при условии (2). Далее во всех формулах λ и $\mu \neq 0$ являются произвольными вещественными постоянными.

Ядро основных групп уравнения (1) состоит только из тождественного преобразования пространства $\mathbb{R}^3(t,k,E)$.

Для зависимости

$$\nu(t) = -\frac{\varphi''(t)}{b\varphi'(t)}, \tag{4}$$

где

$$\varphi'(t) \neq 0, \qquad \Big(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\Big)' \neq 0, \qquad c = 0,$$

$\varphi = \varphi(t)$ — произвольная гладкая функция, основная группа уравнения (1) порождается операторами

$$X_1 = b\,\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}\,\partial_t - \Big(\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}\Big)' E\,\partial_E, \qquad X_2 = b\,\frac{1}{\varphi'(t)}\,\partial_t - \Big(\frac{1}{\varphi'(t)}\Big)' E\,\partial_E,$$

$$X_3 = k\,\partial_k + \frac{1-a}{b}\,u\,\partial_u.$$

Функция $\varphi(t)$ выражается через функцию $\nu(t)$ по формуле

$$\varphi(t) = \alpha_1 \int \exp\Big(-b\int \nu(t)\,dt\Big)\,dt + \alpha_2,$$

где α_1, α_2 — вещественные постоянные.

Для зависимости

$$\nu(t) = \mu\,\mathrm{e}^{-\lambda ct}, \qquad \lambda c \neq 0 \tag{5}$$

основная группа уравнения (1) порождается оператором

$$X_4 = \partial_t + \lambda k\,\partial_k - \frac{\lambda(a-1)}{b}\,E\,\partial_E.$$

Для зависимости

$$\nu(t) = \mu t^{-1-\lambda c}, \qquad c(1+\lambda c) \neq 0 \tag{6}$$

основная группа уравнения (1) порождается оператором

$$X_5 = t\,\partial_t + \lambda k\,\partial_k - \frac{\lambda(a-1)+1}{b}\,E\,\partial_E.$$

Модели (4)–(6) являются базисными моделями, имеющими разные групповые свойства.

2. Инвариантные подмодели. Кинематическая вязкость и параметры модели (1) определяются эмпирически. Следует отметить, что модели, имеющие дополнительные симметрии, наиболее перспективны для математического исследования и адекватно описывают реальные процессы [10, 11].

Таблица 1

Однопараметрические подгруппы $\theta_{1,m}$

m	Базис подалгебры	Универсальный инвариант
1	$X_1+\gamma X_3$	$k(\varphi(t))^{-\gamma/b}$, $(\varphi(t))^{\gamma(a-1)/b^2}(\varphi'(t)/\varphi(t))^{-1/b}E$
2	X_3	t, $k^{(a-1)/b}E$
3	X_2+X_3	$k\,\mathrm{e}^{-\varphi(t)/b}$, $(\varphi'(t))^{-1/b}\,\mathrm{e}^{(a-1)\varphi(t)/b^2}\,E$
4	X_2	k, $(\varphi'(t))^{-1/b}E$

Таблица 2

Двухпараметрические подгруппы $\theta_{2,m}$

m	Базис подалгебры		Универсальный инвариант
1	$X_1+\gamma X_3\quad(\gamma\neq 0)$	X_2	$k^{(a-1)/b+1/\gamma}(\varphi'(t))^{-1/b}E$
2	X_1	X_3	$k^{(a-1)/b}(\varphi'(t)/\varphi(t))^{-1/b}E$
3	X_2	X_3	$k^{(a-1)/b}(\varphi'(t))^{-1/b}E$
4	X_1	X_2	k

Для базисных моделей (4)–(6) найдем все инвариантные подмодели. Они описываются решениями, инвариантными относительно подгрупп основных групп этих моделей. Далее во всех формулах величины c_n $(n=1,2,\ldots,31)$, γ, $t_0\geqslant 0$, $k_0>0$, $E_0>0$, E_1, E_2 являются произвольными вещественными постоянными.

