Рассмотрим теперь в адиабатическом приближении ($q^i = 0$) такую задачу. Пусть известно состояние среды, т. е. величины $\overset{\circ}{F}{}^m_n$, $\overset{\circ}{\eta}$ перед фронтом ударной волны с заданной скоростью движения $G$. Требуется найти необходимые условия, при которых состояние среды за фронтом, задаваемое величинами

$$F^i_j = \overset{\circ}{F}{}^i_j + h^i \rho \overset{\circ}{F}{}^k_j n_k, \ \eta = \overset{\circ}{\eta} + \tau, \quad \tau = [\eta],$$

определено единственным образом.

Будем рассматривать соотношения (5.5) как систему уравнений относительно неизвестных $h^m$ и $\tau$:

$$\Phi^0 (h^m, \tau) = U\left(\overset{\circ}{F}{}^m_n + h^m \rho \overset{\circ}{F}{}^k_n n_k, \overset{\circ}{\eta} + \tau\right) - U\left(\overset{\circ}{F}{}^m_n, \overset{\circ}{\eta}\right) - \tag{5.6}$$

$$- \frac{1}{2} n_k h^i \left\{\sigma^k_i \left(\overset{\circ}{F}{}^m_n + h^m \rho \overset{\circ}{F}{}^a_n n_a, \overset{\circ}{\eta} + \tau\right) + \sigma^k_i \left(\overset{\circ}{F}{}^m_n, \overset{\circ}{\eta}\right)\right\} = 0,$$

$$\Phi^i (h^m, \tau) = n_k \left\{\sigma^{ki} \left(\overset{\circ}{F}{}^m_n + h^m \rho \overset{\circ}{F}{}^a_n n_a, \overset{\circ}{\eta} + \tau\right) - \sigma^{ki} \left(\overset{\circ}{F}{}^m_n, \overset{\circ}{\eta}\right)\right\} - (\rho G)^2 h^i = 0.$$

В соответствии с теоремой существования неявных функций необходимым условием разрешимости системы (5.6) относительно $h^i$ и $\tau$ является

$$\partial(\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^0)/\partial(h^1, h^2, h^3, \tau) \neq 0, \tag{5.7}$$

где $\Phi^0$, $\Phi^i$ — достаточно гладкие функции своих аргументов.

Вычисляя производные, входящие в (5.7), и пользуясь соотношением

$$\frac{\partial \Phi^0}{\partial h^j} + \frac{1}{2} h_i \frac{\partial \Phi^i}{\partial h^j} = 0,$$

неравенство (5.7) можно записать в форме

$$\Theta \det \left\| (\rho G)^2 g_{ij} - \left(\rho F^a_m n_a\right) \frac{\partial^2 U}{\partial F^i_m \partial F^j_n} \left(\rho F^b_n n_b\right) \right\| \neq 0. \tag{5.8}$$

Сравнивая (5.8) и (4.4), находим, что искомым условием является $\rho G \neq \neq \rho c$, т. е. скорость ударной волны не должна равняться скорости распространения характеристической поверхности.

*Поступила 20 III 1981*

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970.
2. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды. М.: Мир, 1975.
3. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
4. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
5. **Лисейкин В. Д., Яненко Н. Н.** Методы подвижных координат в газовой динамике.— В сб.: Численные методы механики сплошной среды. 1976, т. 2, № 2.
6. **Vinocur M.** Conservation equations of gas-dynamics in curvilinear coordinate systems.— J. Comput. Phys., 1974, vol. 14, N 2.
7. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.

---

УДК 539.3 : 678.5.06

# ОБ УЧЕТЕ СТРУКТУРНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ КОМПОЗИТА ПРИ ОЦЕНКЕ АДГЕЗИОННОЙ ПРОЧНОСТИ

*Л. И. Маневич, А. В. Павленко*

*(Днепропетровск)*

Одной из основных характеристик композитного материала является адгезионная прочность. Экспериментальное определение этой характеристики (в случае волокнистого композита) может быть основано на измерении нагрузки, соответствующей «выдергиванию» волокна из матрицы.

