

**НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ГАЗА
В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ**

А. Л. Генкин, Л. А. Кудряшова

(Ленинград)

Рассматривается неустановившееся течение вязкой нетеплопроводной низкотемпературной плазмы в канале постоянного сечения. Решение строится методом малого параметра, за который принято магнитное взаимодействие N .

Исследованию нестационарных течений вязкой нетеплопроводной плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях посвящены работы [1-3]. В работе [1] исследовано течение плазмы с бесконечной проводимостью, а в работах [2,3] — неизотропические течения в МГД-каналах в сильных электромагнитных полях.

Рассмотрим одномерное неустановившееся движение вязкого нетеплопроводного, электропроводящего газа, характеризующееся малым магнитным числом Рейнольдса ($R_m \ll 1$), в канале постоянного сечения МГД преобразователя энергии.

В этом случае система безразмерных уравнений магнитной газовой динамики имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} &= 0, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} - NjB \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) &= \frac{\partial p}{\partial t} - NjU \quad (1) \\ j &= \sigma(vB - U), \quad \sigma = \sigma(p, \rho), \quad N = \sigma_0 L B_0^2 / \rho_0 v_0 \end{aligned}$$

Здесь N — параметр магнитного взаимодействия. Безразмерные величины, входящие в систему уравнений (1), введены при помощи соотношений

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{L}, \quad y = \frac{y'}{L} = 1, \quad b = \frac{b'}{L}, \quad l = \frac{l'}{L}, \quad v = \frac{v'}{v_0} \\ \rho &= \frac{\rho'}{\rho_0}, \quad p = \frac{p'}{\rho_0 v_0^2}, \quad t = \frac{t' v_0}{L}, \quad B = \frac{B'}{B_0}, \quad \sigma = \frac{\sigma'}{\sigma_0} \quad (2) \\ T &= T'/T_0, \quad j = j'/\sigma_0 v_0 B_0, \quad U = U'/L B_0 v_0, \quad R = R'/\sigma_0 L \end{aligned}$$

Здесь R — омическое сопротивление нагрузки, а остальные обозначения общепринятые; индексом 0 обозначены величины на входе в канал.

В общем случае система уравнений (1) должна быть дополнена соотношениями, характеризующими компрессор, выходной газовой тракт за каналом, а также соотношением между полным током I и напряжением на нагрузке.

В данной работе ограничимся рассмотрением системы (1), а в качестве начальных и граничных условий примем, что

$$\begin{aligned} p &= p(x), \quad v = v(x), \quad \rho = \rho(x) \quad \text{при } t = 0 \\ p &= F_1(t), \quad \rho = F_2(t) \quad \text{при } x = 0; \quad p = F_3(t) \quad \text{при } x = l \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь $p(x)$, $v(x)$, $\rho(x)$ — решения стационарной задачи, а $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ — заданные функции¹.

Если приложенное магнитное поле постоянно $B = \text{const}$, то напряжение U в случае сплошных электродов — функция только времени $U = U(t)$. Если же изменяется магнитное поле $B = B(t)$, напряжение на электродах $U(t)$, зависящее как от сопротивления нагрузки R , так и от магнитного поля, не может быть задано в виде произвольной функции времени.

При помощи уравнения движения преобразуем уравнение энергии и, воспользовавшись законом Ома, исключим из системы уравнений (1) плотность электрического тока. После этих преобразований система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, & \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= -N\sigma B(vB - U) \\ v \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} - k \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - k \frac{p}{\rho} v \frac{\partial \rho}{\partial x} &= N(k-1)\sigma(vB - U)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma = \sigma(p, \rho)$$

В систему уравнений (4) входит параметр N , малый во многих практически интересных случаях ($N < 1$). Поэтому решение будем искать в виде разложения неизвестных функций в ряды по возрастающим степеням малого параметра N [4]

$$z = z_0(x, t) + Nz_1(x, t) + N^2z_2(x, t) + \dots \quad (5)$$

где $z = p, \rho, v$; $z_1 = p_1, \rho_1, v_1, \dots$, а $z_0(x, t)$ — решение нестационарной задачи при отсутствии электрического и магнитного полей.

