

ОДНОРОДНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

УДК 539.37

А. Ф. Ревуженко

Институт горного дела СО РАН, 630091 Новосибирск

Большинство математических моделей, которые используются в механике сплошных сред, носят феноменологический характер. Это означает, что они основаны на данных экспериментов по деформированию того или иного материала. Возникает вопрос, какими должны быть эти эксперименты? В принципе при построении модели можно использовать любые эксперименты; например, для твердых тел — эксперименты по вдавливанию различных штампов. Однако для их интерпретации необходимо заранее предположить некоторую модель среды, решить в рамках этой модели краевую задачу, сделать сравнение с экспериментом, провести корректировку модели и т. д. На этапе, связанном с решением краевой задачи, как правило, возникают значительные трудности. Поэтому более предпочтительными являются эксперименты, для которых расчеты упрощаются, например эксперименты по кручению тонкостенных трубчатых образцов. Идеальными же являются такие эксперименты, для интерпретации которых решения краевой задачи вообще не требуется. Здесь все напряжения и деформации определяются непосредственно по известным на границе смещениям и силам независимо от реологии среды.

Самый простой пример — всестороннее сжатие тела давлением p . Пусть тело имеет форму шара радиуса R , центр шара неподвижен, $u(R)$ — радиальное смещение границы. Тогда при выполнении некоторых ограничений общего характера можно утверждать, что компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij} = p\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), а смещения $u(r) = u(R)r/R$ (r — расстояние от центра). Экспериментов только на всестороннее сжатие, конечно, недостаточно. Необходимо изучение более сложных программ нагружения. Поэтому возникает задача описания всех теоретически идеальных способов нагружения, которые можно было бы применять для построения математических моделей различных сред, а также для определения параметров, фигурирующих в этих моделях. Перейдем к более строгой формулировке, которая позволит выявить дополнительные ограничения.

1. Постановка задачи. В общем случае процесс деформирования сплошной среды описывается замкнутой системой уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = \rho \frac{dv_i}{dt}; \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= R_{ij}[e_{kl}, \varepsilon_{kl}], \quad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right), \\ 2e_{kl} &= \frac{\partial u_k}{\partial x_l^0} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k^0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_k^0} \frac{\partial u_1}{\partial x_l^0} + \frac{\partial u_2}{\partial x_k^0} \frac{\partial u_2}{\partial x_l^0} + \frac{\partial u_3}{\partial x_k^0} \frac{\partial u_3}{\partial x_l^0}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$u_i = f_i(t_1, x_1, x_2, x_3) \quad \text{при} \quad (x_1, x_2, x_3) \in S_t; \quad (1.3)$$

$$u_i|_{t=0} = g_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0), \quad v_i|_{t=0} = G_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0). \quad (1.4)$$

Здесь σ_{ij} , e_{kl} , ε_{kl} — компоненты тензоров напряжений, деформаций и скоростей деформаций; u_i , v_i , ρX_i — компоненты векторов перемещений, скоростей и массовых сил; ρ — плотность; S_t — граница области в момент t ; f_i , g_i , G_i — граничные и начальные условия; x_i — декартовы координаты; x_i^0 — координаты материальной точки в начальный момент времени. Все индексы принимают значения 1, 2, 3. Определяющие уравнения (1.2)

записаны символически через функционалы R_{ij} .

Система уравнений (1.1)–(1.4) замкнута. Поэтому, если нет данных хотя бы об одном из них, задача становится неопределенной. Есть, однако, исключительные ситуации, когда информации только о краевых условиях уже достаточно для определения кинематики деформирования среды. Подставим равенства (1.2) в (1.1). Получим замкнутую систему относительно перемещений. Видно, что функционалы R_{ij} не влияют на кинематику только в тех случаях, когда распределение деформаций и их скоростей от пространственных координат не зависит. Кроме того, материал должен быть однородным, а массовые силы, включая инерционные, — пренебрежимо малыми. Условие однородности деформаций приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3, \quad (1.5)$$

где коэффициенты a_{ij} зависят только от времени t .