Для корректного расчета адгезионной прочности по результатам таких испытаний необходимо, однако, решить сложную механическую задачу о распределении контактных напряжений между волокном и матрицей. Применение строгих методов анализа композитов на уровне составляющих их компонентов не позволяет в настоящее время получить точное аналитическое решение соответствующей задачи теории упругости. Поэтому широко используется инженерный подход [1—3], в котором предполагается, что волокна работают только на растяжение, а матрица — на сдвиг. Очевидно, таким путем не может быть учтена возможная особенность контактных напряжений в местах стыка волокна и матрицы на свободной границе. Кроме того, при использовании упрощенной модели возникает естественный вопрос о пределах применимости соответствующих решений даже вне окрестностей концентраторов напряжений.

Детальное представление о напряженном состоянии можно получить методом конечных элементов. Однако для эффективного применения численных методов также важны предварительные аналитические решения, правильно отражающие основные закономерности распределения напряжений в композите. Построению таких аналитических решений с учетом структурной неоднородности материала и посвящена данная работа. Вначале оценены пределы применимости упоминавшейся дискретной модели композита и получены представления для контактных напряжений, справедливые всюду, кроме окрестности особых точек. Эти представления в совокупности с построенными на втором этапе особыми решениями дают равномерно пригодное во всей области контакта приближенное решение задачи.

1. Для установления пределов применимости дискретной модели композитного материала рассмотрим плоскую задачу о вытягивании волокна из матрицы, имеющей форму полуполосы ($0 \leqslant x < \infty$, $-b \leqslant y \leqslant b$), конечные грани ($y = \pm b$) которой защемлены. Волокно, трактуемое как одномерный упругий стержень, расположено в середине полуполосы и совпадает с осью $Ox$. Принимается схема контакта по линии. Матрица, вообще говоря, считается ортотропной, главные направления упругости совпадают с декартовыми осями координат $x$, $y$.

В такой постановке задача сводится к интегрированию уравнений равновесия матрицы

$$B_1 u_{xx} + G u_{yy} + (\nu_2 B_1 + G) v_{xy} = 0,$$
$$G v_{xx} + B_2 v_{yy} + (\nu_1 B_2 + G) u_{xy} = 0$$

при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \ (x = 0),\ u = U,\ v = 0 \ (y = 0),\ u = v = 0 \ (y = \pm b).$$

На бесконечности все функции обращаются в нуль. Здесь $u$, $v$ — компоненты вектора перемещений матрицы; $B_1 B_2$ — жесткости матрицы на растяжение — сжатие; $G$ — жесткость на сдвиг; $\sigma_{11}$, $\sigma_{12}$ — осевое и касательное напряжения в матрице; $\nu_1$, $\nu_2$ — коэффициенты Пуассона; индексы $x$, $y$ обозначают дифференцирование по соответствующим координатам.

Перемещения $U(x)$ точек волокна удовлетворяют уравнению

$$EFU_{xx} = P_0 \delta(x) - 2\tau(x), \tag{1.1}$$

где $EF$ — жесткость волокна при растяжении; $\delta(x)$ — функция Дирака; $P_0$ — усилие, прикладываемое к волокну в граничной точке $x = 0$; $\tau(x)$ — контактное напряжение между волокном и матрицей. Так как $v = 0\,(v_x = 0)$ при $y = 0$, то

$$\tau(x) = G u_y|_{y=0}. \tag{1.2}$$

Для исследования поставленной задачи, которая не поддается точному решению, применим асимптотический метод [4—6]. Поскольку контактное напряжение (1.2) определяется лишь через функцию $u$, то в соответствии с расчленением напряженно-деформированного состояния матрицы [4—6] решение (в первом приближении) сводится к интегрированию уравнения (1.1) с учетом (1.2) и приближенного уравнения равновесия матрицы

$$\omega^2 u_{xx} + u_{yy} = 0 \ (\omega^2 = B_1/G), \tag{1.3}$$

которому соответствуют граничные условия

$$(1.4) \qquad u_x = 0 \ (x = 0), \ Gu_y = \tau(x) \ (y = 0), \ u = 0 \ (y = \pm b).$$

На бесконечности все функции обращаются в нуль.

