УДК 512.643

Классификация вещественных пар коммутирующих теплицевых и ганкелевых матриц*

В.Н. Чугунов[1], Х.Д. Икрамов[2]

[1]Институт вычислительной математики Российской академии наук, ул. Губкина, 8, Москва, 119333

[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, ГСП-1, Москва, 119991

E-mails: chugunov.vadim@gmail.com (В.Н. Чугунов), ikramov@cs.msu.su (Х.Д. Икрамов)

Чугунов В.Н., Икрамов Х.Д. Классификация вещественных пар коммутирующих теплицевых и ганкелевых матриц // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 4. — С. 457–467.

Дано полное описание пар матриц (T, H) таких, что T — вещественная теплицева матрица, H — вещественная ганкелева матрица и $TH = HT$.

DOI: 10.15372/SJNM20160409

Ключевые слова: *теплицева матрица, ганкелева матрица, циркулянт, косой циркулянт, перестановочность.*

Chugunov V.N., Ikramov Kh.D. Classification of real pairs of commuting Toeplitz and Hankel matrices // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 4. — P. 457–467.

We give a complete description of the set of matrix pairs such that T is a real Toeplitz matrix, H is a real Hankel matrix, and $TH = HT$.

Keywords: *Toeplitz matrix, Hankel matrix, circulant, skew-circulant, commutativity.*

1. Введение

Теплицевой называется $n \times n$-матрица T, имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

а *ганкелевой* называется $n \times n$-матрица H вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-11-00806).

Теплицева матрица (1) называется *циркулянтом*, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

косым циркулянтом при

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

и ϕ-*циркулянтом* при

$$t_{-j} = \phi\, t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Символом $\mathcal{P}_n$ будем обозначать матрицу:

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix},$$

называемую перъединичной матрицей порядка n. Умножение теплицевой матрицы (1) слева или справа на $\mathcal{P}_n$ приводит к ганкелевым матрицам, и всякая ганкелева матрица может быть представлена в виде такого произведения. Будем называть матрицу (2) *ганкелевым циркулянтом, косым циркулянтом* или ϕ-*циркулянтом*, если теплицева матрица T в соотношении

$$H = T\mathcal{P}_n$$

является соответственно циркулянтом, косым циркулянтом или ϕ-циркулянтом.

Условия, при которых теплицевы матрицы T_1 и T_2 коммутируют, известны, по крайней мере, с 1998 г. (см. [1]). Эти условия, полученные как для комплексного, так и для вещественного случая, тесно связаны с задачей об описании нормальных теплицевых матриц, решенной авторами примерно в то же время (см. [2]) и привлекшей большое внимание в алгебраической литературе, что выразилось в появлении ряда ее решений, отличающихся от первоначального [3–6].

В цикле работ [7–12], выполненных в период с 1997 по 2010 гг., авторы дали решение значительно более трудной задачи классификации нормальных ганкелевых матриц. Эта задача эквивалентна проблеме описания пар коммутирующих вещественных ганкелевых матриц. Опираясь на это описание, В.И. Гельфгат сформулировал в [13] условия перестановочности пары комплексных ганкелевых матриц H_1 и H_2.

Отметим, что для каждой из упомянутых выше задач решение представляло собой полный список классов матриц или пар матриц, обладающих требуемым свойством.

Задача о коммутировании теплицевой и ганкелевой матриц, заключающаяся в описании пар матриц (T, H), где T — теплицева, а H — ганкелева матрицы и

$$TH = HT, \tag{3}$$

была до сих пор решена лишь в комплексном случае. Вещественный вариант этой задачи, рассматриваемый в предлагаемой работе, есть последнее звено, необходимое для теоретического закрытия проблематики перестановочных пар, составленных из теплицевых и/или ганкелевых матриц. В то же время задача имеет и определенное прикладное значение. Напомним, что $(T+H)$-матрицами (в английской терминологии — Toeplitz-plus-Hankel matrices) называются матрицы, представимые в виде суммы теплицевой и ганкелевой матриц. Если в вещественной паре (T, H) матрицы коммутируют и теплицева матрица T нормальна, то нормальной будет и $(T+H)$-матрица