2.1. *Инвариантные подмодели модели* (4). Для нахождения всех инвариантных решений построим оптимальную систему подгрупп основной группы модели (4). Действие группы внутренних автоморфизмов основной алгебры Ли на эту алгебру Ли разбивает ее на непересекающиеся классы подобных подалгебр. Выбор простейшего представителя в каждом классе дает оптимальную систему неподобных подалгебр основной алгебры Ли. Каждой подалгебре из этой оптимальной системы соответствует подгруппа основной группы, порожденная данной подалгеброй. С использованием критерия инвариантности функции относительно группы Ли преобразований получаем универсальный инвариант каждой подгруппы из оптимальной системы подгрупп в пространстве $\mathbb{R}^3(t,k,E)$. Оптимальная система подгрупп и их универсальные инварианты приведены в табл. 1, 2.

Инвариантные H-решения ранга 0 представляют собой решения, инвариантные относительно подгрупп $H\in\{\theta_{2,m}\ (m=1,2,3)\}$ и имеющие физический смысл только при $\varphi''(t)/(b\varphi'(t))<0$.

Ненулевое инвариантное $\theta_{2,1}$-решение существует тогда и только тогда, когда $a\neq b+1$. Существуют два таких решения, которые находятся следующим образом:

— при $\gamma=b/(b+1-a)$ — по формуле

$$E=\mu k^{-1}(\varphi'(t))^{1/b}; \tag{7}$$

— при $b\neq -1$, $\gamma=b(b+1)/(b+1-a)$ — по формуле

$$E=\mu k^{-a/(b+1)}(\varphi'(t))^{1/b}. \tag{8}$$

Оба решения имеют физический смысл только при дополнительном условии $\mu\varphi'(t)>0$.

Решение (7) и решение (8) при $a/(b+1)\leqslant 2$ описывают "деструктивную волну" [6]. "Деструктивная волна" обладает бесконечно большой кинетической энергией. С помощью этого понятия в [6] качественно описаны так называемые ложные или странные волны.

Ненулевое инвариантное $\theta_{2,2}$-решение существует только при $a \neq b+1$ и определяется по формуле

$$E = \Big(-\frac{8bk^{1-a}\varphi'(t)}{(b+1-a)^2\varphi(t)}\Big)^{1/b}. \tag{9}$$

Решение (9) имеет физический смысл только при $b\varphi'(t)/\varphi(t) < 0$. При $(1-a)/b \geqslant -2$ решение (9) описывает "деструктивную волну".

Ненулевое инвариантное $\theta_{2,3}$-решение существует только при $a = b+1$ и определяется по формуле (7).

Инвариантные H-решения ранга 1 представляют собой решения, инвариантные относительно подгрупп $H \in \{\theta_{1,m}\ (m = 1, 2, 3, 4)\}$.

Инвариантное $\theta_{1,1}$-решение имеет вид

$$E = (\varphi(t))^{\gamma(1-a)/b^2}\Big(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\Big)^{1/b} U(\xi), \qquad \xi = k(\varphi(t))^{-\gamma/b}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (1), получаем фактор-уравнение

$$\xi^{a+1}U^bU'' + b\xi^{a+1}U^{b-1}U'^2 + (a+b+2)\xi^aU^bU' + \\ + \frac{8\gamma}{b}\,\xi U' + a\xi^{a-1}U^{b+1} + \frac{8\gamma(a-1)+b}{b^2}\,U = 0. \tag{11}$$

Функция $U = U(\xi)$ определяется следующим образом. Если $\theta = a-b-1 \neq 0$, $b \neq -1$, то $U = V^{1/(b+1)}(\xi)$, где $V(\xi)$ является решением интегрального уравнения

$$V(\xi) = c_1\xi^{-1-b} + c_2\xi^{-a} + \\ + \frac{8(b+1)}{\theta b^2}\,\xi^{-a}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\Big((\gamma\theta - b) - (\gamma\theta(b+1) - b)\Big(\frac{x}{\xi}\Big)^{b+1-a}\Big)V^{1/(b+1)}(x)\,dx, \tag{12}$$