Применяя cos-преобразование Фурье по координате $x$ к уравнению (1.3), решая полученное обыкновенное дифференциальное уравнение с учетом преобразованных равенств (1.1), (1.2), (1.4) и находя обращение, получим

$$(1.5) \qquad u(x, y) = -\frac{2P_0}{\pi EF}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\omega ys) - \operatorname{cth}(\omega bs)\operatorname{sh}(\omega ys)}{s[s + g\operatorname{cth}(\omega bs)]}\cos xs\,ds,$$

$$\tau(x) = \frac{P_0 g}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xs}{s\operatorname{th}(\omega bs) + g}\,ds, \quad g = \frac{2G\omega}{EF}.$$

При малых $s$, что соответствует большим значениям координаты $x$, $\operatorname{th}(\omega bs) \approx \omega bs$, а напряжение $\tau(x)$ принимает вид

$$(1.6) \qquad \tau(x) = \frac{P_0 g_*^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xs}{s^2 + g_*^2}\,ds = \frac{P_0 g_*}{2}e^{-g_* x}, \quad g_*^2 = \frac{g}{\omega b} = \frac{2G}{EFb}.$$

Контактное напряжение (1.6) соответствует решению задачи в предположении, что матрица работает только на сдвиг.

При больших $s$, что соответствует малым значениям координаты $x$, $\operatorname{th}(\omega bs) \approx 1$, а напряжение $\tau(x)$ из (1.5) запишется в виде

$$(1.7) \qquad \tau(x) = \frac{P_0 g}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xs}{s + g}\,ds = -\frac{P_0 g}{\pi}(\cos gx \operatorname{ci} gx + \sin gx \operatorname{si} gx),$$

где si, ci — интегральные синус и косинус. Распределение контактных напряжений, определяемое формулой (1.7), соответствует решению задачи о вытягивании волокна из полубесконечной матрицы [5], причем $\tau(x)$ имеет, очевидно, логарифмическую особенность в точке $x = 0$.

Таким образом, решение, полученное на основе упрощенного анализа, когда предполагается, что волокна работают только на растяжение, а матрица на сдвиг, справедливо лишь при достаточно больших значениях координаты $x$.

Аналогичные результаты можно получить при рассмотрении задачи о вытягивании волокна, расположенного вдоль оси $x$, из защемленной по кромкам $y = \pm b$ матрицы, имеющей форму прямоугольника ($0 \leqslant x \leqslant h$, $-b \leqslant y \leqslant b$), когда $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$ при $x = 0, h$. В частности, контактное напряжение между волокном и матрицей определяется формулой

$$(1.8) \qquad \tau(x) = \frac{P_0 g}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(n\pi x h^{-1})}{n\operatorname{th}(\omega n\pi b h^{-1}) + gh\pi^{-1}}.$$

Если матрица работает только на сдвиг, то

$$(1.9) \qquad \tau(x) = \frac{P_0 g_*}{2}\frac{\operatorname{ch}[g_*(h - x)]}{\operatorname{sh}(g_* h)}.$$

При $h \to \infty$ решения (1.8), (1.9) переходят в (1.5), (1.6).

В предыдущих примерах предполагалось, что в волокнистом композитном материале соседние с вытягиваемым волокна закреплены. Влияние этих волокон, как показано выше, существенно лишь при достаточно больших значениях координаты $x$, где справедливо решение, полученное на основе упрощенного анализа; поэтому реальная структура композита может быть учтена достаточно просто. Соответствующие расчеты показывают, что приближение закрепленных соседних волокон является вполне приемлемым.

