2023

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СОВМЕСТНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРОППАНТА И ПОРОДНОГО МАССИВА ПРИ ГИДРОРАЗРЫВЕ ПЛАСТА

Д. С. Журкина, С. В. Лавриков, А. Ф. Ревуженко

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: lvk64@mail.ru, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия

Исследована связь между двумя процессами: деформированием проппантного слоя под действием горного давления и изменением горного давления в окружающем массиве при сбросе давления нагнетающей жидкости. Для моделирования задачи деформирования проппанта (задача механики сыпучих сред) используется метод дискретных элементов, для моделирования перераспределения горного давления (задача механики горных пород) применяется разработанная ранее континуальная модель горной породы как среды с внутренними источниками и стоками энергии и метод конечных элементов. В результате численного моделирования показано, что в зависимости от предварительной истории нагружения и свойств среды в породном массиве могут реализовываться как устойчивый, так и неустойчивый режим деформирования. Для устойчивого режима даны расчеты равновесного давления на контуре трещины гидроразрыва, оценено изменение пористости проппантного слоя. В неустойчивом режиме в породном массиве наблюдаются динамические проявления горного давления.

Гидроразрыв пласта, проппант, пористость, горное давление, устойчивость, численное моделирование, метод дискретных и конечных элементов

DOI: 10.15372/FTPRPI20230502

Технология гидроразрыва пластов — одна из основных для повышения нефтеотдачи коллекторов [1-7]. В горном деле гидроразрыв применяется для дегазации угольных пластов с целью предотвращения внезапных выбросов угля и газа [8-11].

Технология гидроразрыва пластов заключается в создании высокопроводящих трещин путем нагнетания в пласт жидкости под избыточным давлением, достаточным для инициации и роста трещин в породе. На первом этапе под высоким давлением проводится закачка жидкости для инициации и формирования трещин, на следующем — в жидкость добавляется проппант (гранулированный материал) с целью заполнения частицами проппанта каналов трещин. После остановки закачки и сброса давления рабочей жидкости проппант играет роль расклинивающего агента. С одной стороны, проппантная упаковка препятствует смыканию берегов трещин под действием горного давления, с другой — наличие пористости упаковки обеспечивает фильтрацию нефти или газа.

Nº 5

Работа выполнена в рамках проекта ФНИ (номер гос. регистрации 121052500138-4).

Оптимизация каждого из этапов данной технологии требует создания математических моделей, которые должны адекватно описывать:

— процессы бурения скважин и создания зародышевых трещин;

— гидродинамические процессы закачивания жидкости разрыва, жидкости с проппантом (песконосителя), продавочной жидкости;

— собственно гидроразрыв пласта [3, 9];

— процессы деформации и разрушения проппанта (задача механики сыпучих сред) [12, 13];

— процессы фильтрации жидкости или газа;

— перераспределение горного давления (задача механики горных пород) [14-16].

Большинство используемых в настоящее время моделей описывают только один из указанных факторов, хотя все факторы связаны между собой и адекватные модели должны носить комплексный характер.

В настоящей работе рассматривается совместное решение двух задач: связь процесса деформирования гранулированной среды (проппанта) с изменением горного давления.

МДЭ-МОДЕЛИРОВАНИЕ СЖАТИЯ СЛОЯ ПРОППАНТА ПЛАСТОВЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Рассмотрим задачу в следующей пространственной постановке. Пусть в породном массиве с плотностью слагающих пород ρ на глубине H под действием избыточного давления жидкости $P > \rho g H$ формируется горизонтальная трещина гидроразрыва с такими линейными размерами: *l* — длина трещины, *b* — ее ширина, *h*₀ — начальное раскрытие берегов трещины (рис. 1*a*). После ее формирования в нагнетаемую жидкость добавляется проппант, который заполняет канал сформированной трещины с некоторой плотностью частиц η_0 (отношение суммарного объема всех частиц проппантной смеси к объему канала сформированной трещины). Начальная пористость проппантного слоя составляет $1 - \eta_0$. Далее происходит сброс рабочего давления жидкости, что приводит к увеличению доли горного давления, передаваемого на слой проппанта. Последнее влечет деформирование упаковки частиц проппанта и частичное их измельчение. Считаем, что к началу наблюдения давление рабочей жидкости близко к пластовому и составляет $\rho g H - p_0$, где $p_0 << \rho g H$ — часть горного давления, воспринимаемая частицами проппанта. По мере сброса давления жидкости давление массива на слой проппанта возрастает. Таким образом, задача состоит в моделировании процесса деформирования упаковки частиц проппанта при увеличении воспринимаемой ею доли горного давления от величины p_0 до $\rho g H$.