Решение системы (1.5) можно представить в виде

$$x_i(t) = b_{i1}x_1^0 + b_{i2}x_2^0 + b_{i3}x_3^0. \quad (1.6)$$

Матрицы $B = (b_{ij})$ и $A = (a_{ij})$ связаны: $A = (dB/dt)B^{-1}$.

Нетрудно получить условия, достаточные для реализации процесса (1.5). Пусть в момент t^0 деформируемая область ограничена замкнутой поверхностью S^0 . Зададим на ней вектор скорости в соответствии с равенствами (1.5). Пусть массовые силы отсутствуют, а нагружение носит квазистатический характер. Следовательно, инерционными членами можно пренебречь, и необходимость в начальных условиях отпадает. Предположим, что имеет место единственность решения. В частности, исключим реологическую неустойчивость [1, 2], локализацию сдвигов, разрушение и т. д. Тогда из выполнения равенств (1.5) на границе следует их выполнение и внутри области. Иными словами, при заданных на границе скоростях кинематика деформирования внутри области будет одной и той же как для упругих, так и для вязких, упруговязкопластических и любых других материалов. Формально можно сказать, что равенства (1.5) дают набор универсальных решений системы (1.1)–(1.4) для любых типов определяющих уравнений.

2. Общая классификация однородных течений. Проанализируем систему (1.5). Особых трудностей в построении ее решений не возникает. Более того, с самого начала можно было исходить из равенств (1.6), которые при любом выборе матрицы B дают те или иные конкретные течения. Проблема здесь состоит в другом. Множество всех аффинных течений (1.6) определяется девятью скалярными функциями одного аргумента. Это довольно широкий класс. Задача состоит в том, чтобы сделать этот класс обозримым и выделить из него течения, которые можно было бы реализовать практически.

Обратимся к системе (1.5). Если для коэффициентов a_{ij} ввести обозначения

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \varepsilon_{11}x_1 + (\varepsilon_{12} - \Omega_3)x_2 + (\varepsilon_{13} + \Omega_2)x_3, & \frac{dx_2}{dt} &= (\varepsilon_{12} + \Omega_3)x_1 + \varepsilon_{22}x_2 + (\varepsilon_{23} - \Omega_1)x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= (\varepsilon_{13} - \Omega_2)x_1 + (\varepsilon_{23} + \Omega_1)x_2 + \varepsilon_{33}x_3, \end{aligned} \quad (2.1)$$

то можно сказать, что все элементы среды подвергаются сложному нагружению. При этом $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ — скорость вектора поворота, а ε_{ij} — по-прежнему компоненты тензора скоростей деформаций.

Следует отметить, что в данной постановке наложение вращения носит нетривиальный характер и существенно влияет на всю кинематику. Роль вращения можно представить следующим образом. Предположим, что в системе координат $Ox_1x_2x_3$ задано устройство нагружения, которое при включении на время Δt сообщает телу деформации $\varepsilon_{ij}\Delta t$.

При этом главные оси тензора скоростей деформации неподвижны (простое нагружение). Включим устройство на время Δt . Каждая точка образца получит соответствующие перемещения. Затем удалим устройство и в течение следующего промежутка времени повернем тело как жесткое целое на угол $|\Omega|\Delta t$ вокруг вектора Ω . Затем опять дадим телу деформации $\varepsilon_{ij}\Delta t$ и т. д. В результате придем к сложному нагружению с непрерывным поворотом осей тензора деформаций ($\Delta t \rightarrow 0$).

В [3] был рассмотрен частный случай, когда в качестве исходной деформации фигурировал простой сдвиг (плоскопараллельное течение Куэтта). В [4] построен класс точных решений задачи о движении идеальной жидкости со свободной границей и линейным полем скоростей. Ниже в развитие [3, 5] рассмотрим общий случай (2.1).

