ОБ УПЛОТНЕНИИ ГРУНТОВ ПОД НАГРУЗКОЙ

Н. Н. Веригин

(Москва)

В теории консолидации грунтовой массы Терцаги — Герсеванова [1], а также в теории уплотнения грунтов В. А. Флорина [2] принимается, что внешняя нагрузка на водонасыщенный грунт вначале передается воде, причем давление в ней распространяется мгновенно, сразу достигая своей предельной величины (т. н. первая стадия). Лишь после такого мгновенного перераспределения давления воды в грунте возникает фильтрация, в процессе которой вода отжимается к внешним дренам, давление постепенно передается скелету грунта и происходят его деформации, возрастающие со временем (вторая стадия). Между тем в теории фильтрации жидкости в упругой (или линейно-деформируемой) пористой среде [4,5] доказывается, что при изменении напора на внешних границах среды давление в воде распространяется постепенно, по мере развития упругих деформаций твердой и жидкой фаз. Эксперименты также показывают, что при приложении к водонасыщенному грунту внешней нагрузки давление воды внутри него сначала возрастает, достигает максимума и затем уменьшается до некоторой постоянной величины, зависящей от условий дренажа [7].

Для описания уплотнения грунта под нагрузкой и выявления экстремального характера изменения порового давления со временем необходимо исходить из того, что при приложении нагрузки давление передается одновременно жидкой и твердой фазам водонасыщенного грунта, и обе указанные выше стадии нужно рассматривать совместно как единый процесс уплотнения грунта. Для такого описания явления необходимы иные краевые условия, принципиально отличающиеся от обычно принимаемых в теории грунтовой массы. Именно, начальные условия должны соответствовать состоянию среды до приложения нагрузки, а не после ее приложения и мгновенного изменения давления в воде. Кроме того, при строгой постановке задачи в плоскости приложения нагрузки, являющейся перемещающейся внешней границей, должны приниматься особые динамические и кинематические условия, определяющие характер изменения напора на ней и скорость перемещения этой границы.

Рассмотрим уплотнение слоя грунта толщиною m, лежащего на жестком основании и нагруженного равномерной нагрузкой $q = \text{const}$ (плоскость приложения нагрузки считается непроницаемой). В этом случае задача ставится следующим образом: требуется найти напор $h(y, t)$ (или поровое давление $p = \gamma h(y, t)$), удовлетворяющий уравнению и начальному условию

$$a\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial h}{\partial t}, \qquad h(y, 0) = 0 \tag{1}$$

при условиях в плоскости приложения нагрузки (по подошве фундамента) $y = s(t)$

$$-k\int_0^t \frac{\partial h[s(t), t]}{\partial y}\,dt = ns(t), \qquad s(t) = \frac{q - \gamma h(s, t)}{E}\,m \tag{2}$$

В этих уравнениях a — пьезопроводимость сжимаемого слоя грунта, k — его коэффициент фильтрации, E — модуль сжимаемости, n — начальная пористость, γ — объемный вес воды, $s(t)$ — осадка поверхности грунта (подошвы фундамента).

На подошве жесткого слоя $y = m$ граничное условие зависит от его проницаемости (коэффициента фильтрации k_0). При $k_0 = \infty$ и $k_0 = 0$ соответственно имеем

$$h(m, t) = 0, \qquad \frac{\partial h(m, t)}{\partial y} = 0$$

При одинаковой проницаемости упругого и жесткого слоя ($k = k_0$)

$$h(\infty, t) = 0 \tag{3}$$

Первое из условий (2) выражает равенство между объемом воды, вытесненной подошвой фундамента за время t, и объемом воды, помещавшейся в начальный момент времени $t = 0$ в порах грунта в пределах слоя высотой $s(t)$. Второе из условий (2) выражает линейную зависимость между осадкой s и давлением на скелет грунта в плоскости приложения нагрузки, равным $q - \gamma h$.

После дифференцирования соотношений (2) по t имеем

$$\frac{k}{C}\frac{\partial h(s, t)}{\partial y} = \frac{\partial h(s, t)}{\partial t} - \frac{n}{C}\frac{ds}{dt}, \qquad C = \frac{\gamma m}{E}n \tag{4}$$

где C — упругоемкость грунта.

