3. **Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.** О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упруго-анизотропной среды // ЖЭТФ.— 1947.— Т. 17, вып. 9.
4. **Михайлов С. Е., Осокин А. Е.** Построение фундаментального решения для анизотропной стареющей среды наследственного типа // ДАН СССР.— 1984.— Т. 274, № 2.
5. **Михайлов С. Е., Осокин А. Е.** Построение фундаментальных решений пространственной и плоской задач для анизотропной наследственно-упругой стареющей среды // Изв. АН СССР. МТТ.— 1986.— № 5.
6. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функция Лежандра).— М.: Физматгиз, 1973.
7. **Справочник** по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовиц, М. Стиган.— М.: Наука, 1979.

Москва *Поступила 10/X 1988 г., в окончательном варианте—15/II 1989 г.*

УДК 539.3

А. Н. Бурмистров

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ УЗКИХ ОБЛАСТЕЙ С УЧЕТОМ ИЗНОСА

1. Рассматривается пространственная стационарная контактная задача теории упругости при наличии износа. Пусть тело *1* скользит относительно тела *2*, при этом оно не изнашивается, а линейный износ j тела *2* пропорционален работе сил трения [1]

$$j = K^*\mu l p_1,$$

где p_1 — давление; μ и K^* — коэффициенты трения и пропорциональности между работой сил трения и объемом удаленного материала; l — путь трения.

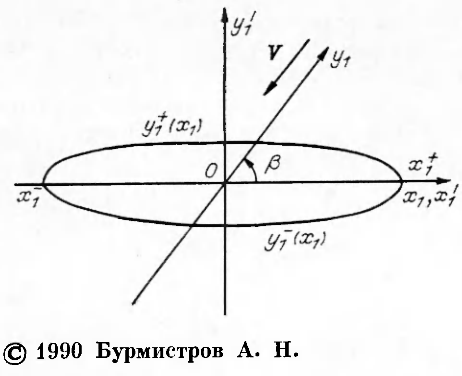
Выберем аффинную систему координат $Ox_1y_1z_1$, связанную с контактом (ось Oz_1 перпендикулярна контакту и направлена в сторону тела *1*), причем $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ имеют единичную длину, угол между $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ равен β (см. рисунок).

Пусть поле вектора скорости скольжения является однородным плоскопараллельным: $\mathbf{V} = -v\mathbf{e}_y$, область контакта $G_1 = \{(x_1, y_1)\colon\ x_1^- \leqslant x_1 \leqslant x_1^+,\ y_1^-(x_1) \leqslant y_1 \leqslant y_1^+(x_1)\}$ ($y_1^\pm(x_1)$— непрерывные функции). Форма тел и контакта не зависит от времени. Это предположение верно, например, в следующих случаях: а) *2* — полупространство, б) *1* — тело качения, *2* — кольцо подшипника.

Уравнение теории упругости с учетом износа имеет вид

$$\theta \iint\limits_{G_1} \frac{p_1(\xi_1, \eta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1 \sin\beta}{r(\xi_1, \eta_1, x_1, y_1)} = w_1(x_1, y_1) - K^*\mu \int\limits_{y}^{y_1^+(x_1)} p_1(x_1, \eta_1)\, d\eta_1. \tag{1.1}$$

Здесь $\theta = \theta_1 + \theta_2$, $\theta_n = (1 - \nu_n^2)/(\pi E_n)$ (ν_n, E_n — коэффициенты Пуассона и модули упругости тел); w_1 — суммарное упругое перемещение; $r(\xi_1, \eta_1, x_1, y_1)$— расстояние между точками ξ_1, η_1 и x_1, y_1; $n = 1$ (2) отвечает телу *1* (*2*).



Предположим, что характерный размер B контакта по оси Oy_1 много меньше соответствующего размера L по оси Ox_1. Введем малый параметр $\varepsilon = B/L$ и безразмерные координаты и переменные: $x = x_1/L$, $\xi =$

$= \xi_1/L,\ y = y_1/B,\ \eta = \eta_1/B,\ x^\pm = x_1^\pm/L,\ y^\pm = y_1^\pm/B,\ \gamma = K^*\mu/(\theta\ \sin\ \beta)$, $p = \theta p_1 \sin \beta$, $w = w_1/B$. Уравнение (1.1) примет вид

$$\iint\limits_G \frac{p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{R_\varepsilon(\xi - x, \eta - y)} = w(x, y) - \gamma \int\limits_y^{y^+(x)} p(x, \eta)\, d\eta,$$

$$R_\varepsilon(u_1, u_2) = [u_1^2 + 2u_1u_2\varepsilon \cos \beta + \varepsilon^2 u_2^2]^{1/2}.$$

Исследуем уравнение в случае узкой области контакта ($\varepsilon \to 0$). В [2] получено асимптотическое уравнение в произвольной криволинейной системе координат при $\varepsilon \to 0$. В аффинной системе координат оно записывается в форме

$$(1.2)\qquad \int\limits_{x^-}^{x^+} \frac{q(\xi) - q(x)}{|\xi - x|}\, d\xi + q(x) \ln \left[\frac{4(x^+ - x)(x - x^-)}{\varepsilon^2 \sin^2 \beta}\right] = w(x, y) +$$

$$+ 2\int\limits_{y^-(x)}^{y^+(x)} p(x, \eta) \ln |y - \eta|\, d\eta - \gamma \int\limits_y^{y^+(x)} p(x, \eta)\, d\eta,\ q(x) = \int\limits_{y^-(x)}^{y^+(x)} p(x, y)\, dy.$$

При $\gamma = 0$ уравнение (1.2), как показано в [2], приводится к одномерному интегральному уравнению относительно $q(x)$. Решим аналогичную задачу при $\gamma \neq 0$.

2. Продифференцировав (1.2) по y, получим

$$(2.1)\qquad \int\limits_{y^-(x)}^{y^+(x)} \frac{p(x, \eta)}{\eta - y}\, d\eta - \frac{\gamma}{2}\, p(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}.$$

Это сингулярное интегральное уравнение при фиксированном x сводится к краевой задаче Римана [3] для регулярной в плоскости с разрезом $[y^-, y^+]$ функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{y^-(x)}^{y^+(x)} \frac{p(x, \eta)}{\eta - z}\, d\eta.$$

Краевая задача имеет вид

$$(2.2)\qquad \Phi^+ = e^{2\pi\varphi i}\Phi^- - \frac{w_y}{\alpha}\, e^{\pi\varphi i},\quad \Phi^+ - \Phi^- = p,$$

где $\varphi = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{2\pi}{\varphi}$; $0 < \varphi \leqslant \dfrac{1}{2}$; $\alpha = \sqrt{\gamma^2 + 4\pi^2}$; Φ^+ (Φ^-)— предельные значения Φ на верхнем (нижнем) берегу отрезка $[y^-, y^+]$. Решение задачи (2.2) строится известными методами [3]. В результате будет

$$(2.3)\qquad \Phi(z) = \frac{1}{Q(z)}\left(C + \frac{1}{\alpha} I(z)\right),\quad \Phi^\pm(y) = \frac{1}{Q^\pm(y)}\left(C + \frac{1}{\alpha} I^\pm(y)\right).$$

Здесь $I(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{y^-}^{y^+} \frac{|Q(\eta)|\, w_y}{\eta - z}\, d\eta$; $Q(z) = (z - y^+)^{1-\varphi}(z - y^-)^\varphi$; $Q^\pm(y) = -e^{\mp\pi\varphi i}|Q(y)|$; $|Q(y)| = (y^+ - y)^{1-\varphi}(y - y^-)^\varphi$. Используя вторую формулу (2.2) и формулы Сохоцкого для $I^\pm(y)$, получаем

$$(2.4)\qquad p(x, y) = -\frac{2Ci \sin \pi\varphi}{|Q(y)|} - \frac{\sin \pi\varphi}{\pi\alpha |Q(y)|} \int\limits_{y^-}^{y^+} \frac{|Q(\eta)|\, w_y}{\eta - y}\, d\eta - \frac{\cos \pi\varphi}{\alpha}\, w_y.$$

Входящая в (2.3), (2.4) величина C определяется по известной нагрузке

q в сечении. Действительно,

$$q = \int\limits_{y^-}^{y^+} p(x, y)\, dy = \int\limits_{y^-}^{y^+} \left(\Phi^+(y) - \Phi^-(y)\right) dy = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} [\Phi(z)].$$

Вычет в бесконечности от слагаемого, содержащего $I(z)$, равен нулю, а $Q(z) \sim z$ при $z \to \infty$, поэтому $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}[\Phi(z)] = -2\pi i C$. Таким образом, $C = -q/(2\pi i)$.

Правая часть уравнения (1.2) не зависит от y. Обозначим ее через $A(x)$ и введем функцию

$$F(x, y) = -\int\limits_{y}^{y^+(x)} p(x, \eta)\, d\eta.$$

Вычисляя по частям первый интеграл в правой части (1.2), имеем

$$\int\limits_{y^-(x)}^{y^+(x)} \frac{F(x, \eta)}{\eta - y}\, d\eta - \frac{\gamma}{2} F(x, y) = \frac{U(x, y)}{2},$$

$$U(x, y) = w(x, y) - A(x) - 2q(x) \ln [y - y^-(x)].$$

Решение этого уравнения дается формулой, аналогичной (2.4), с заменой $w_y(x, y)$ на $U(x, y)$. Однако в отличие от уравнения (2.1) здесь необходимо потребовать ограниченность $F(x, y)$ на отрезке $[y^-(x),\ y^+(x)]$, так как должна существовать $q(x)$. Поскольку

$$F(x, y) = -\frac{\sin \pi\varphi}{\pi\alpha\, |Q(y)|} \left[\int\limits_{y^-}^{y^+} \frac{|Q(\eta)|\, U(x, \eta)}{\eta - y}\, d\eta + C' \right] - \frac{\cos \pi\varphi}{\alpha} U(x, y) \tag{2.5}$$

(C' — произвольная константа) ограничена при $y = y^-$, то выражение в квадратных скобках при $y = y^-$ должно равняться нулю. Таким образом,

$$C' = -\int\limits_{y^-}^{y^+} \left(\frac{y^+ - \eta}{\eta - y^-}\right)^{1-\varphi} U(x, \eta)\, d\eta.$$

Подставляя это значение в (2.5), получаем, что выражение в квадратных скобках равно

$$(y - y^-) \int\limits_{y^-}^{y^+} \left(\frac{y^+ - \eta}{\eta - y^-}\right)^{1-\varphi} \frac{U(x, \eta)}{\eta - y}\, d\eta.$$

Оно должно приравниваться нулю при $y = y^+$ в силу ограниченности $F(x, y)$. Отсюда

$$\int\limits_{y^-}^{y^+} \frac{U(x, \eta)\, d\eta}{(y^+ - \eta)^{\varphi} (\eta - y^-)^{1-\varphi}} = 0. \tag{2.6}$$

Используя табличный интеграл [4]

$$\int\limits_{y^-}^{y^+} (y - y^-)^{\varphi - 1} (y^+ - y)^{-\varphi}\, dy = \frac{\pi}{\sin \pi\varphi}$$

и выражение для $U(x, y)$, из (2.6) имеем

$$A(x) = \frac{\sin \pi\varphi}{\pi} \left[\int\limits_{y^-(x)}^{y^+(x)} \frac{w(x, y)\, dy}{(y^+(x) - y)^{\varphi} (y - y^-(x))^{1-\varphi}} + \right.$$
$$\left. + 2q(x) \int\limits_{y^-(x)}^{y^+(x)} \frac{\ln (y - y^-(x))}{(y^+(x) - y)^{\varphi} (y - y^-(x))^{1-\varphi}}\, dy \right].$$

Второе слагаемое в скобках в результате замены $y = y^-(x) + [y^+(x) - y^-(x)]t$ принимает форму

$$2q(x)\int_0^1 \frac{\ln t\,dt}{(1-t)^{\varphi}t^{1-\varphi}} + \frac{2q(x)\pi}{\sin \pi\varphi}\ln[y^+(x) - y^-(x)].$$

Здесь интеграл равен ([4, с. 502]) $\frac{\pi}{\sin \pi\varphi}[\psi(\varphi) - \psi(1)]$, где $\psi(x) = -C + (x-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+x)}$, C — постоянная Эйлера. Используя полученное выражение для $A(x)$, запишем уравнение (1.2) в окончательном виде:

$$(2.7)\qquad \int_{x^-}^{x^+}\frac{q(\xi)-q(x)}{|\xi - x|}d\xi + q(x)\left\{\ln\left[\frac{4(x^+ - x)(x - x^-)}{\varepsilon^2[y^+(x) - y^-(x)]^2\sin^2\beta}\right] - 2\psi(\varphi) + 2\psi(1)\right\} = \frac{\sin \pi\varphi}{\pi}\int_{y^-(x)}^{y^+(x)}\frac{w(x, y)\,dy}{(y^+(x) - y)^{\varphi}(y - y^-(x))^{1-\varphi}}.$$

Поскольку обычно интенсивность износа невелика, то γ мало и, следовательно, φ близко к 1/2. Поэтому $\psi(\varphi) \approx \psi(1/2) + \psi'(1/2)(\varphi - 1/2)$. Применяя формулы ([4, с. 774]) $\psi(1/2 + z) - \psi(1/2 - z) = \pi\,\mathrm{tg}\,\pi z$, $\psi(1/2) = -C - 2\ln 2$, имеем $\psi'(1/2) = \pi^2/2$, $\psi(\varphi) - \psi(1) = -\ln 4 + (\pi^2/2)(\varphi - 1/2) \approx -\ln 4 - \gamma/4$. Перейдем к нахождению решений уравнения (2.7).

3. Пусть $\varepsilon \to 0$. Тогда из (2.7) в главном следует

$$q(x) = \frac{\sin\pi\varphi}{\pi\ln\frac{1}{\varepsilon^2}}\int_{y^-(x)}^{y^+(x)}\frac{w(x, y)\,dy}{(y - y^-(x))^{1-\varphi}(y^+(x) - y)^{\varphi}}.$$

Таким образом, при очень больших удлинениях контакта нагрузка в сечении полностью определяется упругим перемещением в том же сечении (метод независимых плоских сечений). При не слишком малых ε величина $\ln 1/\varepsilon^2$ невелика и следует учитывать все члены уравнения (2.7). Построим его точные решения.

Предположим, что $x^{\pm} = \pm 1$, $d(x) = (1/2)(y^+(x) - y^-(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ (при этом L и B равны половине длины и ширины контакта). Полуширина контакта зависит от x по эллиптическому закону, хотя контакт может не быть эллиптическим. Обозначим $y_0(x) = (1/2)[y^+(x) + y^-(x)]$, $g(x, y) = w(x, y + y_0(x))$. Уравнение (2.7) примет вид

$$(3.1)\qquad \int_{-1}^{1}\frac{q(\xi) - q(x)}{|\xi - x|}d\xi + K'q(x) = \frac{\sin\pi\varphi}{\pi}\int_{-d(x)}^{d(x)}\frac{g(x, y)\,dy}{(y + d(x))^{1-\varphi}(d(x) - y)^{\varphi}},$$

$$K' = \ln\frac{1}{\varepsilon^2\sin^2\beta} - 2\psi(\varphi) + 2\psi(1).$$

При малой интенсивности износа $K' \approx \ln\frac{16}{\varepsilon^2\sin^2\beta} + \frac{\gamma}{2}$. Полагаем, что $g(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$. В дальнейшем потребуются значения интегралов

$$I_m(d, \varphi) = \int_{-d}^{d}\frac{x^m\,dx}{(d - x)^{\varphi}(d + x)^{1-\varphi}},$$

$$J_m(d, y, \varphi) = \int_{-d}^{d}\frac{(d - x)^{1-\varphi}(d + x)^{\varphi}}{x - y}x^m\,dx, \quad |y| < d.$$

Они находятся стандартными методами ТФКП (вычисления не приводятся):

$$I_m(d, \varphi) = \frac{\pi}{\sin \pi\varphi} \gamma_m(\varphi) d^m,$$

$$\gamma_m(\varphi) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{(-\varphi - k + 1)_k (\varphi - m + k)_{m-k}}{k! (m-k)!},$$

$$\gamma_0(\varphi) = 1,\ \gamma_1(\varphi) = 2\varphi - 1,\ \gamma_2(\varphi) = 2\varphi^2 - 2\varphi + 1;$$

$$J_m(d, y, \varphi) = -\pi \operatorname{ctg} \pi\varphi (y + d)^\varphi (d - y)^{1-\varphi} y^m - \frac{\pi}{\sin \pi\varphi} D_{m+1}(d, y, \varphi),$$

$$D_m(d, y, \varphi) = \sum_{k=0}^{m} \rho_{m-k}(\varphi) y^k d^{m-k},$$

$$\rho_s(\varphi) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} \frac{(\varphi - k + 1)_k (2 - \varphi - s + k)_{s-k}}{k! (s-k)!},$$

$$\rho_0(\varphi) = 1,\ \rho_1(\varphi) = 2\varphi - 1,\ \rho_2(\varphi) = 2\varphi^2 - 2\varphi,\ \rho_3(\varphi) = $$
$$= (2/3)\varphi(1 - \varphi)(1 - 2\varphi).$$

В этих формулах $(a)_k = a(a + 1) \ldots (a + k - 1)$ — символ Похгаммера ($(a)_0 = 1$). Вводя обозначение $Z(x, y) = p(x, y + y_0(x))$, из (2.4) получаем

$$Z(x, y) = -\frac{\sin \pi\varphi}{\alpha\pi} (y + d)^{-\varphi} (d - y)^{\varphi-1} [a_1 J_0(d, y, \varphi) + 2a_2 J_1(d, y, \varphi)] -$$
$$- \frac{\cos \pi\varphi}{\alpha} (a_1 + 2a_2 y) + q \frac{\sin \pi\varphi}{\pi} (y + d)^{-\varphi} (d - y)^{\varphi-1} =$$
$$= (y + d)^{-\varphi} (d - y)^{\varphi-1} \left\{ \frac{\sin \pi\varphi}{\pi} q + \frac{a_1}{\alpha} [(2\varphi - 1) d + y] + \right.$$
$$\left. + \frac{2a_2}{\alpha} [y^2 + (2\varphi - 1) dy + (2\varphi^2 - 2\varphi) d^2] \right\}.$$

Отыщем ограниченное распределение давления. При $y = \pm d$ выражение в фигурных скобках должно равняться нулю. Следовательно ($2/\alpha = \sin \pi\varphi/\pi$),

$$2\varphi d a_1 + 4d^2\varphi^2 a_2 = -2q,\ 2(\varphi - 1) d a_1 + 4d^2(\varphi - 1)^2 a_2 = -2q.$$

Решая систему, находим

$$a_1 = 2(1 - 2\varphi) a_2 d,\ q = 2\varphi(\varphi - 1) a_2 d^2; \tag{3.2}$$

$$Z(x, y) = -\frac{2a_2(x)}{\alpha} (y + d(x))^{1-\varphi} (d(x) - y)^\varphi,\quad p(x, y) =$$
$$= -\frac{2a_2(x)}{\alpha} (y - y^-(x))^{1-\varphi} (y^+(x) - y)^\varphi.$$

Вычислим правую часть уравнения (3.1):

$$\frac{\sin \pi\varphi}{\pi} \int_{-d}^{d} \frac{g(x, y)\, dy}{(y + d)^{1-\varphi} (d - y)^\varphi} = \frac{\sin \pi\varphi}{\pi} [a_0 I_0(d, \varphi) + a_1 I_1(d, \varphi) + a_2 I_2(d, \varphi)] =$$
$$= a_0 + (2\varphi - 1) a_1 d + (2\varphi^2 - 2\varphi + 1) a_2 d^2 = a_0 + \frac{6\varphi^2 - 6\varphi + 1}{2\varphi(1 - \varphi)} q.$$

Уравнение (3.1) принимает вид

$$\int_{-1}^{1} \frac{q(\xi) - q(x)}{|\xi - x|} d\xi + Kq(x) = a_0(x),\quad K = K' - \frac{6\varphi^2 - 6\varphi + 1}{2\varphi(1 - \varphi)}. \tag{3.3}$$

Полученное уравнение рассматривалось в [2, 5], где был найден класс его полиномиальных решений.

Пусть $a_0(x) = l_0 + l_1x + l_2x^2$. Полагая $q(x) = l_0' + l_1'x + l_2'x^2$, подставляя в (3.3) и вычисляя интеграл, приходим к уравнению $-3l_2'x^2 + l_2' - 2l_1'x + K(l_0' + l_1'x + l_2'x^2) = l_0 + l_1x + l_2x^2$, из которого следует

(3.4) $$l_2' = \frac{l_2}{K-3}, \quad l_1' = \frac{l_1}{K-2}, \quad l_0' = \frac{1}{K}\left(l_0 - \frac{l_2}{K-3}\right).$$

4. Используя результаты п. 3, решим задачу о контакте двух параболоидов. Пусть уравнения

$$z_1 = \frac{x_1'^2}{2R_x^1} + \frac{y_1'^2}{2R_y^1}, \quad z_1 = \frac{x_1'^2}{2R_x^2} + \frac{y_1'^2}{2R_y^2} \quad \left(\frac{1}{R_x^1} > \frac{1}{R_x^2}, \frac{1}{R_y^1} > \frac{1}{R_y^2}\right)$$

задают поверхность первого и второго тела в прямоугольной системе координат $Ox_1'y_1'z_1$ (см. рисунок). В случае R_x^2, $R_y^2 \to \infty$ второе тело — полупространство. При соответствующем выборе величин $R_x^{1,2}$, $R_y^{1,2}$ приведенные уравнения описывают формы поверхностей шарика и кольца в подшипнике. Далее,

$$w_1 = \Delta - \frac{x_1'^2}{2R_x} - \frac{y_1'^2}{2R_y}, \quad \frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_x^1} - \frac{1}{R_x^2}, \quad \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_y^1} - \frac{1}{R_y^2},$$

Δ — суммарное упругое перемещение в начале координат. Предположим, что $R_x \gg R_y$. При этом контакт будет вытянутым. Поскольку $x_1' = x_1 + y_1 \cos\beta$, $y_1' = y_1/\sin\beta$, то

$$w_1(x_1, y_1) = \Delta - \frac{x_1^2}{2R_x} - \frac{\cos\beta}{R_x} x_1y_1 - \frac{y_1^2}{2R_\beta}, \quad R_\beta = \left(\frac{\cos^2\beta}{R_x} + \frac{\sin^2\beta}{R_y}\right)^{-1}.$$

В безразмерных переменных

$$w(x, y) = \left(\frac{\Delta}{B} - \frac{L^2}{2BR_x} x^2\right) - \frac{L\cos\beta}{R_x} xy - \frac{B}{2R_\beta} y^2.$$

Следовательно,

(4.1) $$a_0(x) = w(x, y_0(x)),$$

$$a_1(x) = \frac{\partial}{\partial y} w(x, y_0(x)) = -\frac{L\cos\beta}{R_x} x - \frac{B}{R_\beta} y_0(x), \quad a_2(x) = -\frac{B}{2R_\beta}.$$

Так как распределение давления ограничено, то $q(-1) = q(1) = 0$. Тогда $l_1' = l_1 = 0$. Из второго равенства (3.2) вытекает

$$q(x) = l_0' + l_2'x^2 = \varphi(1-\varphi)\frac{B}{R_\beta}(1 - x^2).$$

Таким образом, $l_0' = -l_2' = \varphi(1-\varphi)B/R_\beta$. Из (3.4) находим

(4.2) $$l_2 = \frac{(3-K)\varphi(1-\varphi)B}{R_\beta}, \quad l_0 = \frac{(K-1)\varphi(1-\varphi)B}{R_\beta}.$$

Используя первое равенство (4.1) и то, что $a_0(x) = l_0 + l_2x^2$, получаем уравнение

$$\frac{B}{2R_\beta} y_0^2(x) + \frac{L\cos\beta}{R_x} xy_0(x) + l_0 - \frac{\Delta}{B} + \left(\frac{L^2}{2BR_x} + l_2\right) x^2 = 0,$$

из которого следует, что

(4.3) $$y_0(x) = -\frac{LR_\beta\cos\beta}{BR_x} x \pm \sqrt{F_1 + F_2x^2},$$

$$F_1 = 2\frac{R_\beta}{B}\left(\frac{\Delta}{B} - l_0\right), \quad F_2 = \frac{L^2R_\beta^2\cos^2\beta}{B^2R_x^2} - 2\frac{R_\beta}{B}\left(l_2 + \frac{L^2}{2BR_x}\right).$$

Используя первое соотношение (3.2) и второе (4.1), имеем

$$\mp \frac{B}{R_\beta} \sqrt{F_1 + F_2 x^2} = \frac{(2\varphi - 1) B}{R_\beta} \sqrt{1 - x^2}. \tag{4.4}$$

Поскольку $2\varphi - 1 < 0$, то в (4.3) и (4.4) надо брать верхний знак. Далее, как видно из (4.4), $F_1 = -F_2 = (1 - 2\varphi)^2$. Используя выражение (4.3) для F_1 и F_2 и выражения (4.2) для l_0 и l_2, после преобразований получаем

$$B = \left(\frac{2R_\beta \Delta}{k_0}\right)^{1/2}, \quad \frac{R_\beta}{R_x} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4k_1 \varepsilon^2 \cos^2 \beta}}{2 \cos^2 \beta}, \tag{4.5}$$

где $k_0 = (1 - 2\varphi)^2 + 2(K - 1)\varphi(1 - \varphi)$, $k_1 = (1 - 2\varphi)^2 + 2(K - 3)\varphi(1 - \varphi)$. Пользуясь определением величины R_β, находим

$$\frac{R_y}{R_x} = \operatorname{tg}^2 \beta \frac{1 - \sqrt{1 - 4k_1 \varepsilon^2 \cos^2 \beta}}{1 + \sqrt{1 - 4k_1 \varepsilon^2 \cos^2 \beta}}. \tag{4.6}$$

Сделаем некоторые выводы. Полуширина контакта зависит от x по эллиптическому закону. Средняя линия и «границы» контакта задаются формулами

$$y_0(x) = -\frac{R_\beta \cos \beta}{\varepsilon R_x} x + (1 - 2\varphi) \sqrt{1 - x^2}, \quad y^+(x) =$$
$$= -\frac{R_\beta \cos \beta}{\varepsilon R_x} x + (2 - 2\varphi) \sqrt{1 - x^2}, \quad y^-(x) = -\frac{R_\beta \cos \beta}{\varepsilon R_x} x - 2\varphi \sqrt{1 - x^2}$$

и представляют собой дуги эллипсов, заключенные между касательными, параллельными скорости скольжения, а первое слагаемое в этих формулах определяет прямую линию, соединяющую точки касания. Величина ε находится из трансцендентного уравнения (4.6). Из формулы (4.5) при заданном Δ выводятся максимальная полуширина контакта B и $L = B/\varepsilon$.

Определим нормальную силу P, составляющие касательной силы T_x, T_y и составляющие момента M_x, M_y (на оси Ox_1', Oy_1'), действующие на тело *1* и обусловленные распределением давления, обозначив через G_1' область контакта в координатах x_1', y_1':

$$P = \iint\limits_{G_1'} p_1 \, dx_1' \, dy_1' = \sin \beta \iint\limits_{G_1'} p_1 \, dx_1 \, dy_1 = \frac{LB}{\theta} \int\limits_{-1}^{1} q(x) \, dx = \frac{4\varphi(1 - \varphi) LB^2}{3\theta R_\beta}.$$

Тогда

$$L = \left(\frac{3\theta R_\beta P}{4\varphi(1 - \varphi)\varepsilon^2}\right)^{1/3}, \quad B = \left(\frac{3\varepsilon\theta R_\beta P}{4\varphi(1 - \varphi)}\right)^{1/3}.$$

Найдем T_x и T_y. Пусть уравнение $z_1 = \chi(x_1', y_1')$ задает поверхность деформированного тела *1*. С точностью до несущественной аддитивной постоянной

$$\chi(x_1', y_1') = \frac{x_1'^2}{2R_x^1} + \frac{y_1'^2}{2R_y^1} + \theta_1 S(x_1', y_1'), \quad S(x_1', y_1') =$$
$$= \iint\limits_{G_1'} \frac{p_1(\xi_1', \eta_1') \, d\xi_1' \, d\eta_1'}{\sqrt{(x_1' - \xi_1')^2 + (y_1' - \eta_1')^2}}.$$

Проекции на оси Ox_1', Oy_1' единичной нормали к поверхности определяются формулами

$$n_x = -\frac{\partial \chi}{\partial x_1'}, \quad n_y = -\frac{\partial \chi}{\partial y_1'},$$

а составляющие касательной силы —

$$T_x = -\iint\limits_{G_1'} p_1 \frac{\partial\chi}{\partial x_1'}\, dx_1'\, dy_1', \quad T_y = -\iint\limits_{G_1'} p_1 \frac{\partial\chi}{\partial y_1'}\, dx_1'\, dy_1'.$$

В эти выражения в качестве слагаемого входят величины

$$A_x = \iint\limits_{G_1'} p_1 \frac{\partial S}{\partial x_1'}\, dx_1'\, dy_1', \quad A_y = \iint\limits_{G_1'} p_1 \frac{\partial S}{\partial y_1'}\, dx_1'\, dy_1'.$$

Покажем, что они равны нулю. Действительно,

$$\iint\limits_{G_1'} p_1 \frac{\partial S}{\partial x_1'}\, dx_1'\, dy_1' = -\iint\limits_{G_1'} p_1(x_1', y_1') \left[\iint\limits_{G_1'} \frac{p_1(\xi_1', \eta_1')(x_1'-\xi_1')\, d\xi_1'\, d\eta_1'}{[(x_1'-\xi_1')^2+(y_1'-\eta_1')^2]^{3/2}}\right] dx_1'\, dy_1'.$$

Меняя порядок интегрирования по x_1', y_1' и ξ_1', η_1', получим выражение, отличающееся от правой части последнего равенства лишь знаком. Следовательно, $A_x = 0$. Аналогично $A_y = 0$. Заметим, что доказанные равенства, по-существу,— следствия третьего закона Ньютона (касательные силы, действующие на тела, равны по модулю и противоположно направлены). Используя доказанное, получаем

$$T_x = -\iint\limits_{G_1'} \frac{x_1'}{R_x^1} p_1(x_1', y_1')\, dx_1'\, dy_1' = -\frac{L^2B}{\theta R_x^1} \iint\limits_{G} (x + \varepsilon y\cos\beta)\, p\, dx\, dy =$$

$$= -\frac{LB^2}{\theta R_x^1}\cos\beta \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{y^-(x)}^{y^+(x)} yp\, dy.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_{-d(x)}^{d(x)} Z(x, y)(y + y_0(x))\, dy = y_0(x)\, q(x) - \frac{2a_2(x)}{\alpha} J_2(d(x), 0, 1-\varphi) =$$

$$= y_0(x)\, q(x) + \frac{B}{R_\beta}(1-x^2)^{3/2}\frac{\varphi(1-\varphi)(1-2\varphi)}{3}.$$

Используя равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} y_0(x)\, q(x)\, dx = \frac{\varphi(1-\varphi)B}{R_\beta}\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\left[-\frac{LR_\beta\cos\beta}{BR_x}x + \right.$$

$$\left. + (1-2\varphi)\sqrt{1-x^2}\right] dx = \frac{3\pi\varphi(1-\varphi)(1-2\varphi)B}{8R_\beta},$$

получаем $T_x = -\dfrac{LB^3}{\theta R_x^1}\cos\beta\,\dfrac{\pi\varphi(1-\varphi)(1-2\varphi)}{2R_\beta}$,

затем $T_y = -\displaystyle\iint\limits_{G_1'} \frac{y_1'}{R_y^1} p_1(x_1', y_1')\, dx_1'\, dy_1' = -\frac{LB^2}{\theta R_y^1}\sin\beta \int\limits_{-1}^{1} dx,$

$$\int\limits_{y^-(x)}^{y^+(x)} py\, dy = -\frac{LB^3}{\theta R_y^1}\sin\beta\,\frac{\pi\varphi(1-\varphi)(1-2\varphi)}{2R_\beta}.$$

Ортогональная проекция касательной силы на вектор $\mathbf{V}$ (сила сопротивления)

$$T_r = -T_x\cos\beta - T_y\sin\beta = \pi\varphi(1-\varphi)(1-2\varphi)\frac{LB^3}{2\theta R_\beta}\left(\frac{\cos^2\beta}{R_x^1} + \frac{\sin^2\beta}{R_y^1}\right),$$

а проекция на вектор $[\mathbf{V}, \mathbf{e}_z]$ (боковая сила)

(4.7) $$T_l = \pi\varphi(1-\varphi)(1-2\varphi)\sin\beta\cos\beta\,\frac{LB^3}{2\theta R_\beta}\left(\frac{1}{R_x^1} - \frac{1}{R_y^1}\right).$$

Как видно из (4.7), боковая сила, действующая на тело 1, при $1/R_y{}^1 > 1/R_x{}^1$ $(1/R_y{}^1 < 1/R_x{}^1)$ направлена в ту сторону от вектора $\mathbf{V}$, в которой угол между $\mathbf{V}$ и Ox_1 является острым (тупым). При $\beta = \pi/2$ или $R_x{}^1 = R_y{}^1$ (это равенство выполняется, например, для контакта шарика с кольцом подшипника) боковая сила равна нулю. Если износ отсутствует $(\varphi = 1/2)$, то $T_r = T_l = 0$.

Перейдем к вычислению моментов:

$$M_x = \iint\limits_{G_1'} p_1 y_1' \, dx_1' \, dy_1' = \frac{\sin\beta}{\theta}\iint\limits_{G} p y_1 \, dx_1 \, dy_1 = \frac{LB^2\sin\beta}{\theta}\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{y^-(x)}^{y^+(x)} p y \, dy.$$

Внутренний интеграл уже вычислялся при нахождении T_x, тогда

(4.8) $$M_x = \frac{\pi LB^3}{2\theta R_\beta}\sin\beta\varphi(1-\varphi)(1-2\varphi) = -T_y R_y^1.$$

Далее,

$$M_y = -\iint\limits_{G_1'} p_1 x_1' \, dx_1' \, dy_1' = -\frac{1}{\theta}\iint\limits_{G_1} p_1(x_1 + y_1\cos\beta)\, dx_1 \, dy_1 =$$

$$= -\frac{L^2B}{\theta}\left[\iint\limits_{G} px \, dx \, dy + \frac{B}{L}\cos\beta\iint\limits_{G} py \, dx \, dy\right].$$

Первое слагаемое в скобках равно нулю, поэтому

(4.9) $$M_y = -M_x \operatorname{ctg}\beta = T_x R_x{}^1.$$

Как видно из формул (4.8), (4.9), момент ортогонален скорости скольжения и вызывает опрокидывание тела 1, а его модуль

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \frac{LB^3}{2\theta R_\beta}\varphi(1-\varphi)(1-2\varphi).$$

Если нет износа, момент равен нулю. Центр давления находится на положительной полуоси Oy_1 на расстоянии $3B(1-2\varphi)/8$ от точки O.

Рассмотренная в этом пункте задача обобщает задачу Герца на случай узкого контакта при наличии износа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Галин Л. А.** Контактная задача теории упругости и вязкоупругости.— М.: Наука, 1980.
2. **Бурмистров А. Н.** Контактная задача теории упругости для штампов вытянутой формы // Исследование нестационарного движения сплошной среды: Междувед. сб.— М.: МФТИ, 1987.
3. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.
4. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Элементарные функции.— М.: Наука, 1981.
5. **Бурмистров А. Н.** О давлении вытянутого штампа на упругое полупространство // Трение и износ.— 1988.— Т. 9, № 3.

г. Жуковский *Поступила 9/I 1989 г.*