Ограничимся вначале стационарными течениями ($a_{ij} = \text{const}$). Характер решения линейных систем, как известно, зависит от собственных значений матрицы A . В трехмерном пространстве хотя бы одно из них будет действительным. Частицы, которые лежат вдоль собственного вектора, могут двигаться только вдоль этого же вектора: $dx/dt = Ax = \lambda x$, $\lambda = \text{const}$, x — столбец (x_i) . Следовательно, найдутся системы координат, в которых либо $a_{13} = a_{23} = 0$, либо $a_{31} = a_{32} = 0$ ($\varepsilon_{13} = \Omega_2$, $\varepsilon_{23} = -\Omega_1$). Остановимся на втором варианте. Без ограничения общности можно принять, что $\varepsilon_{12} = 0$. Тогда

$$\dot{x}_1 = \varepsilon_{11}x_1 - \Omega_3x_2 + 2\Omega_2x_3, \quad \dot{x}_2 = \Omega_3x_1 + \varepsilon_{22}x_2 - 2\Omega_1x_3, \quad \dot{x}_3 = \varepsilon_{33}x_3. \quad (2.2)$$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = \varepsilon/2 \pm (1/2)\sqrt{D}$, $\lambda_3 = \varepsilon_{33}$, где $D = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 - 4\Omega_3^2$; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$.

Согласно (2.2), частицы, которые находятся в плоскости $x_3 = 0$, покинуть эту плоскость не могут. Поэтому рассмотрим сначала кинематику течения в этой плоскости. Представим, что в какой-то момент в среде распались все связи между частицами; роль связей взяли на себя некоторые эффективные массовые силы. Из (2.2) видно, что при $x_3 = 0$ компоненты последних имеют вид

$$\ddot{x}_1 = (\varepsilon_{11}^2 - \Omega_3^2)x_1 - \varepsilon\Omega_3x_2, \quad \ddot{x}_2 = \varepsilon\Omega_3x_1 + (\varepsilon_{22}^2 - \Omega_3^2)x_2. \quad (2.3)$$

Теперь кинематику можно представить как движение совокупности материальных частиц в поле сил (2.2) с начальными скоростями $\dot{x}_1 = \varepsilon_{11}x_1^0 - \Omega_3x_2^0$, $\dot{x}_2 = \Omega_3x_1^0 + \varepsilon_{22}x_2^0$. Легко заметить, что массовые силы имеют потенциал только при $\Omega_3\varepsilon = 0$. Случай $\Omega_3 = 0$ соответствует двухосному растяжению (сжатию) вдоль фиксированных направлений Ox_1 , Ox_2 . Случаю $\varepsilon = 0$, $\Omega_3 \neq 0$ отвечает центральное поле сил. Траектории частиц представляют собой либо гиперболы ($D > 0$), либо эллипсы ($D < 0$), либо семейство параллельных прямых ($D = 0$). При $\varepsilon \neq 0$ указанные траектории деформируются вследствие всестороннего сжатия или растяжения. При этом потенциальность поля сил теряется и материальные точки в общем случае либо удаляются на бесконечность, либо неограниченно приближаются к центру. Если $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$, то прямая $x_2/x_1 = \varepsilon_{11}/\Omega_3$ неподвижна.

Нетрудно понять, каким образом эта плоская картина разворачивается в пространство. Рассмотрим ориентацию собственного вектора, который соответствует λ_3 . Предположим, что $\lambda_3 \neq \lambda_{1,2}$. Тогда собственный вектор направлен вдоль прямой

$$x_1 = 2 \frac{\Omega_1\Omega_3 - \Omega_2(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})}{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) + \Omega_3^2} x_3, \quad x_2 = 2 \frac{\Omega_2\Omega_3 + \Omega_1(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})}{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) + \Omega_3^2} x_3. \quad (2.4)$$

Последнее уравнение системы (2.2) показывает, что плоскость x_3 удаляется от неподвижной плоскости $x_3 = 0$ по закону $x_3(t) = x_3^0 \exp(\varepsilon_{33}t)$. В данной плоскости разыгрывается точно такая же картина, что и в плоскости $x_3 = 0$. При этом центру $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ соответствует точка (2.4).