$$R = T + iH. \tag{4}$$

Хорошо известно, что нормальные матрицы идеально обусловлены по отношению к задаче вычисления собственных значений. К тому же представление (4) позволяет и большую экономию вычислительной работы. В самом деле, если H имеет простой спектр, то, приводя эту симметричную матрицу к диагональному виду, мы заодно диагонализуем перестановочную с ней матрицу T. В результате диагональной становится и вся $(T+H)$-матрица R. (В этом случае исходная матрица R необходимо является (комплексной) симметричной.) Диагонализация симметричной матрицы посредством QR-алгоритма обходится (по меньшей мере) в 10 раз дешевле, чем вычисление собственных значений несимметричной матрицы. К этому следует добавить экономию, проистекающую от замены комплексной арифметики, необходимой для обработки комплексной матрицы R, вещественной арифметикой при раздельной работе с вещественными матрицами H и T.

Эта технология раздельной работы с H и T сохраняет смысл и в том случае, если H имеет кратные собственные значения. Теперь диагонализация H приводит лишь к блочной диагонализации матрицы T. Порядки ее диагональных блоков равны кратностям собственных значений матрицы H. Вычислив собственные значения каждого блока и скомбинировав их с соответствующими собственными значениями H, получим собственные значения всей матрицы R.

По существу, содержанием данной статьи является выделение вещественных пар во множестве решений комплексной задачи о перестановочных парах теплицевых и ганкелевых матриц. Приведем поэтому полное описание комплексных решений, для чего потребуется напомнить некоторые вспомогательные факты.

Согласно [14], для всякого циркулянта C справедливо спектральное разложение вида

$$C = F_n^* D F_n, \tag{5}$$

где $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — диагональная матрица, F_n — (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \ldots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \ldots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \ldots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

и $\epsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ — первообразный корень n-й степени из единицы.

Если S — косой циркулянт, то спектральное разложение приобретает вид:

$$S = G_{-1} F_n^* D F_n G_{-1}^*, \tag{6}$$

где

$$G_{-1} = \operatorname{diag}(1, \psi, \psi^2, \ldots, \psi^{n-1})$$

и ψ — корень n-й степени из (-1) вида $\psi = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

Решения задачи о коммутировании теплицевой и ганкелевой матриц в комплексном случае описываются следующей теоремой (см. [15–17]).

Теорема 1. *Ненулевые теплицева матрица T и ганкелева матрица H порядка n коммутируют тогда и только тогда, когда T и H входят хотя бы в один из перечисляемых ниже классов.*

Класс 1. Матрица T — скалярная, а H — произвольная ганкелева матрица.

Класс 2. Матрицы T и H имеют вид:

$$
\begin{aligned}
T &= A,\\
H &= \alpha\mathcal{P}_n + \beta A\mathcal{P}_n,
\end{aligned}
$$

здесь A — произвольная симметричная теплицева матрица, α и β — произвольные комплексные числа.

Класс 3. Матрицы T и H имеют вид:

$$
\begin{aligned}
T &= t_0 I_n + (1+\alpha)L + (1-\alpha)L^\top,\\
H &= \beta(L + L^\top)\mathcal{P}_n,
\end{aligned}
$$

здесь L — нижнетреугольная теплицева матрица, имеющая нули в первом столбце в позициях $1, 2, \ldots, \lceil n/2 \rceil$; α и β — комплексные числа.

Класс 4. Матрица T является циркулянтом

$$C_1 = {F_n}^* D_1 F_n,$$

а H — ганкелевым циркулянтом

$$C_2 = {F_n}^* D_2 F_n \mathcal{P}_n,$$

здесь $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ — диагональные матрицы; при этом

$$d_j^{(2)}\left(d_j^{(1)} - d_{n+2-j}^{(1)}\right) = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Класс 5. Матрица T является косым циркулянтом

$$S_1 = G_{-1} {F_n}^* D_1 F_n G_{-1}^*,$$

а H — ганкелевым косым циркулянтом

$$S_2 = G_{-1} {F_n}^* D_2 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n.$$