Рис. 1. Модель трещины гидроразрыва пластов, заполненной слоем проппанта: *а* — геометрия трещины гидроразрыва; *б* — участок трещины (расчетная область), заполненный полидисперсной упаковкой сферических частиц

Известно, что жидкость с проппантом до границы смыкания берегов трещины не проникает. Обозначим через l_0, b_0, h_0 геометрические размеры области, заполненной проппантом, для которой будем рассматривать задачу о сжатии слоя частиц (рис. 16). Решение задачи осуществим на основе метода дискретных элементов [17–23]. Для учета изменения пористости при разрушении частиц проппанта рассмотрим проппантный слой в виде упаковки сферических частиц, изначально состоящих из двух различных фракций, где R_1, R_2 — соответственно радиусы частиц различных фракций, n_1, n_2 — число частиц соответствующих фракций (рис. 16).

В методе дискретных элементов (МДЭ) частицы предполагаются недеформируемыми. Алгоритм МДЭ состоит в интегрировании уравнений движения Ньютона для каждой частицы. Вопрос о свойствах среды сводится к определению сил взаимодействия между частицами в зависимости от размера перекрытия между контактирующими частицами. В базовой версии МДЭ в качестве потенциалов нормального и касательного взаимодействия частиц используется модель Кельвина – Фойгта с учетом упругого и вязкого поведения. Для учета упруготи при нормальном взаимодействии остановимся на модели, основанной на линейном законе Гу-ка [24] (линейная зависимость силы отталкивания от величины перекрытия). При касательном взаимодействии используем подход Миндлина – Дересевича с учетом развивающегося сухого трения [25]. В качестве искусственного механизма диссипации энергии при упругом соударении частиц вводится параметр вязкости — коэффициент восстановления скорости, определяемый как отношение скорости разлета частиц после соударения к скорости их подлета до соударения. Расчетные формулы МДЭ подробно описаны в [21, 22].

Выберем параметры задачи: $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$, H = 500 м, $h_0 = 0.01 \text{ м}$, $b_0 / h_0 = 5$, $l_0 / h_0 = 20$, $p_0 = 0.5 \text{ МПа}$, $\eta_0 = 0.611$, $R_1 = 0.001 \text{ M}$, $R_1 / R_2 = 2$, $n_1 = n_2 = 7500$. Свойства частиц проппанта в алгоритме МДЭ примем в следующем виде: модуль сдвига $\mu = 0.1 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$, коэффициент трения между частицами $f_{slip} = 0.6$, коэффициент восстановления скорости $c_r = 0.5$. Заданные параметры упаковки (относительная плотность η_0 , радиусы R_1 , R_2 , число частиц n_1 , n_2 и начальное давление p_0) получены путем предварительных расчетов на сжатие слоя частиц. Таким образом, начальная упаковка с описанными параметрами является равновесной. При заданных параметрах пластовое давление составляет $\rho gH \approx 13.24 \text{ МПа}$, начальная пористость проппантного слоя $1 - \eta_0 = 0.389$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МДЭ

На рис. 2 (пунктирный участок AB) представлена расчетная диаграмма сжатия слоя проппанта при сбросе рабочего давления нагнетающей жидкости. По оси абсцисс отложено относительное сближение берегов трещины (деформация), по оси ординат — доля горного давления p, передаваемая на слой проппанта, точка A соответствует началу наблюдения, когда горное давление на слой минимально и равно $p = p_0$ (основная его доля компенсируется давлением нагнетающей жидкости), точка B — окончанию сброса давления жидкости, когда давление достигает $p = \rho g H$.



Рис. 2. Моделирование сброса рабочего давления нагнетающей жидкости: *АВ* — диаграмма сжатия слоя проппанта; *CD* — диаграмма перераспределения горного давления (устойчивое поведение массива); точка *E* — равновесное состояние

Изменение пористости проппантного слоя в процессе сброса давления нагнетающей жидкости показано на рис. 3. Как отмечалось, в начале наблюдения (точка *A*) пористость составляла $1 - \eta_0 = 0.389$, при полном сбросе рабочего давления (точка *B*) — $1 - \eta = 0.175$.