Особые случаи реализуются, когда хотя бы одно из значений $\lambda_{1,2}$ стремится к λ_3 . Здесь прямая (2.3) стремится к плоскости $x_3 = 0$, и указанный выше механизм переноса

вырождается.

Таким образом, можно дать следующую общую классификацию однородных течений.

1. Дискриминант $D < 0$. Сюда попадают течения, в которых материальные частицы обращаются вокруг центра по эллиптическим траекториям; назовем эти течения *эллиптическими*.

2. $D > 0$, $\lambda_3 \neq \lambda_1$, $\lambda_3 \neq \lambda_2$. Сюда входят течения, где частицы движутся по гиперболическим траекториям; назовем их *гиперболическими*.

3. $D = 0$. Сюда входят оставшиеся течения.

Рассмотрим однородные течения с точки зрения возможности их реализации. Здесь более важной является другая классификация. Как и для «фазовой жидкости» [6], течение назовем финитным, если траектории частиц лежат в ограниченной области, а инфинитным — в противном случае. Практически можно иметь дело только с ограниченной областью. Поэтому в стационарном режиме инфинитные течения можно реализовать только при условии, что через границу области обеспечиваются приток и отток нового материала. Более удобными являются процессы, когда деформируемый образец состоит из одних и тех же материальных частиц. В стационарном режиме это возможно только для финитных течений: $D < 0$, $\epsilon_{33} \leq 0$, $\epsilon_{11} + \epsilon_{22} \leq 0$. Если хотя бы в одном из последних условий выполняется строгое неравенство, то материал испытывает сжатие, которое реализовать практически невозможно. По этой причине следует положить $\epsilon_{33} = 0$, $\epsilon_{11} + \epsilon_{22} = 0$. Далее необходимо выбрать подходящую форму образца (т. е. поверхность S_0) и на его границе задать вектор скорости, принадлежащий указанному выше классу (1.5).

Рассмотрим класс течений, для которых поверхность S_0 переходит сама в себя. Последнее означает, что в процессе деформирования внешняя конфигурация образца остается неизменной. Идея этого шага связана с моделированием приливной деформации Земли [7]. В модели приливных волн реализовалась именно такая ситуация, и она оказалась удобной в практическом осуществлении.

Общее описание аффинных течений подобного типа можно получить следующим образом. Введем новую систему координат $Oy_1y_2y_3$. Зададим в ней некоторое тело вращения, ограниченное поверхностью S^* . Отобразим S^* в систему координат $Ox_1x_2x_3$ с помощью аффинного преобразования

$$x_1 = k_1 y_1, \quad x_2 = k_2 y_2, \quad x_3 = k_3 y_3. \quad (2.5)$$

Деформацию (2.5) назовем исходной. В качестве S_0 выберем образ S^* в координатах $Ox_1x_2x_3$. Заставим теперь вращаться прообраз S^* вокруг оси симметрии. В каждый момент времени будем осуществлять преобразование (2.5). Так как поверхность S^* переходит в себя, то и поверхность S^0 будет сохранять это свойство. Ясно, что тогда внутренние точки области S^0 будут испытывать аффинную деформацию. Определим ее параметры. Пусть скорость вращения $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ постоянна. Тогда в системе координат Oy_i имеем

$$\dot{y}_1 = -\omega_3 y_2 + \omega_2 y_3, \quad \dot{y}_2 = \omega_3 y_1 - \omega_1 y_3, \quad \dot{y}_3 = -\omega_2 y_1 + \omega_1 y_2. \quad (2.6)$$

Продифференцировав (2.5) по времени, используя (2.6) и заменяя y_i через x_i/k_i , получим

$$\dot{x}_1 = -\frac{k_1 \omega_3}{k_2} x_2 + \frac{k_1 \omega_2}{k_3} x_3, \quad \dot{x}_2 = \frac{k_2 \omega_3}{k_1} x_1 - \frac{k_2 \omega_1}{k_3} x_3, \quad \dot{x}_3 = -\frac{k_3 \omega_2}{k_1} x_1 + \frac{k_3 \omega_1}{k_2} x_2. \quad (2.7)$$

Здесь собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$, $\lambda_3 = 0$. Следовательно, класс течений (2.7) совпадает с описанным выше классом финитных течений типа $\epsilon_{33} = 0$, $\epsilon_{11} + \epsilon_{22} = 0$. (По смыслу очевидно, что переменные x_i в равенствах (2.2) и (2.7) относятся к разным системам координат.) Представление течений (2.2) в форме (2.7) позволяет использовать преобразования (2.5), (2.6) в качестве алгоритма для выбора формы образца

и программы его нагружения. Перейдем теперь к анализу конкретных течений.