Ввиду малости s эти условия можно несколько смягчить, приняв в (4) $s \approx 0$. Тогда вместо двух условий получим одно

$$\frac{k}{C}\frac{\partial h(0, t)}{\partial y} = \frac{\partial h(0, t)}{\partial t} \tag{5}$$

Это допущение означает, что при решении задачи о распространении порового давления в грунте осадка фундамента s, как и в теории Терцаги — Герсеванова, не учитывается. Она определяется уже после решения задачи из второго уравнения (2) при $h(s, t) = h(0, t)$. Интегрируем (1) при условиях (3) и (5). Вводя изображение Лапласа в форме

$$H(y, p) = \int_0^\infty h(y, t)\, e^{-pt}\, dt \tag{6}$$

найдем для него решение уравнения (1)

$$H(y, p) = A \exp\left(y \sqrt{\frac{p}{a}}\right) + B \exp\left(-y \sqrt{\frac{p}{a}}\right) \tag{7}$$

Граничные условия (5) и (3) для изображения H будут

$$\frac{k}{C} \frac{\partial H(0, p)}{\partial y} = pH(0, p) - \frac{q}{\gamma}, \qquad H(\infty, p) = 0 \tag{8}$$

Подставляя (7) в (8), найдем

$$A = 0, \qquad B = \frac{q}{\gamma} \frac{1}{p + (k/C)\sqrt{p/a}}$$

и потому

$$H(y, p) = \frac{q}{\gamma} \frac{\exp(-y\sqrt{p/a})}{\sqrt{p}\,[\sqrt{p} + (k/C\sqrt{a})]} \tag{9}$$

Переходя к оригиналу, получаем [6]

$$h = \frac{q}{\gamma} \exp(\beta + \delta^2) \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{2\delta} + \delta\right) \qquad \left(\delta = \frac{k}{C}\sqrt{\frac{t}{a}},\ \beta = \frac{ky}{aC}\right) \tag{10}$$

Из этого уравнения следует, что напор h в любом сечении грунта с увеличением t возрастает от нуля до некоторого максимума, а затем уменьшается до нуля при $t \to \infty$.

Время достижения максимального напора определится из условия

$$\frac{\partial h}{\partial \delta} = \frac{q}{\gamma} \exp(\beta + \delta^2) \left[2\delta \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{2\delta} + \delta\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\beta}{2\delta^2} - 1\right) \exp - \left(\frac{\beta}{2\delta} + \delta\right)^2\right] = 0 \tag{11}$$

Полагая здесь

$$\frac{\beta}{2\delta} + \delta = u \quad \text{или} \quad \delta = \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 - 2\beta}) \tag{12}$$

$$\sqrt{\pi}\, u \operatorname{erfc}(u) \exp(u^2) = v \tag{13}$$

получим

$$v = \left(1 - \frac{\beta}{2\delta^2}\right) \frac{u}{\delta} = 4u \frac{\sqrt{u^2 - 2\beta}}{(u + \sqrt{u^2 - 2\beta})^2}$$

Отсюда

$$\beta = 2 \left(\frac{u}{v}\right)^2 \sqrt{1 - v}\,(1 - \sqrt{1 - v})^2 \tag{14}$$

Из этого уравнения при заданном β находится u, затем по (12) определяется δ и по (10) — время t, соответствующее $h_{\text{макс}}$. На фиг. 1 показаны кривые $\gamma h/q = f(\beta, \delta)$ по (10) и кривая $\delta = f(\beta)$ по (12)—(14).