если $a = b+1$, $b \neq -1$, то $U = V^{1/(b+1)}(\xi)$, где $V(\xi)$ — решение интегрального уравнения

$$V(\xi) = \xi^{-1-b}\Big(c_3 + c_4\ln\xi + \frac{8(b+1)}{b}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\Big(\ln\frac{x}{\xi} - \gamma\Big)V^{1/(b+1)}(x)\,dx\Big); \tag{13}$$

если $b = -1$, то $U = \mathrm{e}^{V(\xi)}$, где $V(\xi)$ — решение интегрального уравнения

$$V(\xi) = c_5 + c_6\xi^{-a} - \ln\xi + \frac{8}{a}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\Big(1 - (1-\gamma a)\Big(\frac{x}{\xi}\Big)^{a}\Big)x^{-a}\,\mathrm{e}^{V(x)}\,dx. \tag{14}$$

В формулах (12)–(14) $\xi_0 = k_0(\varphi(t_0))^{-\gamma/b}$.

Инвариантное $\theta_{1,2}$-решение находится по формуле

$$E = \Big(-\frac{8bk^{1-a}\varphi'(t)}{(b+1-a)^2\varphi(t) + c_7}\Big)^{1/b}. \tag{15}$$

При $(1-a)/b \geqslant -2$ это решение соответствует "деструктивной волне". Решение (15) при $c_7 = 0$ совпадает с решением (9).

Инвариантное $\theta_{1,3}$-решение имеет вид

$$E = (\varphi'(t))^{1/b} \exp\Big(\frac{1-a}{b^2}\,\varphi(t)\Big) U(\xi), \qquad \xi = k\,\mathrm{e}^{-\varphi(t)/b}. \tag{16}$$

Если $(a-b-1)(b+1) \neq 0$, то $U = V^{1/(b+1)}(\xi)$, где $V(\xi)$ — решение интегрального уравнения

$$V(\xi) = c_8\xi^{-1-b} + c_9\xi^{-a} + \frac{8(b+1)}{b^2}\,\xi^{-a}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\Big(1-(b+1)\Big(\frac{x}{\xi}\Big)^{b+1-a}\Big)V^{1/(b+1)}(x)\,dx; \tag{17}$$

если $a = b+1$, $b \neq -1$, то $U = V^{1/(b+1)}(\xi)$, где $V(\xi)$ — решение интегрального уравнения

$$V(\xi) = \xi^{-1-b}\Big(c_{10} + c_{11}\ln\xi + \frac{8(b+1)}{b}\int\limits_{\xi_0}^{\xi} V^{1/(b+1)}(x)\,dx\Big); \tag{18}$$

если $b = -1$, то $U = \mathrm{e}^{V(\xi)}$, где $V(\xi)$ — решение интегрального уравнения

$$V(\xi) = c_{12} + c_{13}\xi^{-a} - \ln\xi + 8\xi^{-a}\int\limits_{\xi_0}^{\xi} \mathrm{e}^{V(x)}\,dx. \tag{19}$$

В (17)–(19) $\xi_0 = k_0\,\mathrm{e}^{-\varphi(t_0)/b}$.