3. Плоские течения. Предположим, что поворот осуществляется вокруг оси Ox_3 , т. е. $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$. Тогда направляющая прямая (2.4) переходит в вертикальную, а деформация в целом становится плоской. Рассмотрим эллиптические течения типа $D < 0$, $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0$. В качестве прообраза тела выберем прямой круговой цилиндр. Подвергнем его двухосному сжатию в направлениях, ортогональных образующей. В результате цилиндр превратится в эллиптический, но останется прямым. Вращение прообраза вокруг оси симметрии дает плоское эллиптическое течение

$$\dot{x}_1 = kx_1 - \Omega_3 x_2, \quad \dot{x}_2 = \Omega_3 x_1 - kx_2 \quad (k = \varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22}), \quad (3.1)$$

которому соответствует центральное поле эффективных массовых сил, обладающих потенциалом. Поэтому закон обращения материальных частиц вокруг центра будет кеплеровским:

$$\mathbf{v}\mathbf{n} = 0; \quad |\mathbf{v} \times \mathbf{r}| = \Omega_3 (x_1^0)^2 = \text{const}. \quad (3.2)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — нормаль к границе; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат; $\mathbf{v}$ — вектор скорости. Для определенности взята материальная точка с начальными координатами $(x_1^0, 0)$. Граница области совпадает с траекторией точки $(x_1^0, 0)$ и представляет собой эллипс с полуосями

$$a = x_1^0 \sqrt{\frac{\Omega_3}{\Omega_3 - k}}, \quad b = x_1^0 \sqrt{\frac{\Omega_3}{\Omega_3 + k}}. \quad (3.3)$$

Оси эллипса направлены по биссектрисам $x_2 = \pm x_1$. Таким образом, если на границе эллиптической области задать кеплеровское распределение скоростей, то внутри области может быть реализовано только однородное распределение деформаций и напряжений. При этом нагружение должно быть достаточно медленным, чтобы инерционные эффекты полностью отсутствовали.

Любым подобным требованиям можно удовлетворить только приближенно. Поэтому возникает вопрос, как изменится течение (3.1) в случаях, когда инерционные эффекты становятся существенными? Результатов, которые не зависели бы от реологии среды, здесь получить невозможно. Рассмотрим случай линейно-вязкой жидкости. Как обычно, введем безразмерные переменные, которые обозначим так же, как и размерные. Выше равенства (3.2) были получены как следствие (3.1). Теперь постановка иная. Равенства (3.2), (3.3) необходимо рассматривать в качестве изначально заданных краевых условий. Краевая задача ставится для стационарных уравнений Навье — Стокса:

$$\begin{aligned} \Delta v_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \text{Re} \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right), \\ \Delta v_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \text{Re} \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

(p — давление, Re — число Рейнольдса). Точное решение задач (3.2)–(3.4) имеет вид

$$v_1 = kx_1 - \Omega_3 x_2, \quad v_2 = \Omega_3 x_1 - kx_2, \quad p = p^0 + \text{Re} \frac{\Omega_3^2 - k^2}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad (3.5)$$

где p^0 — аддитивная постоянная. Вид решения (3.5) не изменится, если краевые условия (3.2) поставить на гиперболах ($\Omega_3 < k$), либо на паре параллельных прямых ($\Omega_3 = k$, течение Куэтта). Из (3.5) видно, что линии постоянного давления представляют собой окружности. Для эллиптических течений с удалением от центра давление возрастает, для гиперболических течений убывает, а для течения Куэтта остается постоянным. Решение также показывает, что инерционные силы полностью компенсируются градиентом