Рис. 3. Изменение пористости проппантного слоя при увеличении доли горного давления, передаваемого на слой проппанта по мере сброса давления нагнетающей жидкости, точка *E* — равновесное состояние

Результаты расчетов получены без учета деформирования окружающего массива. Ниже рассмотрим постановку задачи, которая позволяет учесть изменения НДС, происходящие в пласте полезного ископаемого, и затем определить равновесное состояние между описанными двумя процессами.

МКЭ-МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ НДС В ПОРОДНОМ МАССИВЕ ПРИ СБРОСЕ ДАВЛЕНИЯ НАГНЕТАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Для расчета напряженно-деформированного состояния в породном массиве при формировании трещины гидроразрыва исследуем плоскую упругопластическую модель структурнонеоднородной горной породы как активной среды с внутренними источниками и стоками энергии. Модель опирается на представления о горной породе как сложной иерархической среде, состоящей из структурных элементов. В качестве структурных элементов рассматриваются зерна (скелет структуры) и поровый материал, заполняющий межзеренное пространство. На границах между зернами допускаются пластические проскальзывания. Подход к построению определяющих соотношений модели описан в [14, 15]. Данная модель за счет вариации свойств структурных элементов позволяет описать поведение широкого спектра структурнонеоднородных сред, начиная от твердых и трещиноватых скальных пород, до сухих и флюидонасыщенных грунтов, сыпучих сред и др.

Остановимся на версии модели, изложенной в [15]. Здесь зерна скелета и поровый материал представляют собой упругие среды с различными упругими свойствами, а на межзеренных контактах учитывается относительное проскальзывание зерен, развивающееся по нелинейному пластическому закону с учетом стадий упрочнения, разупрочнения и остаточной прочности. В [15] показано, что данная модель способна описать наличие в среде внутренних самоуравновешенных напряжений. При определенных значениях параметров и условиях нагружения данные напряжения могут быть выведены из равновесного состояния и привести к существенному изменению НДС, включая динамические проявления горного давления.

Определяющие соотношения модели [15], связывающие приращения деформаций $\Delta \varepsilon_{ij}$ и приращения напряжений $\Delta \sigma_{ij}$, имеют вид

$$\begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{11} \\ \Delta \varepsilon_{22} \\ \Delta \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = W[(T+R)^{-1} + 2(T+P)^{-1}]^{-1}W^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \sigma_{11} \\ \Delta \sigma_{22} \\ \Delta \sigma_{12} \end{pmatrix},$$
(1)

где T, P, R — квадратные матрицы третьего порядка, описывающие упругие свойства зерен, порового материала и пластические проскальзывания между зернами соответственно; W — отвечает за ориентацию структуры зеренного скелета относительно осей декартовой системы координат.

Для описания межзеренных проскальзываний рассмотрим диаграмму, показанную на рис. 4. Участок *OA* описывает стадию упрочнения, участок *AB* — стадию разупрочнения, участок *BC* — стадию остаточной прочности. Условия пластических проскальзываний на межзеренных контактах, связывающие приращения сдвигов $\Delta \varepsilon_{ij}^{R}$ и приращения напряжений в зернах Δt_{ij} , имеют вид $\Delta \varepsilon_{12}^{R} = \Delta t_{12} / G^{s}$, где



Рис. 4. Нелинейная диаграмма пластических сдвигов между зернами скелета горной породы (кусочно-линейная аппроксимация — линия *OABC*)

Общие макронапряжения зеренной структуры среды σ_{ij} складываются из напряжений в зернах t_{ij} и напряжений в поровом материале p_{ij} при выполнении условий совместности:

$$\sigma_{ij} = t_{ij} + 2mp_{ij}, \qquad (2)$$

где безразмерная величина 0 < *m* < 1 имеет смысл параметра просветности.

Проанализируем условие (2). Пусть в некотором объеме среды зафиксированы определенные напряжения в зернах и поровом материале, т. е. известны компоненты t_{ij} , p_{ij} . Тогда соотношения (2) позволяют однозначно вычислить напряженное состояние макрообъема σ_{ij} . Обратная задача (по заданным макронапряжениям σ_{ij} определить напряжения зерен и порового материала t_{ij} , p_{ij}) допускает множество решений. Общая макронагрузка может быть распределена между зернами и поровой средой в различных долях. Отсутствие макронапряжений не означает, что внутренние микронапряжения среды также отсутствуют. В зернах и поровом материале могут действовать различные по знаку и компенсирующие друг друга ненулевые напряжения, при этом суммарные макронапряжения оказываются равными нулю. Условия (2) описывают свойство среды запасать энергию в виде внутренних самоуравновешенных напряжений.

Определяющие соотношения (1) дополняются соотношениями Коши, связывающими приращения деформаций и смещений и замыкаются уравнениями равновесия. Задача для приращений является линейной и с помощью алгоритма метода конечных элементов сводится к решению алгебраической системы линейных уравнений высокого порядка. Решением задачи являются приращения микро- и макронапряжений, деформаций и смещений за один шаг нагружения. Общее решение строится в виде суммы найденных приращений на каждом шаге нагружения. Иными словами, задача рассматривается в квазистатической постановке, а ее решение строится по шагам нагружения. Для решения поставленной задачи разработаны оригинальные численный конечно-элементный алгоритм и программное обеспечение на языке Pascal.

Рассмотрим постановку краевой задачи о сбросе рабочего давления нагнетающей жидкости в трещине гидроразрыва. Расчетная область, окружающая трещину, имеет вид, показанный на рис. 5*a*. Трещина моделируется внутренней полостью в виде сильно вытянутого эллипса с границей Γ_2 . Начальное напряженное состояние в окружающем трещину массиве выберем в виде линейного распределения в зависимости от глубины:

$$\sigma_{22}^{0} = -\rho g(H - x_{2}), \quad \sigma_{11}^{0} = \xi \sigma_{22}^{0}, \quad \sigma_{12}^{0} = 0.$$
(3)

Здесь начало декартовой системы координат Ox_1x_2 совпадает с центром трещины, ξ — коэффициент бокового распора пород.

Опишем краевые условия для одного шага нагружения. Предположим, что в исходном ненарушенном массиве за счет нагнетания избыточного давления жидкости формируется трещина гидроразрыва. Затем давление жидкости сбрасывается и берега трещины под действием горного давления начинают сдвигаться. Описанное нагружение сводится к перераспределению нагрузки в окружающем трещину массиве за счет уменьшения (сброса) давления на контуре трещины вплоть до полной разгрузки ее контура. Для приращений нормальной $\Delta \sigma_n$ и касательной $\Delta \tau_n$ компонент напряжений данное условие примет вид

$$\Delta \sigma_n \big|_{\Gamma_2} = -\Delta d^k \sigma_n^0 \big|_{\Gamma_2}, \quad \Delta \tau_n \big|_{\Gamma_2} = -\Delta d^k \tau_n^0 \big|_{\Gamma_2}.$$
(4)

Здесь $0 < \Delta d^k < 1$ — безразмерный параметр нагружения — доля начальной нагрузки, снимаемой на контуре трещины за один (*k*-й) шаг нагружения; Γ_2 — контур трещины. Условие $\sum \Delta d^k = 1$ означает полную разгрузку контура трещины.



Рис. 5. Формирование зон деградации сдвиговой прочности: *а* — устойчивый режим деформирования; *б* — неустойчивый режим деформирования, сопровождающийся серией локальных скачков разупрочнения

На внешней границе расчетной области Γ_1 краевое условие для приращений нормальной и касательной компонент тензора напряжений запишется в виде $\Delta \sigma_n |_{\Gamma_1} = 0$, $\Delta \tau_n |_{\Gamma_1} = 0$.

Условие (3) определяет начальное распределение макронапряжений в окружающем массиве. Однако в силу условий совместности (2) этого недостаточно для корректной постановки задачи. Необходимо определить, каким образом эти макронапряжения распределены между структурными элементами — зернами и поровой средой.

В рамках описанной постановки рассмотрим решение двух типовых задач, отличающихся выбором параметров модели. При решении первой задачи примем, что начальные макронапряжения (3) равномерно распределены между зернами и поровым материалом (50% нагрузки сосредоточено в зернах и 50% — в поровой среде). Во второй задаче будем считать, что 80% начальных напряжений сосредоточено в зернах и 20% — в материале, заполняющем межзеренное пространство. Остальные параметры при решении обеих задач выберем одинаковыми.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ПРИ УСТОЙЧИВОМ ПОВЕДЕНИИ МАССИВА

Опишем результаты расчетов первой задачи. На рис. 6 (участок OA) показана диаграмма сброса давления на контуре трещины (доля снимаемой нагрузки в зависимости от числа шагов нагружения). В точке A доля снятой нагрузки составила 97%, что соответствует давлению жидкости $p = p_0$. На рис. 2 (участок CD) данная диаграмма приведена в координатах: уменьшение нагрузки на контуре трещины в зависимости от относительного сближения ее берегов.

Видно, что сброс рабочего давления жидкости — уменьшение давления на контуре трещины, протекает устойчиво, и в конечном итоге удается полностью разгрузить контур трещины. Если к началу наблюдения (точка *C* на рис. 2) давление жидкости уравновешивало давление пласта и составляло $p = \rho g H$, то в точке *D* давление жидкости упало до $p = p_0$. На рис. 5*a* темным цветом отмечены зоны деградации сдвиговой прочности массива, которые формируются вокруг естественных концентраторов напряжений — носиков трещины. В данных зонах локальная диаграмма на межзеренных контактах достигла остаточной прочности.



Рис. 6. Диаграмма разгрузки пласта полезного ископаемого: *ОА* — устойчивое поведение; *ОВ* — неустойчивое поведение, стрелками показаны участки динамического высвобождения энергии. Пунктирная линия — уровень равновесного давления

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ В СЛУЧАЕ НЕУСТОЙЧИВОГО ПОВЕДЕНИЯ МАССИВА

Принципиально иначе протекает процесс деформирования массива во второй задаче. На рис. 7 (участок CD) снова представлена диаграмма изменения нагрузки на контуре трещины в зависимости от относительного сближения ее берегов. Минимальное давление на контуре трещины, которого удается достичь, оставаясь в условиях статического равновесного состояния (точка D), составляет ~40 % от пластового давления $\rho g H$. Попытка снизить это давление приводит к серии локальных скачков разупрочнения. Для численного моделирования динамических скачков разупрочнения в рамках квазистатической постановки задачи использован специальный алгоритмический прием [26]. Он состоит в следующем. В момент выхода диаграммы на межзеренных контактах на ниспадающую ветвь в среде происходят динамические скачки разупрочнения. Статическое равновесное состояние здесь не существует. Для моделирования динамических скачков в момент их появления будем задавать не положительное, а отрицательное приращение параметра нагружения $\Delta d^k < 0$. При этом на разупрочняющихся контактах будет наблюдаться рост пластических сдвигов (активное нагружение), а на упрочняющихся контактах — упругая разгрузка. Статическое равновесное состояние здесь существует, и оно единственно. После того как разупрочняющийся контакт исчерпает свою прочность и достигнет горизонтального участка диаграммы, вновь полагаем $\Delta d^k > 0$ и процесс моделирования развивается вперед.

С механической точки зрения данный прием означает, что в момент наступления динамического скачка извне вводится дополнительная внешняя сила, которая сдерживает этот скачок и стравливает избыточное напряжение на межзеренных контактах в режиме квазистатического деформирования (изымает избыточную энергию). Проскальзывания на контактах получают те же приращения, что и при решении динамической задачи. Описанный прием позволяет построить адекватное приближение динамической задачи, оставаясь в рамках квазистатической постановки [26].

На рис. 6 (участок *OB*) динамические скачки разупрочнения (участки падения диаграммы) показаны стрелками. Максимальная доля сбрасываемого давления в условиях равновесного состояния составила не более 60% от начального значения. На рис. 56 показаны зоны деградации сдвиговой прочности массива, которые занимают значительно бо́льшую площадь в окрестности носиков трещины и существенно влияют на напряженно-деформированное состояние окружающего массива.



Рис. 7. Моделирование сброса рабочего давления нагнетающей жидкости: *АВ* — диаграмма сжатия слоя проппанта; *CD* — диаграмма перераспределения горного давления (неустойчивое поведение массива); равновесное состояние в точка *E* не достигается

АНАЛИЗ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ

Рассчитаем параметры равновесного состояния между давлением пласта полезного ископаемого и сопротивлением сжатию слоя проппанта по результатам численного моделирования с использованием МДЭ и МКЭ.

В первой задаче рассматривалось сжатие слоя проппанта при увеличении доли пластового давления, передаваемого на слой проппанта по мере сброса давления нагнетающей жидкости. Во второй задаче решалась задача о перераспределении нагрузки в окружающем массиве при сбросе давления на контуре трещины гидроразрыва пластов. В обеих задачах параметры массива и трещины выбирались однотипными, поэтому равновесное состояние между двумя описанными процессами должно соответствовать точке пересечения соответствующих диаграмм нагружения.

На рис. 2 точка *E* соответствует пересечению диаграмм нагружения слоя проппанта (участок *AB*) и сброса давления жидкости на контуре трещины при устойчивом поведении массива (участок *CD*). Именно в этой точке давление пласта полезного ископаемого уравновешивается сопротивлением проппантного слоя и процесс сближения берегов трещины останавливается. В достигнутом состоянии при выбранных параметрах задачи равновесное давление на контуре трещины составило $p_{eq} \approx 4.42$ МПа, а относительное сближение берегов трещины гидроразрыва — $\varepsilon_{eq} \approx 0.103$. Иными словами, в равновесном состоянии раскрытие берегов трещины гидроразрыва пластов в зависимости от начального раскрытия составило $h_{eq} \approx 0.897 h_0$. Нетрудно рассчитать пористость слоя проппанта в равновесном состоянии. Если к началу наблюдения пористость составляла $1 - \eta_0 = 0.389$, то в точке равновесия она равна $1 - \eta_{eq} = 0.287$.

Как показало численное моделирование, при неустойчивом поведении массива точка равновесия между двумя описанными процессами не достигается. Диаграммы нагружения слоя проппанта (участок *AB*) и сброса давления жидкости на контуре трещины при неустойчивом поведении массива (участок *CD*) не пересекаются (рис. 7). Это означает, что уровень давления на контуре трещины не может быть уравновешен сопротивлением проппантного слоя (рис. 6, штриховая линия) в ситуации статического равновесного состояния массива. Здесь при формировании трещины гидроразрыва, закачке в канал трещины проппанта и сбросе рабочего давления нагнетающей жидкости в окружающем массиве происходят неконтролируемые динамические скачки разупрочнения, т. е. динамические проявления горного давления.

выводы

Предложена комплексная постановка задачи по расчету равновесного состояния между горным давлением и расклинивающим давлением слоя проппанта после сброса давления нагнетающей жидкости при формировании трещины гидроразрыва пластов. Показано, что в зависимости от свойств и предварительной истории нагружения в структурно-неоднородном массиве горных пород могут реализовываться как устойчивый, так и неустойчивый режим деформирования. Для устойчивого режима даны расчеты равновесного давления на контуре трещины гидроразрыва, оценена пористость проппантного слоя. В неустойчивом режиме статическое равновесное состояние не достигается, в породном массиве наблюдаются динамические проявления горного давления.

Численные расчеты в части применения метода дискретных элементов выполнены с использованием ПО Altair EDEM (академическая лицензия).

Авторы выражают благодарность А. Ю. Кузнецовой за помощь в проведении численных расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **1. Желтов Ю. П., Христианович С. А.** О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отдел техн. наук. 1955. № 5. С. 3–41.
- Perkins T. K. and Kern L. R. Widths of hydraulic fractures, J. Pet. Sci. Technol., 1961, Vol. 13, No. 9. P. 937–949.
- **3.** Черный С. Г., Лапин В. Н., Есипов Д. В., Куранаков Д. С. Методы моделирования зарождения и распространения трещин. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2016. 312 с.
- **4. Байкин А. Н., Головин С. В.** Развитие трещины гидроразрыва пласта в пороупругой среде // VIII Междунар. конф., посвященная 115-летию со дня рождения академика М. А. Лаврентьева. Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике. — Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 2015. — С. 78–79.

- 5. Мищенко И. Т., Мохов М. А., Стрижов И. Н., Ибатулин Т. Р., Магадова Л. А., Цыкин И. В. Сравнительный анализ эффективности ГРП с проппантом и ГРП с кварцевым песком // Нефть, Газ и Бизнес. 2008. № 8. С. 51–58.
- 6. Новикова Е. В., Тримонова М. А., Турунтаев С. Б., Зенченко Е. В., Зенченко П. Е. Оценка давления образования трещины в лабораторных экспериментах по гидроразрыву пласта // Динамические процессы в геосферах. 2022. Т. 14. № 2. С. 40–51.
- 7. Беляков Г. В., Таирова А. А., Юдочкин Н. А., Торрес Т. М. Образование трещины в неоднородной пороупругой среде // Динамические процессы в геосферах. — 2021. — Т. 13. — № 1. — С. 60-63.
- 8. Леконцев Ю. М., Сажин П. В. Технология направленного гидроразрыва пород для управления труднообрушающимися кровлями в очистных забоях и дегазации угольных пластов // ФТПРПИ. 2014. № 5. С. 137–142.
- 9. Chen J., Li X., Cao H., and Huang L. Experimental investigation on the influence of pulsating hydraulic fracturing on pre-existing fractures propagation in coal, J. Pet. Sci. Eng., 2020, Vol. 189. 107040.
- 10. Сластунов С. В., Ютяев Е. П., Мазаник Е. В., Садов А. П., Понизов А. В. Обеспечение метанобезопасности шахт на основе глубокой дегазации угольных пластов при их подготовке к интенсивной разработке // Уголь. — 2019. — № 7. — С. 42–47.
- **11.** Сердюков С. В., Шилова Т. В., Дробчик А. Н. Лабораторная установка и методика определения газопроницаемости горных пород // ФТПРПИ. 2017. № 5. С. 172–180.
- Trimonova M. A., Zenchenko E. V., Turuntaev S. B., Golovin Yu. I., Samodurov A. A., Tyurin A. I., and Dubinya N. V. Rock toughness importance for hydraulic fracture modeling, AIP Conf. Proc., 2018, Vol. 2051, Issue 1. — 020308.
- 13. Rodrigo M., de Carvalho, and Tavares L. M. Predicting the effect of operating and design variables on breakage rates using the mechanistic ball mill model, Minerals Eng., 2013, Vol. 43-44. P. 91-101.
- **14.** Ревуженко А. Ф. Горная порода среда с внутренними источниками и стоками энергии. Сообщение 1 // ФТПРПИ. 1990. № 4. С. 14–21.
- **15.** Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. Математическое моделирование неустойчивого режима деформирования породного массива с учетом внутренних самоуравновешенных напряжений // ФТПРПИ. 2020. № 6. С. 12–29.
- 16. Кочарян Г. Г., Остапчук А. А., Мартынов В. С. Изменение режима деформирования разлома в результате инжекции флюида // ФТПРПИ. — 2017. — № 2. — С. 20–28.
- Cundall P. A. and Strack O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies, Geotechnique, 1979, Vol. 29, No. 6. — P. 47–65.
- Cundal P. A. and Potyondy D. O. A bonded-particle model for rock, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 2004, Vol. 41. — P. 1329–1364.
- **19.** Димаки А. В., Шилько Е. В., Астафуров С. В., Псахье С. Г. Развитие формализма метода частиц для моделирования отклика флюидонасыщенных пористых геологических материалов // Изв. ТПУ. 2014. Т. 324. № 1. С. 102–111.
- 20. Psakhie S. G., Shilko E. V., Grigoriev A. S., Astafurov S. V., Dimaki A. V., and Smolin A. Yu. A mathematical model of particle-particle interaction for discrete element based modeling of deformation and fracture of heterogeneous elastic-plastic materials, Eng. Fracture Mech., 2014, Vol. 130. P. 96–115.

- 21. Клишин С. В., Ревуженко А. Ф. Локализация сдвигов и образование структуры при течении сыпучей среды в радиальном канале // ФТПРПИ. 2023. № 1. С. 22–34.
- 22. Журкина Д. С., Клишин С. В., Лавриков С. В., Леонов М. Г. Моделирование локализации сдвигов и перехода геосреды к неустойчивым режимам деформирования на основе метода дискретных элементов // ФТПРПИ. — 2022. — № 3. — С. 13–22.
- 23. Klishin S. V., Lavrikov S. V., Mikenina O. A., and Revuzhenko A. F. Discrete element method modification for the transition to a linearly elastic body model, IOP Conf. Series: J. Physics, 2018, Vol. 973. 012008.
- 24. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
- **25. Mindlin R. D. and Deresiewicz H.** Elastic spheres in contact under varying oblique forces, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 1953, Vol. 20. P. 327–344.
- **26.** Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. О деформировании блочной среды вокруг выработки // ФТПРПИ. 1990. № 6. С. 7–15.

Поступила в редакцию 14/VII 2023 После доработки 20/VIII 2023 Принята к публикации 15/IX 2023