Диагональные матрицы $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ должны удовлетворять соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&d_1^{(2)}\big(d_1^{(1)} - d_2^{(1)}\big) = 0,\\
&d_2^{(2)}\big(d_2^{(1)} - d_1^{(1)}\big) = 0,\\
&d_j^{(2)}\big(d_j^{(1)} - d_{n+3-j}^{(1)}\big) = 0, \quad j = 3, 4, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Класс 6. Порядок n есть четное число. Матрица T является линейным многочленом от кососимметричного и инволютивного косого циркулянта S:

$$T = t_0 I_n + \alpha S.$$

Матрица H задается формулой:

$$H = \beta\left(C - S^{-1}CS\right)\mathcal{P}_n,$$

где C — циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S. Как и выше, α и β — произвольные комплексные числа.

Класс 7. Матрицы T и H задаются формулами:

$$\begin{aligned} T &= \alpha\left(C_1 + S - C^{-1}SC\right), \\ H &= \beta C\mathcal{P}_n, \end{aligned}$$

здесь C — симметричный инволютивный циркулянт, S — косой циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы C, C_1 — симметричный циркулянт, α и β — произвольные комплексные числа.

Класс 8. Матрицы T и H задаются формулами:

$$\begin{aligned} T &= \alpha\left(S_1 + C - S^{-1}CS\right), \\ H &= \beta S\mathcal{P}_n, \end{aligned}$$

здесь S — симметричный инволютивный косой циркулянт, C — циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S, S_1 — симметричный косой циркулянт, α и β — произвольные комплексные числа.

Класс 9. Порядок n есть четное число. Матрица T имеет вид:

$$T = \alpha\left(t_0 I_n + 2S + C - S^{-1}CS\right),$$

где S — кососимметричный инволютивный косой циркулянт, а C — циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S. Матрица H задается формулой:

$$H = \beta\left(C - S^{-1}CS\right)\mathcal{P}_n.$$

Комплексные числа α и β произвольны.

Класс 10. Матрицы T и H задаются формулами:

$$\begin{aligned} T &= \alpha\big(t_0 I_n + Z - iZ^\top\big), \\ H &= \beta\big(Z + Z^\top\big)\mathcal{P}_n, \end{aligned}$$

где Z — инволютивный ϕ-циркулянт, причем $|\phi| = 1$, $\phi \neq \pm 1$, α и β — произвольные комплексные числа.

В пункте 2 мы формулируем вещественный вариант теоремы 1. Его доказательство дано в пункте 3. В этом доказательстве нам понадобятся следующие утверждения (см. [18]).

Лемма 1. *Циркулянт C со спектральным разложением* (5) *является вещественной матрицей тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} d_1 &= \overline{d}_1, \\ d_{n+2-j} &= \overline{d}_j, \quad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \end{aligned} \tag{7}$$

Лемма 2. *Косой циркулянт S со спектральным разложением* (6) *является вещественной матрицей тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &d_2 = \overline{d}_1, \\ &d_{n+3-j} = \overline{d}_j, \qquad j = 3, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned} \tag{8}$$

2. Главный результат

Основным результатом данной статьи является следующее утверждение.

Теорема 2. *Ненулевые вещественная теплицева матрица T и вещественная ганкелева матрица H порядка n коммутируют тогда и только тогда, когда T и H входят хотя бы в один из перечисляемых ниже классов.*

Класс 1′. Матрица T — скалярная, а H — произвольная ганкелева матрица.

Класс 2′. Матрицы T и H имеют вид:

$$\begin{aligned} T &= A, \\ H &= \alpha \mathcal{P}_n + \beta A \mathcal{P}_n, \end{aligned}$$

здесь A — произвольная вещественная симметричная теплицева матрица, α и β — произвольные вещественные числа.

Класс 3′. Матрицы T и H имеют вид:

$$\begin{aligned} T &= t_0 I_n + (1+\alpha)L + (1-\alpha)L^\top, \\ H &= \beta(L + L^\top)\mathcal{P}_n, \end{aligned}$$

здесь L — вещественная нижнетреугольная теплицева матрица, имеющая нули в первом столбце в позициях $1, 2, \dots, \lceil n/2 \rceil$, α и β — вещественные числа.