Область значений параметра $s$ (и координаты $x$), в которой применима дискретная модель композита, оценивается следующим образом: $s \lesssim g_*$ $(x \gtrsim g_*^{-1})$.

В зоне, примыкающей к кромке полосы $(x < g_*^{-1})$, дискретная модель композитного материала неприменима. Здесь следует использовать решения (1.5), (1.8), полученные асимптотическим методом и справедливые всюду, кроме непосредственной окрестности стыка волокна и матрицы на свободной границе. В этой окрестности должно быть построено особое решение в рамках точных уравнений теории упругости. Если сохранить при этом стержневую модель волокна, то приходим к «корректировке» логарифмической особенности контактных напряжений за счет степенного множителя, зависящего от коэффициентов Пуассона $\nu_1$, $\nu_2$ [7]. Только при $\nu_1 = \nu_2 = 0$ этот множитель обращается в единицу и решения (1.5), (1.8) справедливы во всей области контакта. Если же в рассматриваемой окрестности напряженное состояние волокна описывать уравнениями плоского напряженного состояния, то особенность контактных напряжений (не зависящая от поперечного размера волокна) определяется способом передачи нагрузки на волокно (заданы напряжения либо перемещения). При заданных напряжениях собственное число $\lambda$, определяющее показатель степенной особенности контактных напряжений ($\tau(x) = Ax^\lambda$) в окрестности стыка волокна и матрицы на свободной границе, является корнем характеристического уравнения

$$(1.10)\qquad D_2^2(1+\lambda)^4 + \left(2D_1D_2 - 4D_1^2 - D_2^2 + 6D_1D_2\cos\lambda\pi\right)(1+\lambda)^2 + \\ + D_1^2(1+\cos\lambda\pi)^2 + D_3^2\sin^2\lambda\pi = 0,$$

которое получается после использования группового подхода [8]. Здесь $D_1 = k(\varkappa_2 - 1) - (\varkappa_1 - 1)$; $D_2 = 4(1-k)$; $D_3 = k(\varkappa_2 + 1) - (\varkappa_1 + 1)$; $k = G_1/G_2$; $\varkappa_i = (3-\nu_i)/(1+\nu_i)$; индексы 1 и 2 относятся к волокну и матрице.

Корни уравнения (1.10), лежащие в области $-1 < \lambda < 0$, несущественно зависят от изменения параметров и находятся в интервале $-0{,}419 \leqslant \lambda \leqslant -0{,}394$ (при $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$ $\lambda = -0{,}412$).

2. Рассмотрим теперь аналогичную осесимметричную задачу. Пусть волокно кругового поперечного сечения вытягивается из матрицы, имеющей форму полубесконечного цилиндра ($a \leqslant r \leqslant b$, $0 \leqslant z < \infty$), боковая поверхность которого ($r = b$) закреплена. Средняя линия волокна перпендикулярна плоскости $z = 0$ и совпадает с осью $Oz$. Требуется определить закон распределения контактных напряжений между волокном и матрицей, когда в концевом сечении ($z = 0$) волокна действует осевая нагрузка с равнодействующей $P_0$, направленной по оси волокна.

При постановке пространственных контактных задач для тел с упругими включениями малого поперечного сечения модель одномерного упругого стержня в сочетании с моделью контакта по линии непосредственно неприменима [9]. Поэтому, сохраняя для волокна модель упругого стержня, принимаем предположение о его контакте с матрицей по цилиндрической поверхности.

В такой постановке и в соответствии с расчленением напряженно-деформированного состояния матрицы [10, 11] решение (в первом приближении) сводится к интегрированию уравнения для волокна

$$(2.1)\qquad d^2w_1/dz^2 = (P_0\delta(z) - \tau(z))/EF$$

и приближенного уравнения равновесия матрицы

$$(2.2)\qquad \partial^2w/\partial r^2 + (1/r)\partial w/\partial r + \omega^2\partial^2w/\partial z^2 = 0,$$

которому соответствуют граничные условия

$$w_z = 0 \ (z = 0), \ w = w_1 (r = a), \ w = 0 \ (r = b), \tag{2.3}$$

на бесконечности все функции обращаются в нуль. Здесь $E$, $F$ — модуль упругости материала и площадь поперечного сечения волокна; $w(w_1)$ — нормальные (вдоль оси $z$) перемещения матрицы (волокна); $\tau(z) = 2\pi a G w_r|_{r=a}$ — контактное напряжение на единицу длины волокна, подлежащее определению.

После применения cos-преобразования Фурье по координате $z$ к уравнениям и граничным условиям, решения обыкновенного дифференциального уравнения, полученного из (2.2), и вычисления оригиналов находим

$$\tau(z) = \frac{2P_0 g_1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\cos zs}{sf(s) + g_1} ds, \tag{2.4}$$

где $g_1 = \frac{2\pi a G\omega}{EF} = \frac{2G\omega}{Ea}$; $f(s) = \frac{I_0(\omega bs) K_0(\omega as) - I_0(\omega as) K_0(\omega bs)}{I_0(\omega bs) K_1(\omega as) + I_1(\omega as) K_0(\omega bs)}$;

$I_k(x)$, $K_k(x)$ $(k = 0, 1)$ — модифицированные функции Бесселя.

При больших значениях параметра $s$, что соответствует малым значениям координаты $z$, $f(s) \approx 1$, а контактное напряжение $\tau(z)$ выражается следующим образом:

$$\tau(z) = \frac{2P_0 g_1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\cos zs}{s + g_1} ds = -\frac{2P_0 g_1}{\pi} (\cos g_1 z \operatorname{ci} g_1 z + \sin g_1 z \operatorname{si} g_1 z). \tag{2.5}$$

Распределение контактных напряжений (2.5) соответствует решению задачи о вытягивании волокна из полубесконечной матрицы; как и в плоской задаче, имеем логарифмическую особенность при $z = 0$.

При малых $s$, что соответствует большим значениям координаты $z$,

$$f(s) \approx [1 + \varkappa(s)]^{-1} \omega as \ln (b/a), \quad \varkappa(s) = ((\omega as)^2/2) \ln (2/\gamma\omega bs),$$

$\gamma$ — константа Эйлера. При малых $s$ можно пренебречь функцией $\varkappa(s)$ по сравнению с единицей, тогда

$$f(s) \approx \omega as \ln (b/a).$$

В этом случае напряжение (2.4) принимает вид

$$\tau(z) = \frac{2P_0 g_{1*}^2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\cos zs}{s^2 + g_{1*}^2} ds = P_0 g_{1*} e^{-g_{1*} z}, \quad g_{1*}^2 = \frac{g_1}{\omega a \ln \frac{b}{a}} = \frac{2G}{Ea^2 \ln \frac{b}{a}}. \tag{2.6}$$

Формулы (1.6), (2.6) идентичны, однако последняя не соответствует распределению контактных напряжений в дискретном композитном материале.

Таким образом, в пространственной задаче решение, полученное при упрощенном подходе, когда предполагается, что волокна работают только на растяжение, а матрицы — на сдвиг, не соответствует асимптотике точного решения. Поэтому такой упрощенный подход можно считать обоснованным лишь в плоской задаче, причем область применимости его ограничена.

Аналогичные результаты получены при рассмотрении осесимметричной задачи о вытягивании волокна из матрицы, имеющей форму конечного цилиндра $(a \leqslant r \leqslant b, \ 0 \leqslant z \leqslant h)$, боковая поверхность которого $(r = b)$ закреплена.

Как и в плоском случае, вид особого поведения контактных напряжений в окрестности особой линии $r = a$, $z = 0$ устанавливается на основе полных уравнений теории упругости. При этом собственные числа $\lambda$ особого решения оказываются одними и теми же в плоской и пространственной задачах, если идентичны краевые условия на границе волокна.

3. Полученные выше решения для контактных напряжений, которые справедливы каждое в своей зоне области контакта, должны плавно переходить одно в другое. Связь между решениями двух соседних зон может быть установлена следующим образом. В одной из зон решение известно полностью. В решении соседней зоны неизвестным является коэффициент. Требование совпадения решений и их производных позволяет найти неизвестный коэффициент и координату точки сращивания этих двух решений.

Проведем, например, сращивание решения (1.8), которое включает в себя решения (1.7), (1.9), с особым решением в окрестности стыка волокна и матрицы на свободной границе ($x = 0$), когда напряженное состояние волокна в данной окрестности описывается уравнениями плоского напряженного состояния. В этом случае

$$\tau_1(\xi) = A_1\xi^\lambda, \ \tau_2(\xi) = (2P_0/\pi b)g_2\varphi(\xi),$$

где $\varphi(\xi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\pi\beta^{-1}\xi)}{n\,\mathrm{th}\,(2n\pi\beta^{-1}) + 2g_2\beta\pi^{-1}}$; $\xi = \dfrac{x}{b}$; $\beta = \dfrac{h}{b}$; $g_2 = \dfrac{2Gb}{EF}$; $\omega = 2$.

Требуя выполнения условий $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_1' = \tau_2'$, получим

$$A_1 = \frac{2P_0}{\pi b}A_1^*, \ A_1^* = g_2\xi_*^{-\lambda}\varphi(\xi_*).$$

Здесь $\xi_*$ (точка сращивания решений) является корнем уравнения

$$\lambda\varphi(\xi) - \xi\varphi'(\xi) = 0.$$

В частности, при $\lambda = -0{,}4$, $\beta = 1$ для значений $g_2 = 0{,}01$; 0,1; 0,3; 0,5; 0,8; 1,0 находим соответственно следующие значения $\xi_*$ и $A_1^*$: $\xi_* = 0{,}026$; 0,024; 0,02; 0,019; 0,017; 0,015; $A_1^* = 0{,}006$; 0,056; 0,157; 0,248; 0,368; 0,441. При $\beta = 2$ и тех же значений $\lambda$ и $g_2$ имеем $\xi_* = 0{,}053$; 0,045; 0,037; 0,029; 0,022; 0,021; $A_1^* = 0{,}008$; 0,072; 0,191; 0,291; 0,418; 0,493.

Аналогично проводится сращивание решений в случае осесимметричной задачи.

*Поступила 20 III 1981*

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Михайлов А. М.** О разрушении однонаправленного стеклопластика.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5.
2. **Михайлов А. М.** Трещина сдвига в однонаправленном стеклопластике.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 1.
3. **Овчинский А. С., Копьев И. М. и др.** Перераспределение напряжений при разрыве хрупких волокон в металлических композиционных материалах.— Механика полимеров, 1977, № 1.
4. **Маневич Л. И., Павленко А. В.** К решению контактных задач теории упругости для ортотропной полосы с учетом сил трения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 6.
5. **Маневич Л. И., Павленко А. В.** Передача продольной динамической нагрузки, действующей на ребра жесткости, к упругой ортотропной пластине.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2.
6. **Павленко А. В.** Плоская задача теории упругости для пластинок с криволинейной анизотропией.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3.
7. **Маневич Л. И., Павленко А. В.** О характере особенности контактных напряжений при передаче нагрузки от стержня к полубесконечной упругой пластине.— В кн.: Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск, 1979.
8. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
9. **Штернберг Э.** Передача нагрузки и диффузия нагрузки в статике упругого тела.— Сб. пер. Механика, 1972, № 6.
10. **Маневич Л. И., Павленко А. В.** Пространственная задача теории упругости для анизотропных сред.— В кн.: Всесоюз. конф. по теории упругости. Тезисы докл. Ереван, 1979.
11. **Воробьева Н. И., Коблик С. Г., Маневич Л. И.** Осесимметричная контактная задача с учетом сцепления и скольжения.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3.