Инвариантное $\theta_{1,4}$-решение находится следующим образом:

— если $(a-b-1)(b+1) \neq 0$ — по формуле

$$E = k^{-1}(\varphi'(t))^{1/b}(c_{14} + c_{15}k^{b+1-a})^{1/(b+1)}; \tag{20}$$

— если $a = b+1$, $b \neq -1$ — по формуле

$$E = k^{-1}(\varphi'(t))^{1/b}(c_{16} + c_{17}\ln k)^{1/(b+1)}; \tag{21}$$

— если $b = -1$ — по формуле

$$E = c_{18}(k\varphi'(t))^{-1}\,\mathrm{e}^{c_{19}k^{-a}}. \tag{22}$$

Решение (20) при $(b+1-a)/(b+1) > 0$, решение (21) при $(b+2)/(b+1) > 0$ и решение (22) при $c_{19} > 0$, $a < 0$ описывают "деструктивные волны".

2.2. *Инвариантная подмодель модели* (5). Данная модель имеет единственную инвариантную подмодель, которая описывается инвариантным $\langle X_4\rangle$-решением, имеющим вид

$$E = \exp\Big(\frac{\lambda(1-a)}{b}\,t\Big)U(\xi), \qquad \xi = k\,\mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{23}$$

Если $\theta = a-b-1 \neq 0$, $b \neq -1$, то $U = V^{1/(b+1)}(\xi)$, где $V(\xi)$ — решение интегрального уравнения

$$V(\xi) = c_{20}\xi^{-1-b} + c_{21}\xi^{-a} + \\ + \frac{8(b+1)}{b\theta}\,\xi^{-a}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\Big((\lambda\theta + \mu b x^c) - (\lambda\theta(b+1) + \mu b x^c)\Big(\frac{x}{\xi}\Big)^{\theta}\Big)V^{1/(b+1)}(x)\,dx; \tag{24}$$

если $a = b+1$, $b \neq -1$, то $U = V^{1/(b+1)}(\xi)$, где $V(\xi)$ — решение интегрального уравнения

$$V(\xi) = \xi^{-1-b}\Big(c_{22} + c_{23}\ln\xi - 8(b+1)\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\Big(\lambda - \mu b x^c\ln\Big(\frac{\xi}{x}\Big)\Big)V^{1/(b+1)}(x)\,dx\Big); \tag{25}$$

если $b = -1$, то $U = \mathrm{e}^{V(\xi)}$, где $V(\xi)$ — решение интегрального уравнения

$$V(\xi) = c_{24} + c_{25}\xi^{-a} - \ln\xi + \frac{8\xi^{-a}}{a}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\Big(\mu x^c\Big(\Big(\frac{\xi}{x}\Big)^a - 1\Big) - \lambda a\Big)\,\mathrm{e}^{V(x)}\,dx. \qquad (26)$$

В формулах (24)–(26) $\xi_0 = k_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t_0}$.

2.3. *Инвариантная подмодель модели* (6). Данная модель имеет единственную инвариантную подмодель, которая описывается автомодельным инвариантным $\langle X_5\rangle$-решением, имеющим вид

$$E = t^{(\lambda(1-a)-1)/b}U(\xi), \qquad \xi = kt^{-\lambda}. \qquad (27)$$

Если $\theta = a - b - 1 \neq 0$, $b \neq -1$, то $U = V^{1/(b+1)}(\xi)$, где $V(\xi)$ — решение интегрального уравнения

$$V(\xi) = c_{26}\xi^{-1-b} + c_{27}\xi^{-a} + \\ + \frac{8(b+1)}{b\theta}\,\xi^{-a}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\Big((\lambda\theta - 1 + \mu bx^c) - (\lambda\theta(b+1) - 1 + \mu bx^c)\Big(\frac{x}{\xi}\Big)^{\theta}\Big)V^{1/(b+1)}(x)\,dx; \qquad (28)$$

если $a = b + 1$, $b \neq -1$, то $U = V^{1/(b+1)}(\xi)$, где $V(\xi)$ — решение интегрального уравнения

$$V(\xi) = \xi^{-1-b}\Big(c_{28} + c_{29}\ln\xi + \frac{8(b+1)}{b}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\Big(-\lambda b + (1 - \mu bx^c)\ln\Big(\frac{x}{\xi}\Big)\Big)V^{1/(b+1)}(x)\,dx\Big); \qquad (29)$$