Класс 4′. Матрица T является циркулянтом

$$C_1 = F_n{}^* D_1 F_n,$$

а H — ганкелевым циркулянтом

$$C_2 = F_n{}^* D_2 F_n \mathcal{P}_n,$$

здесь $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}\right)$ — диагональные матрицы; при этом

$$\begin{aligned} &d_1^{(k)} = \overline{d}_1^{(k)}, && k = 1, 2, \\ &d_{n+2-j}^{(k)} = \overline{d}_j^{(k)}, && j = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \ k = 1, 2, \\ &d_j^{(2)}\bigl(d_j^{(1)} - \overline{d}_j^{(1)}\bigr) = 0, && j = 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Класс 5′. Матрица T является косым циркулянтом

$$S_1 = G_{-1} F_n{}^* D_1 F_n G_{-1}^*,$$

а H — ганкелевым косым циркулянтом

$$S_2 = G_{-1} F_n{}^* D_2 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n.$$

Диагональные матрицы $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ *и* $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ *должны удовлетворять соотношениям*:

$$\begin{aligned} &d_2^{(k)} = \overline{d}_1^{(k)}, && k = 1, 2, \\ &d_{n+3-j}^{(k)} = \overline{d}_j^{(k)}, && j = 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1,\ k = 1, 2, \\ &d_j^{(2)} \left(d_j^{(1)} - \overline{d}_j^{(1)}\right) = 0, && j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Класс $6'$. *Порядок* n *есть четное число. Матрица* T *является линейным многочленом от кососимметричного и инволютивного косого циркулянта* S:

$$T = t_0 I_n + \alpha S.$$

Матрица H *задается формулой*:

$$H = \beta \left(C - S^{-1} C S\right) \mathcal{P}_n,$$

где C *— циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы* S, α *и* β *— произвольные чисто мнимые числа,* t_0 *— произвольное вещественное число.*

Класс $7'$. *Матрицы* T *и* H *задаются формулами*:

$$\begin{aligned} &T = \alpha \left(C_1 + S - C^{-1} S C\right), \\ &H = \beta C \mathcal{P}_n, \end{aligned}$$

здесь C *— вещественный симметричный и инволютивный циркулянт,* S *— вещественный косой циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы* C, C_1 *— вещественный симметричный циркулянт,* α *и* β *— произвольные вещественные числа.*

Класс $8'$. *Матрицы* T *и* H *задаются формулами*:

$$\begin{aligned} &T = \alpha \left(S_1 + C - S^{-1} C S\right), \\ &H = \beta S \mathcal{P}_n, \end{aligned}$$

здесь S *— вещественный симметричный и инволютивный косой циркулянт,* C *— вещественный циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы* S, S_1 *— вещественный симметричный косой циркулянт,* α *и* β *— произвольные вещественные числа.*

Класс $9'$. *Порядок* n *есть четное число. Матрица* T *имеет вид*:

$$T = \alpha \left(t_0 I_n + 2S + C - S^{-1} C S\right),$$

где S *— кососимметричный и инволютивный косой циркулянт, а* C *— циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы* S. *Матрица* H *задается формулой*:

$$H = \beta\left(C - S^{-1}CS\right)\mathcal{P}_n.$$

Чисто мнимые числа α, β *и* t_0 *произвольны.*

Класс $10'$. *Матрицы* T *и* H *задаются формулами*:

$$T = t_0 I_n + \alpha(1+i)(Z - iZ^\top),$$
$$H = \beta(Z + Z^\top)\mathcal{P}_n,$$

где Z — *инволютивный* ϕ-*циркулянт, причем* $|\phi| = 1$, $\phi \neq \pm 1$; α, β *и* t_0 — *произвольные вещественные числа.*

3. Доказательство теоремы 2

Приведем теперь обоснование теоремы 2. Как уже отмечено, для ее доказательства достаточно выделить вещественные пары из всех классов, перечисляемых в теореме 1.