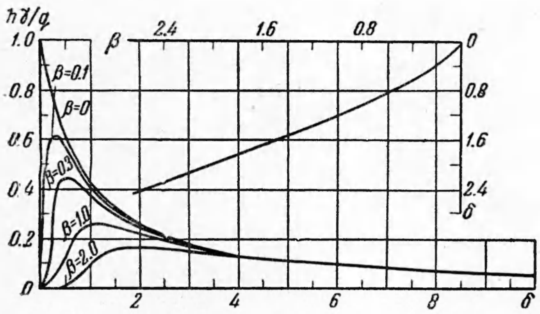
Осадка фундамента s согласно (2) будет

$$s = \frac{q - \gamma h(0, t)}{E} m = \frac{q}{E} mF(\delta), \qquad F(\delta) = 1 - \exp(\delta^2) \operatorname{erfc}(\delta) \tag{15}$$

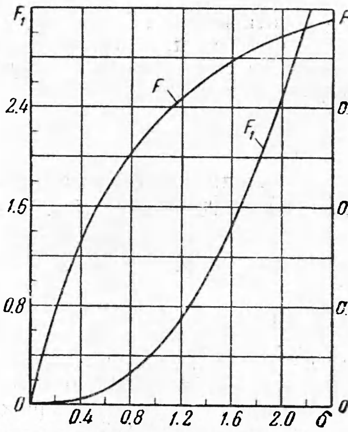
При $t = 0$ осадка $s = 0$, а при $t \to \infty$ величина $s \to qm/E$. По существующей теории величина s оказывается значительно большей, чем по формуле (15). Значения $F(\delta)$ приводятся на фиг. 2. При $u \geqslant 1.8$ и $\delta \geqslant 1.8$ из (10) и (15) имеем

$$h \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{q}{\gamma} \frac{1}{(\beta/2\delta + \delta)}, \qquad s \approx \frac{q}{En}\left(1 - \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}}\right) = \frac{q}{E} m \left(1 - \frac{\gamma mn}{Ek}\sqrt{\frac{a}{\pi t}}\right) \tag{16}$$

При помощи формул (10) и (15) удобно определять константы уплотнения a, E, k по данным компрессионных испытаний грунта. Так, например, зная перемещения s_1 и s_2 для моментов времени t_1 и t_2, из (15) можно найти $\alpha = k/C\sqrt{a}$ и E. Зная для одного из этих моментов времени напор h на подошве образца (при $y = m$), из (10) нетрудно вычислить $\beta = km/aC$ и затем найти a и k



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассмотрим еще случай, когда внешняя нагрузка возрастает с постоянной скоростью v и равна $q = vt = q_0 t/t_0$, где t_0 — время приложения нагрузки и q_0 — ее максимальная величина.

В этом случае условие на подошве фундамента будет

$$-k\int_0^t \frac{\partial h(0,t)}{\partial y}\,dt = \frac{1}{E}\left[q_0\frac{t}{t_0} - \gamma h(0,t)\right]mn$$

или

$$\frac{k}{C}\frac{\partial h(0,t)}{\partial y} = \frac{\partial h(0,t)}{\partial t} - \frac{q_0}{t_0\gamma} \tag{17}$$

Условия (1) и (3) остаются теми же. В изображениях Лапласа уравнение (17) имеет вид

$$\frac{k}{C}\frac{\partial H(0,p)}{\partial y} = pH(0,p) - \frac{q_0}{t_0\gamma p}$$

Подставляя в это уравнение выражение (7) и учитывая второе из равенств (8), получим

$$B = \frac{q_0}{t_0\gamma}\frac{1}{(\sqrt{p} + k/C\sqrt{a})\,p\sqrt{p}}, \qquad A = 0$$

и поэтому вместо (9) будет

$$H(y,p) = \frac{q_0}{t_0\gamma}\frac{1}{p\sqrt{p}\,\left(\sqrt{p} + \dfrac{k}{C\sqrt{a}}\right)}\exp\left(-y\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \tag{18}$$

откуда оригинал равен

$$h = \frac{q_0}{t_0\gamma}\left(\frac{C}{k}\right)^2 a\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\delta\exp\left(-\frac{\beta^2}{4\delta^2}\right) - (1+\beta)\operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{2\delta}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp(\beta+\delta^2)\operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{2\delta} + \delta\right)\right] \tag{19}$$