Рассмотрим частный случай течения в канале, когда параметры газа на входе и выходе из канала не зависят от времени, т. е. F_1, F_2, F_3 из граничных условий (3) постоянны. Тогда

$$p_0(x, t) = p_0 = \text{const}, \quad \rho_0(x, t) = 1, \quad v_0(x, t) = 1$$

Подставляя разложения (5) в систему (4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра N , получим ряд линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка для определения функций z_1, z_2, \dots, z_n . Для функции z_1 получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial x} &= -\sigma B(B - U) \\ \frac{\partial}{\partial t}(p_1 - kp_0\rho_1) + \frac{\partial}{\partial x}(p_1 - kp_0\rho_1) &= \sigma(k-1)(B - U)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sigma = \sigma(p, \rho)$$

Для функций z_n может быть получена аналогичная система уравнений, в правую часть которой, кроме заданных функций U и B , войдут функции z_1, \dots, z_{n-1} и их производные, что позволяет решать полученные системы уравнений последовательно.

При помощи линейного преобразования неизвестных функций [5]

$$p_1 = a_0(w_2 - w_1), \quad v_1 = w_2 + w_1, \quad \rho_1 = a_0^{-1}(w_2 - w_1) - a_0^{-2}w_3 \quad (7)$$

¹ Вид граничных условий зависит от рассматриваемой задачи. Может быть, например, задан расход газа $G = G(t)$, т. е. связь между скоростью и плотностью, или давление торможения, т. е. связь между давлением, скоростью и плотностью, или другие соотношения между параметрами газа на входе и выходе из канала.

приведем систему уравнений к каноническому виду

$$\partial w_i / \partial t + \lambda_i \partial w_i / \partial x = f_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8)$$

$$f_1 = -\frac{\sigma(B-U)}{2} \left[\frac{k-1}{a_0} (B-U) + B \right], \quad f_2 = \frac{\sigma(B-U)}{2} \left[\frac{k-1}{a_0} (B-U) - B \right]$$

$$f_3 = \sigma(k-1)(B-U)^2$$

$$\lambda_1 = 1 - a_0, \quad \lambda_2 = 1 + a_0, \quad \lambda_3 = 1 \quad (a_0 = \sqrt{k}p_0)$$

Здесь a_0 — скорость звука на входе в канал. Так как все λ_i — действительные числа, то система уравнений (8) — гиперболическая, и через каждую точку плоскости xt проходят три действительные характеристики (фиг. 1), которые определяются уравнениями

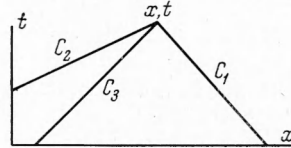
$$dx/dt = 1 - a_0 \quad (C_1), \quad dx/dt = 1 + a_0 \quad (C_2), \quad dx/dt = 1 \quad (C_3) \quad (9)$$

Система дифференциальных уравнений (8) сводится к системе интегральных уравнений [6]

$$w_i(x, t) = w_i(x_i, 0) + \int_{C_i} f_i dt \quad (10)$$

или

$$w_i(x, t) = w_i(0, t_i) + \int_{C_i} f_i dt$$



Фиг. 1

Здесь C_i — часть соответствующей характеристики от точки (x, t) до ее пересечения в некоторой точке $(x_i, 0)$ или $(0, t_i)$ с осями x или t соответственно (фиг. 1). Функции $w_i(x_i, 0)$ или $w_i(0, t_i)$ определяются из начальных или граничных условий.

Если электропроводность газа $\sigma = \text{const}$, а заданная функция $U(t)$ — аналитическая, то система уравнений (10) интегрируется, что и решает поставленную задачу, так как функции p, ρ и v находятся при помощи соотношений (7) и (5).

В тех случаях, когда изменением электропроводности пренебречь нельзя, система интегральных уравнений (10) решается методом последовательных приближений, в котором за нулевое приближение принимается электропроводность $\sigma(x)$, полученная из решения стационарной задачи. Для решения системы дифференциальных уравнений (8) можно также воспользоваться методом конечных разностей [5].

В качестве примера расчета рассмотрим случай, когда магнитное поле B и электропроводность σ постоянны, а напряжение на электродах изменяется по линейному закону

$$U = U_0 + at \quad (11)$$

Примем, что на входе в канал давление и плотность (температура) газа постоянны, на выходе из канала задано постоянное давление торможения, равное давлению торможения p_* при $U = U_0$.

Из принятых и общих (3) граничных условий, используя разложение (5) и принимая во внимание, что

$$p_* = p + 1/2 \rho v^2 (1 + 1/4 \rho v^2 / kp) \quad (12)$$

получим граничные условия для рассматриваемого случая в виде

$$p_1 = 0, \quad \rho_1 = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad p_{1*} = \beta p_1 + \delta \rho_1 + \gamma v_1 \quad \text{при } x = l \quad (13)$$

$$p_1 = p_1(x), \quad v_1 = v_1(x), \quad \rho_1 = \rho_1(x) \quad \text{при } t = 0$$

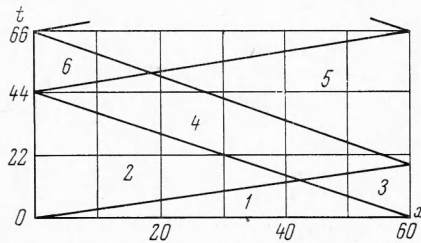
где $p_1(x)$, $\rho_1(x)$, $v_1(x)$ получены из решения стационарной задачи при $U = U_0$, и введены обозначения

$$\beta = 1 - \frac{1}{8a_0^2 p_0}, \quad \delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{4a_0^2}, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{2a_0^2}$$

Из (7) следует, что

$$w_1 = \frac{1}{2} \left(v_1 - \frac{p_1}{a_0} \right), \quad w_2 = \frac{1}{2} \left(v_1 + \frac{p_1}{a_0} \right), \quad w_3 = p_1 - a_0^2 \rho_1 \quad (14)$$

Отсюда при помощи (13) несложно найти начальные и граничные условия для функции w_3 и начальные условия для w_1 и w_2 . Граничные условия для w_1 и w_2 определяются сложнее. На фиг. 2 представлены области, образованные семействами характеристик C_1 и C_2 в плоскости xt .



Фиг. 2

После интегрирования уравнений (10) во всей интересующей нас области, используя (7) и (5), найдем $v(x, t)$, $p(x, t)$, $\rho(x, t)$, вычислим полный электрический ток, сопротивление нагрузки и расход газа по формулам

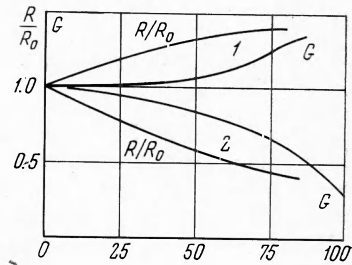
$$\dot{i}(t) = b \int_0^l j(x, t) dx, \quad G(x, t) = \rho(x, t) v(x, t)$$

$$R(t) = U(t) \left\{ b \int_0^l [v(x, t) - U(t)] dx \right\}^{-1}$$

На фиг. 3 представлены результаты расчетов для двух случаев изменения напряжения на электродах $U_0 = 0.5$, кривые 1 при $\alpha_1 = 0.003$, кривые 2 при $\alpha_2 = -0.004$. Характерные размеры канала и параметры газа, использованные в (2), равны соответственно:

$$L = 0.05 \text{ м}, \quad b' = 0.05 \text{ м}, \quad l' = 3 \text{ м}, \quad v_0' = 434 \text{ м/сек}^{-1}, \quad T_0' = 3023^\circ \text{ К}, \quad B_0' = 1.5 \text{ вб/м}^{-2}, \\ \sigma_0' = 100 \text{ ом}^{-1}/\text{м}^{-1}, \quad p' = 10^6 \text{ нм}^{-2}, \quad U_0' = 16.2 \text{ в}, \quad N = 0.0225$$

Как видно из фигур, для получения линейного изменения напряжения необходимо существенно нелинейное изменение внешней нагрузки, расход газа через канал при этом изменяется также нелинейно. Полученные результаты показывают, что при линейном изменении напряжения на электродах от U_0 до U и возвращении от U к U_0 по тому же закону имеет место явление гистерезиса, т. е. одному и тому же значению напряжения соответствуют разные значения скорости, давления, расхода газа и снимаемой мощности.



Фиг. 3

Поступила 23 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Калихман Л. Е. Элементы магнитной газодинамики. Атомиздат, 1964.
2. Бамзеликович Г. М. Решение некоторых задач об одномерном установившемся движении проводящего газа под действием сильных электрических полей. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
3. Бамзеликович Г. М. Одномерное неустановившееся движение проводящего газа под действием сильных электромагнитных полей. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 2.
4. Высоцкая И. В., Генкин А. Л., Жуковский М. И. Двумерное течение идеального проводящего газа в скрещенных электрическом и магнитном полях. ПМТФ, 1965, № 5.
5. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Физматгиз, 1961.
6. Курант Р. Уравнения с частными производными. Изд. «Мир», 1964.