Очевидно, что из классов 1–3 получаются классы $1'$–$3'$.

Класс $4'$ получается из класса 4 на основании леммы 1, а класс $5'$ — из класса 5 на основании леммы 2.

Класс $6'$ получается из класса 6 следующим образом. Так как всякий косой циркулянт S является нормальной матрицей, то условие его инволютивности делает S эрмитовой матрицей, а из кососимметричности еще и следует, что S будет чисто мнимой и недиагональной. Взяв α чисто мнимым и t_0 вещественным, получаем вещественную матрицу T. При таком выборе матрица $C - S^{-1}CS$ будет чисто мнимой. Выбор числа β чисто мнимым обеспечивает вещественность матрицы H. Заметим, что матрица H не зависит от выбора диагонального элемента для C. Класс $9'$ получается аналогичным образом из класса 9.

Класс 7 дает нам класс $7'$. Поскольку H — вещественная матрица, то вещественным должно быть произведение βC. Без ограничения общности можно считать, что вещественны C и β. Тогда матрица $\hat{C} = S - C^{-1}SC$ вещественна. Взяв $C_1 = C_1' + i\tilde{C}$, получаем

$$T = \alpha(C_1 + \hat{C}) = (\alpha_1 + i\alpha_2)\left(C_1' + \hat{C} + i\tilde{C}\right).$$

Условие вещественности T имеет вид

$$\alpha_1\tilde{C} = -\alpha_2\left(C_1' + \hat{C}\right).$$

Если $\alpha_1 = 0$, то в силу того, что $T \neq 0$, имеем $\alpha_2 \neq 0$ и $C_1' + \hat{C} = 0$. Тогда $T = -\alpha_2\tilde{C}$ и мы приходим к классу $4'$. В противном случае запишем

$$T = (\alpha_1 + i\alpha_2)\left(C_1' + \hat{C} + i\tilde{C}\right) = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)}{\alpha_1}\Big(\alpha_1\left(C_1' + \hat{C}\right) + i\alpha_1\tilde{C}\Big)$$
$$= \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)}{\alpha_1}(\alpha_1 - i\alpha_2)\left(C_1' + \hat{C}\right) = \frac{|\alpha|^2}{\alpha_1}\left(C_1' + S - C^{-1}SC\right).$$

Полагая

$$\alpha' = \frac{|\alpha|^2}{\alpha_1},$$

получаем класс $7'$. Класс $8'$ получается аналогичным образом из класса 8.

Обоснование класса $10'$ не столь тривиально. Найдем условия, при которых матрицы $T = t_0 I_n + \alpha\big(Z - iZ^\top\big)$ и $H\mathcal{P}_n = \beta\big(Z + Z^\top\big)$ вещественны.

По теореме 1 матрица Z есть инволютивный ϕ-циркулянт для некоторого числа $|\phi|$ с модулем 1, $\phi \neq \pm 1$. Отсюда следует, что Z — нормальная матрица с собственными значениями, равными ± 1. Поэтому матрица Z эрмитова. Представим Z в алгебраической форме:

$$Z = A + iB, \qquad A^\top = A, \quad B^\top = -B.$$

Вещественные матрицы A и B не могут быть нулевыми одновременно. Используя это представление, находим

$$H\mathcal{P}_n = \beta\big(Z + Z^\top\big) = (\beta_1 + i\beta_2)(A + iB + A - iB) = 2(\beta_1 + i\beta_2)A = 2\beta_1 A + i2\beta_2 A.$$

Условие вещественности матрицы $H\mathcal{P}_n$ имеет вид

$$\beta_2 A = 0.$$

Если $A = 0$, то $Z = iB$, но тогда матрица Z не может быть ϕ-циркулянтом для числа ϕ такого, что $|\phi| = 1$, $\phi \neq \pm 1$. Исключением являются скалярные матрицы Z и T. Соответствующие пары (T, H) принадлежат классу $1'$.