где β, δ и C выражаются по предыдущему. Осадка фундамента будет

$$s = \frac{q_0 m}{Et_0}\left(\frac{C}{k}\right)^2 aF_1(\delta), \quad F_1(\delta) = \left[\delta\left(\delta - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) - \exp(\delta^2)\operatorname{erfc}(\delta) + 1\right] \tag{20}$$

При $t = 0$ величина $s = 0$, а при $t \to t_0$ она достигает максимальной величины. Отметим, что коэффициент a зависит от сжимаемости, пористости и проницаемости грунта, а также от вязкости, плотности и сжимаемости воды. При наличии в воде окклюдированного воздуха, пренебрегая его растворимостью в жидкости, имеем

$$a = \frac{k}{\gamma\left[\frac{n}{E'}(1-\zeta_0)+\frac{n\zeta_0}{p_0}\right]}, \qquad k = \frac{c}{\mu}\gamma \tag{21}$$

где ζ_0— отношение объема воздуха к объему пор грунта при атмосферном давлении p_0, c — фазовая проницаемость грунта для воды, n — начальная пористость грунта, E'— модуль сжимаемости воды, μ и γ — вязкость и удельный вес воды. Проницаемость c выражается так:

$$c = c_0(1-n)^2\frac{(1-\zeta_0)^3}{[1-n(1-\zeta_0)]^2} \tag{22}$$

где c_0— проницаемость грунта при полном заполнении его пор водой ($\zeta_0 = 0$). В случае $\zeta_0 = 0$ коэффициент a выражается формулой М. Маскета [5]

Поступила 3 VIII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Герсеванов Н. М. Основы динамики грунтовой массы. ОНТИ, М.— Л., 1937.
2. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс. Стройиздат, 1948.
3. Флорин В. А. Основы механики грунтов, т. 1. Госстройиздат, 1959.
4. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. Гостоптехиздат, 1959.
5. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
6. Диткин В. А. и Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. ГИТТЛ, 1951.
7. Павилонский В. М. Экспериментальные исследования порового давления в глинистых грунтах. Изд. ВОДГЕО, 1959.

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

В. Ю. Ким

(Харьков)

1. Точный способ определения дебита скважины при неустановившейся фильтрации жидкости к скважине известен только для постоянного забойного давления. Для переменного забойного давления можно воспользоваться понятием приведенного радиуса влияния скважины при неустановившейся фильтрации и выразить дебит при помощи обычных формул для установившегося движения

$$Q_1 = \frac{2\pi kh(p_k - p_c)}{\mu \ln(R_1/R_c)}, \qquad Q_2 = \frac{4\pi kR_c(p_k - p_c)}{\mu(1 - R_c/R_2)} \tag{1.1}$$

где R_c— радиусы скважин; k — проницаемость; μ — динамическая вязкость жидкости; b — мощность пласта; $(p_k - p_c)$ — перепад давления; $R_1(t)$ и $R_2(t)$ — приведенные радиусы влияния скважин в задачах с осевой и центральной симметрией.

Таким образом, задача сводится к определению приведенных радиусов влияния скважин.

2. Рассмотрим некоторую область, ограниченную двумя изобарическими поверхностями. Будем полагать, что приведенный радиус влияния скважин в задачах с осевой и центральной симметрией R_1, R_2 является некоторой функцией приведенного радиуса R_0 плоской одномерной задачи

$$R_S = f(R_0) \qquad (S = 1, 2) \tag{2.1}$$

В некоторых случаях эту зависимость удается найти в явной форме.

Практически наибольший интерес представляет нахождение приведенного радиуса влияния в задаче с осевой симметрией (скважина) в условиях неустановившейся фильтрации жидкости или газа в течение первой фазы.

В замкнутой форме простые точные решения известны лишь для плоской задачи и с центральной симметрией. Применение специальных приближенных методов решения нестационарных задач [1] к задаче определения дебита скважины с заданным забойным давлением не приводит к простым результатам в силу неавтомодельности решения. Для определения функциональной зависимости (2.1) рассмотрим кольцевую область, заключенную между двумя изобарическими границами, и будем приближенно полагать, что в этой области приведенный радиус меняется со временем по закону, соответствующему плоскому одномерному течению (см. фигуру)