если $b = -1$, то $U = \mathrm{e}^{V(\xi)}$, где $V(\xi)$ — решение интегрального уравнения

$$V(\xi) = c_{30} + c_{31}\xi^{-a} - \ln\xi + \frac{8\xi^{-a}}{a}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\Big((1 + \mu x^c)\Big(\Big(\frac{\xi}{x}\Big)^a - 1\Big) - \lambda a\Big)\,\mathrm{e}^{V(x)}\,dx. \qquad (30)$$

В формулах (28)–(30) $\xi_0 = k_0 t_0^{-\lambda}$.

3. Задачи с начальными условиями. Наличие произвольных постоянных в формулах, задающих инвариантные решения (10)–(14), (16)–(19), (23)–(26), (27)–(30), позволяет применить эти решения при исследовании различных задач, описывающих турбулентные движения. Рассмотрим две задачи для моделей (4), (5).

3.1. *Задача* 1. Пусть для модели (4) в начальный момент времени $t_0 \geqslant 0$ для модуля волнового числа $k_0 > 0$ известны энергетический спектр турбулентности E_0 и его градиент E_1:

$$E(k_0, t_0) = E_0 > 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial k}(k_0, t_0) = E_1. \qquad (31)$$

При условии, что для каждого модуля волнового числа $k = c_0(\varphi(t))^{\gamma/b}$ ($c_0 = \mathrm{const}$) величина $f(t, E) = (\varphi(t))^{(\gamma(a-1)+b)/b^2}(\varphi'(t))^{1/b}E(k, t)$ является постоянной, решение задачи задается формулами (10)–(14), содержащими произвольные постоянные c_m ($m = 1, 2, \dots, 6$).

Пусть $\varphi(t_0) = \varphi_0 > 0$, $\varphi'(t_0) = \varphi_1 > 0$. Введя новую неизвестную функцию по формуле $W = U^b\, dU/d\xi$, запишем фактор-уравнение (11) в виде равносильной системы

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{W}{U^b}, \quad \frac{dW}{d\xi} = -\frac{(a+b+2)W}{\xi} - \frac{aU^{b+1}}{\xi^2} - \frac{8}{b\xi^\alpha}\Big(\frac{\gamma W}{U^b} - \Big(\frac{\gamma(1-a)}{b} - 1\Big)\frac{U}{\xi}\Big). \tag{32}$$

Для этой системы условия (31) принимают вид

$$\begin{gathered} U(\xi_0) = \varphi_0^{(\gamma(a-1)+b)/b^2}\varphi_1^{-1/b}u_0 > 0, \\ W(\xi_0) = \varphi_0^{((b+1)(\gamma(a-1)+b)+\gamma b)/b^2}\varphi_1^{-1-1/b}u_0^b u_1 \neq 0, \qquad \xi_0 = k_0(\varphi(t_0))^{-\gamma/b} > 0. \end{gathered} \tag{33}$$

В силу гладкости правых частей системы (32) в окрестности точки $(\xi_0, U(\xi_0), W(\xi_0))$ решение задачи Коши (32), (33) существует и единственно в окрестности точки ξ_0. Поэтому в окрестности точки ξ_0 существует единственное решение для каждого из нелинейных интегральных уравнений (12)–(14) с константами, заданными формулами