давления. Именно поэтому кинематика течения от сил инерции не зависит. Такой вывод сохраняется для любых значений Re . Здесь, правда, возникает дополнительный вопрос об устойчивости течения (3.3) при увеличении Re . Известно, что для плоскопараллельного течения Куэтта ($\Omega_3 \rightarrow k$, $a \rightarrow \infty$) устойчивость сохраняется по отношению к любым возмущениям [8]. По-видимому, аналогичный результат будет иметь место и для эллиптических течений с кеплеровскими краевыми условиями.

Таким образом, решение (3.5) дает пример течения, в котором задание специальных краевых условий для скоростей гарантирует определенную кинематику течения, не зависящую от Re . Естественно возникает вопрос, существуют ли другие течения, обладающие таким же свойством?

Задачу можно поставить таким образом: необходимо описать класс течений, удовлетворяющих системе (3.4), для которых поле скоростей v_1, v_2 от Re не зависит (давление, конечно, от Re зависит). Продифференцируем первые два уравнения по параметру Re и воспользуемся условиями $\partial v_i / \partial Re = 0$. В результате получим два новых уравнения:

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \quad v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_2}. \quad (3.6)$$

Здесь $Q = -\partial p / \partial Re$. Легко показать и обратное: если поле сил инерции имеет потенциал (3.6), то кинематика течения не будет зависеть от Re . Введем функцию тока Φ :

$$v_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}.$$

Исключим переменные p и Q . В результате получим переопределенную систему уравнений:

$$\Delta \Delta \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_1} = 0. \quad (3.7)$$

Смысл уравнений предельно ясен. Предположение о независимости кинематики от Re включает в себя и крайние случаи, когда $Re \rightarrow 0$ и $Re \rightarrow \infty$. Случаю $Re \rightarrow 0$ отвечает первое уравнение (3.7) — ползущее приближение, а $Re \rightarrow \infty$ — второе уравнение (3.7), при этом свойства вязкой жидкости приближаются к свойствам идеальной жидкости. Введем комплексную переменную $z = x_1 + ix_2$. Тогда общее решение первого уравнения (3.7) можно представить в виде (формула Гурса [9])

$$2\Phi = \bar{z}\varphi + \chi + z\bar{\varphi} + \bar{\chi}, \quad (3.8)$$

где $\varphi(z)$, $\chi(z)$ — две произвольные аналитические функции аргумента z . Подстановка (3.8) во второе уравнение (3.7) приводит к уравнению

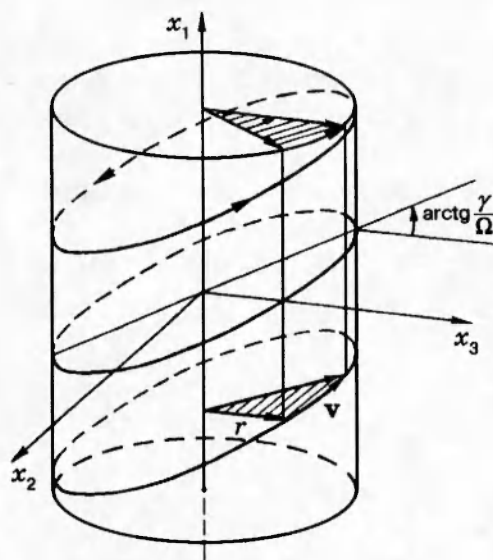
$$\text{Im}[\varphi''(\varphi + z\bar{\varphi}' + \bar{\psi})] = 0 \quad (\psi = \chi'). \quad (3.9)$$

Равенство (3.9) дает исчерпывающее описание класса течений, в которых кинематика не зависит от Re . В частности, к плоскому эллиптическому течению с кеплеровскими краевыми условиями на границе можно прийти, если положить $\varphi''(z) = 0$, $\psi(z) = kz$.

4. Пространственные течения. Поиск удобных для реализации пространственных течений проще всего осуществлять по алгоритму (2.5)–(2.7). