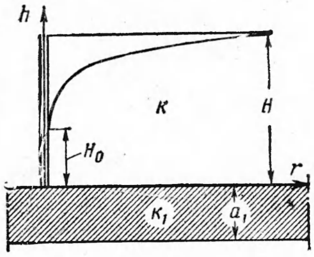
К ЗАДАЧЕ О ДЕБИТЕ СКВАЖИНЫ В БЕЗНАПОРНОМ ДВИЖЕНИИ СО СЛАБОПРОНИЦАЕМЫМ ВОДОУПОРОМ

С. Т. Рыбакова (Новосибирск)

Работа посвящена определению дебита скважины в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором и расчету свободной поверхности путем численного решения нелинейного уравнения (3) на быстродействующей электронно-счетной машине. Производится сравнение с дебитом скважины, вычисленным по приближенным формулам, которые получены линеаризацией уравнения двумя способами. Выяснилось, что линеаризация по второму способу, предложенная П. Я. Полубариновой-Кочиной, дает для напоров и дебитов значения, почти не отличающиеся от точных.

Если водоносный пласт граничит со слабопроницаемым водоупором мощности a_1, коэффициент фильтрации которого k_1 значительно меньше коэффициента фильтрации k водоносного пласта, то считают, что через слабопроницаемый грунт происходит фильтрация в вертикальном направлении со скоростью (фиг. 1)



Фиг. 1

$$w_1 = \frac{k_1}{a_1}(H - h) \tag{1}$$

где h — напор в каком-нибудь сечении водоносного пласта, H — напор (который будем считать постоянным) в нижнем водоносном пласте, находящемся под водоупором. Дифференциальное уравнение установившегося движения будет тогда иметь вид [1]

$$k\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right] - \frac{k_1}{a_1}(h - H) = 0 \tag{2}$$

В случае осесимметричного притока воды к скважине, когда элементы движения зависят лишь от одной координаты r, вместо (2) будем иметь уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rh\frac{dh}{dr}\right) - \frac{k_1}{ka_1}(h - H) = 0 \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \tag{3}$$

В замкнутой форме проинтегрировать уравнение (3) не удается. А. Н. Мятиев [2] предложил заменить его линейным уравнением, заменив множитель h при производной dh/dr некоторой постоянной H° — средним значением h.

Решение линеаризованного уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dh}{dr}\right) - \omega^2(h - H) = 0 \qquad \left(\omega^2 = \frac{k_1}{ka_1H^\circ}\right) \tag{4}$$

при граничных условиях

$$h = H_0 \quad \text{при } r = r_0, \qquad h = H \quad \text{при } r = \infty \tag{5}$$

имеет вид

$$h = H - (H - H_0)\frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \tag{6}$$

Здесь $K_0(X)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента второго рода нулевого порядка. Формулу для дебита по А. Н. Мятиеву можно записать в виде

$$Q = -\frac{2\pi kH_0(H - H_0)}{\ln(R/r_0)} \qquad \left(R = \frac{1.123}{\omega} = 1.123\sqrt{\frac{kH^\circ a_1}{k_1}}\right) \tag{7}$$

Здесь r_0 — радиус скважины, H_0 — уровень на стенке скважины.

П. Я. Кочина [1] заменяет уравнение (3) линейным, сохраняя при этом первый член, содержащий производные, и заменяя во втором члене $(h - H)$ на $(h^2 - H^2)/2H^\circ$.

При сделанных допущениях вместо (3) получается линейное относительно h^2 уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dh^2}{dr}\right) - \omega^2(h^2 - H^2) = 0 \qquad \left(\omega^2 = \frac{k_1}{ka_1H^\circ}\right) \tag{8}$$

В дальнейшем, следуя [1], принимаем $H^\circ = H$. Решение (8), удовлетворяющее условиям (5), имеет вид

$$h^2 = H^2 - (H^2 - H_0^2)\frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \tag{9}$$

Выражение для дебита скважины можно записать в виде

$$Q = -\frac{\pi k\,(H^2 - H_0{}^2)}{\ln (R \,/\, r_0)} \qquad \left(R = \frac{1.123}{\omega} = 1.123 \sqrt{\frac{ka_1H}{k_1}}\right) \tag{10}$$

Таким образом, для дебита скважины имеем две формулы (7) и (10). Точная же формула для дебита скважины будет

$$Q\,(r_0) = -\,2\pi k r_0 H_0 \left(\frac{dh}{dr}\right)_{r=r_0} \tag{11}$$

где $h\,(r)$ — решение уравнения (3).