$$\begin{gathered} c_1 = \big(k_0E_0\varphi_0^{(\gamma\theta+b)/b^2}\varphi_1^{-1/b}\big)^{b+1} - c_2k_0^{-\theta}\varphi_0^{\gamma\theta/b}, \qquad \theta = a-b-1, \\ c_2 = -\frac{b+1}{\theta}\,k_0E_0\varphi_0^{\gamma\theta/b^2}\Big(k_0^{a-1}E_0^b\varphi_0^{-(b-\gamma(b+1))/b} + \varphi_1^{-1/b}\Big(\frac{8\gamma}{b} + k_0^aE_0^{b-1}E_1\varphi_0\varphi_1^{-1}\Big)\Big), \\ c_3 = \big(k_0E_0\varphi_0^{1/b}\varphi_1^{-1/b}\big)^{b+1} - c_4\Big(\ln k_0 - \frac{\gamma}{b}\ln\varphi_0\Big), \\ c_4 = (b+1)k_0\varphi_0^{1/b}\varphi_1^{-1}\Big(k_0^b\varphi_0\varphi_1^{-1} + E_0\Big(\frac{8\gamma}{b} + k_0^{b+1}E_0^{b-1}E_1\varphi_0\varphi_1^{-1}\Big)\Big), \\ c_5 = \ln(k_0E_0\varphi_0^{\gamma a-1}\varphi_1) + c_6(k_0\varphi_0^\gamma)^{-a}, \qquad c_6 = \frac{1}{a}\,k_0^{a+1}\varphi_0^{\gamma a}(8\gamma k_0^{-a}E_0\varphi_0^{-1}\varphi_1 - k_0^{-1} - E_0^{-1}E_1). \end{gathered} \tag{34}$$

Таким образом, единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (31), для которых величина $f(t,E)$ сохраняет постоянное значение для каждого модуля волнового числа $k = c_0(\varphi(t))^{\gamma/b}$ ($c_0 = \mathrm{const}$), существует в окрестности точки (k_0, t_0). Это решение определяется по формулам (10), (12)–(14), (34).

Физический смысл данного решения заключается в следующем. Пусть энергетический спектр турбулентности задается законом (10). В случае если в начальный момент времени $t_0 \geqslant 0$ для модуля волнового числа $k_0 > 0$ известны энергетический спектр турбулентности и его градиент, можно однозначно определить энергетический спектр в окрестности точки (k_0, t_0).

Аналогичным образом исследуются задачи с условиями (31) для моделей (5) и (6).

3.2. *Задача* 2. Пусть для модели (5) в начальный момент времени $t_0 \geqslant 0$ для модуля волнового числа $k_0 > 0$ известны энергетический спектр турбулентности E_0 и скорость его изменения E_2:

$$E(k_0, t_0) = E_0 > 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial t}(k_0, t_0) = E_2. \tag{35}$$

При условии, что для каждого модуля волнового числа $k = c_0\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ ($c_0 = \mathrm{const}$) величина $g(t,E) = \mathrm{e}^{\gamma(a-1)t/b}\,E(k,t)$ сохраняет постоянное значение, решение этой задачи задается формулами (23)–(26), содержащими произвольные постоянные c_m ($m = 20, 21, \ldots, 25$).

Как и в задаче 1, устанавливается, что в окрестности точки $\xi_0 = k_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t_0}$ для каждого из нелинейных интегральных уравнений (24)–(26) существует единственное решение с константами, заданными формулами

$$
\begin{gathered}
c_{20} = \left(k_0 E_0\,\mathrm{e}^{\lambda\theta t_0/b}\right)^{b+1} - c_{21}\left(k_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t_0}\right)^{-\theta}, \qquad \theta = a - b - 1,\\
c_{21} = -\frac{b+1}{\theta}\,k_0 E_0^{b+1}\,\mathrm{e}^{\lambda\theta t_0/b}\Big(8 + k_0^{a-1}E_0^{b}\Big(1 + \frac{1-a}{b}\,E_0 - \frac{1}{\lambda}\,E_2\Big)\Big),\\
c_{22} = (k_0 E_0)^{b+1} - c_{23}\ln\left(k_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t_0}\right), \qquad (36)\\
c_{23} = (b+1)k_0 E_0\Big((k_0 E_0)^{b} + 8\lambda - k_0^{b+1}E_0^{b-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda t_0}\Big(E_0 + \frac{1}{\lambda}\,E_2\Big)\Big),\\
c_{24} = \ln\left(k_0 E_0\right) - \lambda a t_0 - c_{25}k_0^{-a}\,\mathrm{e}^{\lambda a t_0}, \qquad c_{25} = \frac{k_0}{a}\Big(k_0^{a-1}\Big(\frac{1}{\lambda}\,E_0^{-1}E_2 - a\Big) - 8\lambda\Big).
\end{gathered}
$$

Таким образом, единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (36), для которых величина $g(t,E)$ сохраняет постоянное значение для каждого модуля волнового числа $k = c_0\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ ($c_0 = \mathrm{const}$), существует в окрестности точки (k_0, t_0). Это решение определяется по формулам (23)–(26), (36).

Физический смысл данного решения заключается в следующем. Пусть энергетический спектр турбулентности определяется по закону (23). Если в начальный момент времени $t_0 \geqslant 0$ для модуля волнового числа $k_0 > 0$ известны энергетический спектр турбулентности и скорость его изменения, можно однозначно определить энергетический спектр в окрестности точки (k_0, t_0).

Аналогичным образом исследуются задачи с условиями (35) для моделей (4) и (6).

Заключение. Полученные в работе решения описывают нелинейные процессы волновой турбулентности в средах с нестационарной вязкостью и могут быть использованы в качестве тестовых решений в численных расчетах, выполняемых при изучении процессов волновой турбулентности в средах с нестационарной вязкостью. Также эти решения позволяют оценить соответствие полученных математических моделей реальным физическим процессам. Приведение рассмотренных задач с начальными условиями к интегральным уравнениям удобно для их численного решения и исследования полученных решений на устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Leith C.** Diffusion approximation to inertial energy transfer in isotropic turbulence // Phys. Fluids. 1967. N 10. P. 1409–1416.
2. **Connaughtom C., Nazarenko S.** Warm cascade and anomalous scaling in a diffusion model of turbulence // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92, N 4. 044501.
3. **Zeldovich Ya. B.** Physics of shock-waves and high-temperature phenomena / Ya. B. Zeldovich, Yu. P. Raizer. N. Y.: Acad. Press, 1966. V. 2.
4. **Connaughtom C., Nazarenko S.** A model differential equation for turbulence // arXiv: Phys. 2003. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: http://arxiv.org/pdf/physics/0304044.pdf.
5. **Chirkunov Yu. A., Nazarenko S. V., Medvedev S. B., Grebenev V. N.** Invariant solutions for the nonlinear diffusion model of turbulence // J. Phys. A: Math. Theor. 2014. V. 47, N 18. 185501. DOI: 10.1088/1751-8113/47/18/185501.
6. **Chirkunov Yu. A.** Submodels of the generalization of the Leith's model of the phenomenological theory of turbulence and of the model of nonlinear diffusion in the inhomogeneous media without absorption // J. Phys. A: Math. Theor. 2015. V. 48, N 39. 395501. DOI: 10.1088/1751-8113/48/39/395501.

7. **Chirkunov Yu. A.** Invariant submodels and exact solutions of the generalization of the Leith model of the wave turbulence // Acta Mechanica. 2018. V. 229, iss. 10. P. 4045–4056. DOI: 10.1007/s00707-018-2217-0.
8. **Chirkunov Yu. A.** Submodels of model of nonlinear diffusion in the inhomogeneous medium involving absorption // J. Math. Phys. 2015. V. 56, N 10. 101502. DOI: 10.1063/1.4931911.
9. **Чиркунов Ю. А.** Обобщенные преобразования эквивалентности и групповая классификация систем дифференциальных уравнений // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 2. С. 3–13.
10. **Чиркунов Ю. А.** Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды / Ю. А. Чиркунов, С. В. Хабиров. Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 2012.
11. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 24/IX 2018 г.,
после доработки — 24/IX 2018 г.
Принята к публикации 24/IX 2018 г.