В случае ненулевой матрицы A имеем

$$\beta \in \mathbf{R}.$$

Преобразуем теперь матрицу T:

$$\begin{aligned} T &= t_0 I_n + \alpha\big(Z - iZ^\top\big) = t_0 I_n + \alpha\big(A + iB - i(A - iB)\big) \\ &= t_0 I_n + \alpha(A + iB - iA - B) = t_0 I_n + \alpha(1 - i)(A - B). \end{aligned}$$

Если матрица $A - B$ — диагональная, то матрица T — скалярная, что приводит к паре из класса $1'$. В противном случае заключаем, что

$$\alpha(1 - i) \in \mathbf{R}.$$

Положим

$$\alpha(1 - i) = 2\alpha',$$

тогда

$$\alpha = (1 + i)\alpha'.$$

В результате матрица $\alpha(1 - i)(A - B)$ вещественна и, взяв вещественным число t_0, получаем класс $10'$. $\square$

В заключение опишем способ конструирования вещественных инволютивных циркулянтов и косых циркулянтов.

Чтобы построить вещественный инволютивный циркулянт, достаточно в формуле (5) произвольно задать единицами и минус единицами числа d_1, d_2, …, $d_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$. Остальные диагональные элементы матрицы D определяются формулами (7).

Чтобы построить вещественный инволютивный косой циркулянт, достаточно в формуле (6) произвольно задать единицами и минус единицами числа d_1, d_3, d_4, …, $d_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Остальные диагональные элементы матрицы D определяются формулами (8).

Благодарности. Тема этой статьи возникла в процессе обсуждения вопроса о перестановочности теплицевых и ганкелевых матриц с Carmine Di Fiore (Рим, университет Tor Vergata). Авторы выражают ему свою признательность.

Литература

1. **Гельфгат В.И.** Условия коммутирования теплицевых матриц // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1998. — Т. 38, № 1. — С. 11–14.
2. **Икрамов Х.Д., Чугунов В.Н.** Критерий нормальности комплексной теплицевой матрицы // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1996. — Т. 36, № 2. — С. 3–10.
3. **Farenick D.R., Krupnik M., Krupnik N., and Lee W.Y.** Normal Toeplitz matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 1996. — Vol. 17, № 4. — P. 1037–1043.
4. **Ito K.** Every normal Toeplitz matrix is either of type I or of type II // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 1996. — Vol. 17, № 4. — P. 998–1006.
5. **Arimoto A.** A simple proof of the classification of normal Toeplitz matrices // Electronic J. Linear Algebra. — 2002. — Vol. 9. — P. 108–111.
6. **Gu G., Patton L.** Commutation relations for Toeplitz and Hankel matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 2003. — Vol. 24. — P. 728–746.
7. **Икрамов Х.Д., Чугунов В.Н.** О кососимметричной части произведения теплицевых матриц // Мат. заметки. — 1998. — Т. 63, № 1. — С. 138–141.
8. **Икрамов Х.Д., Чугунов В.Н.** О нормальных ганкелевых матрицах // Записки научных семинаров ПОМИ им. В.А. Стеклова Российской академии наук. — 2007. — Т. 346. — С. 63–80.
9. **Икрамов Х.Д., Чугунов В.Н.** О сведении нормальной ганкелевой задачи к двум частным случаям // Мат. заметки. — 2009. — Т. 85, № 5. — С. 768–776.
10. **Чугунов В.Н.** О двух частных случаях решения нормальной ганкелевой задачи // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2009. — Т. 49, № 6. — С. 931–939.
11. **Chugunov V.N., Ikramov Kh.D.** A contribution to the normal Hankel problem // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 430, № 8–9. — P. 2094–2101.
12. **Chugunov V.N., Ikramov Kh.D.** A complete solution of the normal Hankel problem // Linear Algebra Appl. — 2010. — Vol. 432, № 12. — P. 3210–3230.
13. **Гельфгат В.И.** Условия коммутирования ганкелевых матриц // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2011. — Т. 51, № 7. — С. 1181–1193.
14. **Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е.** Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. — М.: Наука, 1987.
15. **Chugunov V.N., Ikramov Kh.D.** Permutability of Toeplitz and Hankel matrices // Linear Algebra Appl. — 2015. — Vol. 467. — P. 226–242.
16. **Chugunov V.N., Ikramov Kh.D.** A complete solution of the permutability problem for Toeplitz and Hankel matrices // Linear Algebra Appl. — 2015. — Vol. 478. — P. 53–80.
17. **Чугунов В.Н., Икрамов Х.Д.** О классификации пар перестановочных теплицевой и ганкелевой матриц // Доклады РАН — 2015. — Т. 464, № 4. — С. 406–410.
18. **Чугунов В.Н.** О параметризации классов нормальных ганкелевых матриц // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2011. — Т. 51, № 11. — С. 1939–1951.

Поступила в редакцию 26 ноября 2015 г.,
в окончательном варианте 28 марта 2016 г.

Литература в транслитерации

1. **Gel'fgat V.I.** Usloviya kommutirovaniya teplicevykh matric // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1998. — T. 38, № 1. — S. 11–14.
2. **Ikramov Kh.D., Chugunov V.N.** Kriterii normal'nosti kompleksnoi teplicevoi matricy // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1996. — T. 36, № 2. — S. 3–10.
3. **Farenick D.R., Krupnik M., Krupnik N., and Lee W.Y.** Normal Toeplitz matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 1996. — Vol. 17, № 4. — P. 1037–1043.
4. **Ito K.** Every normal Toeplitz matrix is either of type I or of type II // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 1996. — Vol. 17, № 4. — P. 998–1006.
5. **Arimoto A.** A simple proof of the classification of normal Toeplitz matrices // Electronic J. Linear Algebra. — 2002. — Vol. 9. — P. 108–111.
6. **Gu G., Patton L.** Commutation relations for Toeplitz and Hankel matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 2003. — Vol. 24. — P. 728–746.
7. **Ikramov Kh.D., Chugunov V.N.** O kososimmetrichnoi chasti proizvedeniya teplicevykh matric // Mat. zametki. — 1998. — T. 63, № 1. — S. 138–141.
8. **Ikramov Kh.D., Chugunov V.N.** O normal'nykh gankelevykh matricakh // Zapiski nauchnykh seminarov POMI im. V.A. Steklova Rossiiskoi akademii nauk. — 2007. — T. 346. — S. 63–80.
9. **Ikramov Kh.D., Chugunov V.N.** O svedenii normal'noi gankelevoi zadachi k dvum chastnym sluchayam // Mat. zametki. — 2009. — T. 85, № 5. — S. 768–776.
10. **Chugunov V.N.** O dvukh chastnykh sluchayakh resheniya normal'noi gankelevoi zadachi // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2009. — T. 49, № 6. — S. 931–939.
11. **Chugunov V.N., Ikramov Kh.D.** A contribution to the normal Hankel problem // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 430, № 8–9. — P. 2094–2101.
12. **Chugunov V.N., Ikramov Kh.D.** A complete solution of the normal Hankel problem // Linear Algebra Appl. — 2010. — Vol. 432, № 12. — P. 3210–3230.
13. **Gel'fgat V.I.** Usloviya kommutirovaniya gankelevykh matric // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2011. — T. 51, № 7. — S. 1181–1193.
14. **Voevodin V.V., Tyrtyshnikov E.E.** Vychislitel'nye processy s teplicevymi matricami. — M.: Nauka, 1987.
15. **Chugunov V.N., Ikramov Kh.D.** Permutability of Toeplitz and Hankel matrices // Linear Algebra Appl. — 2015. — Vol. 467. — P. 226–242.
16. **Chugunov V.N., Ikramov Kh.D.** A complete solution of the permutability problem for Toeplitz and Hankel matrices // Linear Algebra Appl. — 2015. — Vol. 478. — P. 53–80.
17. **Chugunov V.N., Ikramov Kh.D.** O klassifikacii par perestanovochnykh teplicevoi i gankelevoi matric // Doklady RAN — 2015. — T. 464, № 4. — S. 406–410.
18. **Chugunov V.N.** O parametrizacii klassov normal'nykh gankelevykh matric // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2011. — T. 51, № 11. — S. 1939–1951.