Это уравнение можно проинтегрировать численно. Для этого приведем его предварительно к безразмерному виду. Положим

$$r = xl, \qquad h = yH \tag{12}$$

Здесь l — некоторая постоянная величина, имеющая размерность длины, x, y — безразмерные переменные. Тогда уравнение (3) примет вид

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(xy\frac{dy}{dx}\right) - \frac{k_1l^2}{ka_1H}\,(y-1) = 0 \tag{13}$$

Величину l можно выбрать так, чтобы множитель при $(y-1)$ обратился в единицу

$$\frac{k_1l^2}{ka_1H} = 1, \qquad l = \sqrt{\frac{ka_1H}{k_1}} = \frac{1}{\omega}$$

при этом имеем

$$y''xy + y'^2x + y'y - x\,(y-1) = 0 \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}\right) \tag{14}$$

Положим $y' = z$. Тогда уравнение (13) сведется к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = z, \qquad z' = \frac{-xz^2 - yz + x\,(y-1)}{xy} \tag{15}$$

Была составлена программа для численного решения этой системы на быстродействующей электронно-счетной машине СО АН СССР. Из приближенных методов численного интегрирования был выбран метод Рунге — Кутта [3].

Для решения этим методом нужно задать начальные условия

$$h = H_0, \qquad \frac{dh}{dr} = h_0' \qquad \text{при } r = r_0$$

В безразмерных величинах эти условия согласно (12) примут вид

$$y = y_0 = \frac{H_0}{H}, \qquad \frac{dy}{dx} = y_0' = z_0 \qquad \text{при } x = x_0 = \frac{r_0}{l}\,l$$

z_0 выражается через $Q\,(r_0)$ — дебит скважины. Действительно

$$Q\,(r_0) = -\,2\pi k r_0 H_0 \left(\frac{dh}{dr}\right)_{r=r_0}$$

$$\left(\frac{dh}{dr}\right)_{r=r_0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}\frac{H}{l} = z_0\frac{H}{l}, \qquad z_0 = -\,\frac{Q\,(r_0)}{2\pi k x_0 H_0 H}$$

Но дебит скважины как раз и предстоит определить. Для вычислений был запрограммирован процесс нахождения из определенного интервала с заданной точностью такого z_0, для которого свободная поверхность при росте x (или r) асимптотически стремится к $y = 1$, т. е. h стремится к $h = H$ — статическому уровню. Для этого задаем определенный интервал изменения параметра, который обозначим как $(z_0{}^\circ,\ z_0{}')$.

Интервал изменения параметра z_0 выбирался следующим образом. Подсчитывался дебит по приближенной формуле (10) и по (11) определялось соответствующее z_0. За левый конец интервала $z_0{}^\circ$ брался нуль, за правый $z_0{}'$ значение $2z_0$. Оказалось, что даже для такого большого понижения, как $H_0 \,/\, H = 0.1$, разница в дебитах, подсчитанных по (10) и (11), составляет меньше 3%. Тогда интервал $(z_0{}^\circ,\ z_0{}')$ был уменьшен до $(z_0 - 0.03z_0,\ \ z_0 + 0.03z_0)$. Этим значительно сокращается время счета на машине.

Сначала величина z_0 берется равной середине интервала $(z_0{}^\circ,\ z_0{}')$. Таким образом, начальные условия будут

$$y = y_0, \qquad z = z_0 = \frac{z_0{}^\circ + z_0{}'}{2} \qquad \text{при } x = x_0 \tag{16}$$

Численно методом Рунге — Кутта в конце первого шага в точке $x_1 = x_0 + h$, где h — шаг, получаем соответствующие этой точке значения $y = y_1$, $z = z_1$.

Величина y_1 должна удовлетворять условиям

$$y_1 > y_0, \qquad y_1 < 1 \qquad (17)$$

Другими словами, каждое последующее значение y больше предыдущего, а стать равным единице y может только на бесконечности. Если первое условие не удовлетворяется, то это означает, что значение z_0 выбрано меньше нужного; в этом случае засылаем середину в левый конец интервала z_0, т. е. интервал будет $(1/2\,(z_0^\circ + z_0'),\ z_0')$. Если не выполняется второе условие, значит значение z_0 выбрано слишком большим и его следует заслать в правый конец интервала; интервал изменения z_0 будет $(z_0^\circ,\ {}^1/_2(z_0^\circ + z_0'))$.

После этого производим сравнение концов интервала. Если разность между концами меньше заданной точности ε, то середина нового интервала берется за истинное значение z_0. Если же это условие не выполняется, то счет начинается сначала. В случае выполнения условий (17) счет продолжается дальше. Определяются y_2 и z_2 в точке $x_2 = x_0 + 2h$, затем y_3 и h_3 в точке $x_3 = x_0 + 3h$ и т. д., причем после каждого шага проверяются условия (17). Счет продолжается до тех пор, пока разность между концами интервала изменения z_0 не станет меньше заданной точности ε. Как только это условие выполнится, машина выдает нужные нам результаты. К ним относятся кривая свободной поверхности и дебит, полученные численным решением нелинейного уравнения (3), кривая свободной поверхности и дебит по формуле (6), кривая свободной поверхности и дебит, вычисленные по уравнению (9). Таким образом, имеем кривую депрессии и дебит по трем разным формулам.

Были приняты следующие значения параметров пластов: $H = 20$ *м*, $k = 20$ *м/сут*, $k_1 = 0.1$ *м/сут*. $a_1 = 10$ *м*, $r_0 = 0.1$ *м*, при которых

$$l = \sqrt{\frac{k a_1 H}{k_1}} = 200$$

Расчеты проводились для различных значений

$H_0 / H = 0.9,\ 0.8,\ 0.7\ 0.6,\ 0.5,\ 0.4,\ 0.3,\ 0.2,\ 0{,}1$

Таблица 1

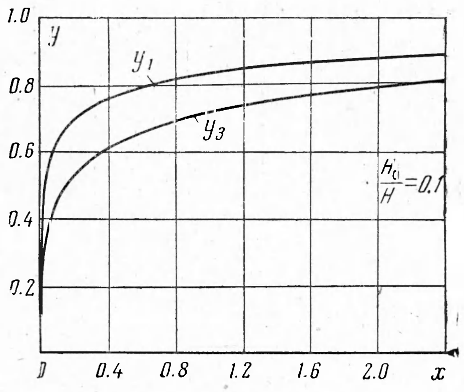
$y_0 = \frac{H_0}{H}$	Q_1, *м³/сут*	Q_2, *м³/сут*	Q_3, *м³/сут*	$Q_1 - Q_2$, *м³/сут*	$Q_1 - Q_3$, *м³/сут*
0.9	619.1	618.8	586	0.30	2.9
0.8	1174	1173	1042	1.00	31.0
0.7	1663	1661	1368	2.00	295.0
0.6	2088	2084	1563	4.00	525.0
0.5	2448	2443	1628	5.00	820.0
0.4	2742	2736	—	6.00	—
0.3	2971	2964	—	7.00	—
0.2	3135	3127	—	8.00	—
0.1	3293	3224	—	69.00	—

Таблица 2

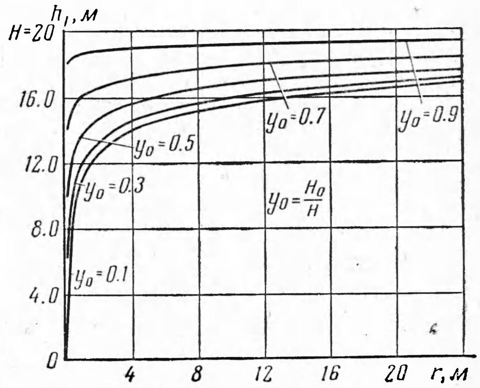
$y_0 = H_0/H = 0.1$

№ точек	$x = \frac{r}{H}$	$y_1 = \frac{h_1}{H}$	$y_2 = \frac{h_2}{H}$	$y_3 = \frac{h_3}{H}$	$\frac{dh_1}{dr}$
1	0,005	0.100	0.100	0.100	131.004
2	0,01	0.3148	0.3145	0.1808	20.431
3	0.015	0.3889	0.3885	0.2281	11.025
4	0.02	0.4339	0.4334	0.2662	7.412
5	0.025	0.4658	0.4652	0.2875	5.523
6	0.03	0.4903	0.4897	0.3089	4.372
7	0.035	0.5102	0.5096	0.3269	3.602
8	0.04	0.5267	0.5261	0.3425	3.053
9	0.045	0.5409	0.5402	0.3563	2.642
10	0.05	0.5534	0.5526	0.3685	2.325
11	0.055	0.5643	0.5636	0.3796	2.072
12	0.105	0.6337	0.6329	0.4551	0.966
13	0.155	0.6721	0.6712	0.505	0.617
14	0.205	0.6983	0.6974	0.5331	0.448
15	0.255	0.7181	0.7171	0.5584	0.351
16	0.305	0.7339	0.7329	0.5793	0.287
17	0.355	0.7471	0.7461	0.5970	0.242
18	0.405	0.7583	0.7571	0.6123	0.209
19	0.455	0.7681	0.7671	0.6258	0.183
20	0.505	0.7767	0.7757	0.6379	0.163
21	1.005	0.8312	0.8302	0.7175	$0.757 \cdot 10^{-1}$
22	1.505	0.8612	0.8602	0.7636	$0.481 \cdot 10^{-1}$
23	2.005	0.8815	0.8806	0.7958	$0.346 \cdot 10^{-1}$
24	2.505	0.8967	0.8958	0.8204	$0.267 \cdot 10^{-1}$
25	3.005	0.9087	0.9078	0.8401	$0.215 \cdot 10^{-1}$
26	3.505	0.9184	0.9176	0.8564	$0.178 \cdot 10^{-1}$
27	4.005	0.9266	0.9258	0.8701	$0.150 \cdot 10^{-1}$
28	4.505	0.9336	0.9328	0.8820	$0.129 \cdot 10^{-1}$
29	5.005	0.9396	0.9389	0.8923	$0.112 \cdot 10^{-1}$
30	5.505	0.9448	0.9442	0.9013	$0.986 \cdot 10^{-2}$
31	10.505	0.9749	0.9745	0.9543	$0.360 \cdot 10^{-2}$
32	15.505	0.9873	0.9871	0.9766	$0.165 \cdot 10^{-2}$
33	20.505	0.9932	0.9931	0.9875	$0.832 \cdot 10^{-3}$
34	25.505	0.9963	0.9962	0.9931	$0.439 \cdot 10^{-3}$
35	30.505	0.9978	0.9978	0.9962	$0.239 \cdot 10^{-3}$
36	35.505	0.9988	0.9988	0.9978	$0.132 \cdot 10^{-3}$
37	40.505	0.9993	0.9993	0.9988	$0.746 \cdot 10^{-4}$
38	45.505	0.9996	0.9995	0.9993	$0.424 \cdot 10^{-4}$
39	50.505	0.9998	0.9997	0.9995	$0.244 \cdot 10^{-4}$
40	55.505	0.9999	0.9998	0.9997	$0.144 \cdot 10^{-4}$
41	60.505	0.9999	0.9999	0.9998	$0.887 \cdot 10^{-5}$
42	65.505	0.9999	0.9999	0.9999	$0.602 \cdot 10^{-5}$

Результаты представлены в табл. 1, где Q_1, Q_2, Q_3 — дебит по формуле (11), (10) и (7) соответственно; из таблицы видно, что разница между дебитом скважины, который получен путем численного интегрирования нелинейного уравнения (3), и дебитом, вычисленным по формуле (10), только для понижения $H_0/H = 0.1$ составляет около 2.1%; в остальных случаях она равна десятым или сотым долям процента.



Фиг. 2



Фиг. 3

Разница между дебитом, определяемым по формуле (7), колеблется от 0,4% для понижения $H_0/H = 0.9$ до 33.5% для $H_0/H = 0.5$. В табл. 2 приводятся значения ординат кривой депрессии для понижения $H_0/H = 0.1$, полученной из нелинейного уравнения (3) и по формулам (6) и (9). Ординаты первой кривой обозначаются через h_1, второй — через h_3, третьей — через h_2. Из табл. 2 видно, что кривые свободной поверхности h_1 и h_2 практически совпадают, поэтому на фиг. 2 представлены кривые h_1 и h_3. Как видно из фигуры, для небольших x имеется существенная разница между h_1 и h_3. На фиг. 3 представлена кривая свободной поверхности согласно (3) для понижений $H_0/H = 0.1$, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9. В задаче вычислялся дебит при заданном значении параметра $l = \sqrt{ka_1H/k_1}$. Заметим, что l пропорционально радиусу влияния скважины на дебит. Поэтому интересно было проследить зависимость дебита от этого параметра.

Таблица 3

$H_0/H = 0.5$

l	Q_1, м³/сут	Q_2, м³/сут	Q_3, м³/сут	Q_1-Q_2, м³/сут	Q_1-Q_3, м³/сут
50	2987	2978	1985	9	1002
63.3	2856	2848	1899	8	957
100.0	2690	2684	1789	6	901
133.3	2584	2578	1719	6	865
200.0	2448	2443	1628	5	820
400.0	2245	2241	1494	4	751
633.3	2146	2113	1409	3	707
1000.0	2025	2021	1347	4	678
1330.0	1968	1961	1307	7	661
2000.0	1899	1881	1254	18	645
4000.0	1812	1760	1173	52	639

Из табл. 3 видно, что по все трем формулам дебит увеличивается с уменьшением l и убывает с возрастанием l. Для всех рассмотренных случаев H_0/H берется равным 0,5. Из табл. 3 также видно, что и в этих случаях разница между Q_1 и Q_2 очень мала, а между Q_1 и Q_3 она значительна.

Благодарю В. Н. Эмиха за помощь в работе.

Поступила 22 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. П о л у б а р и н о в а-К о ч и н а. П. Я. О дебите скважины в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 3.
3. М я т и е в А. Н. Задача о колодцах в горизонте грунтовых вод. Изв. АН СССР, ОТН, 1948, № 3.
3. Б е з и к о в и ч Я. С. Приближенные вычисления. Гостехиздат, 1949.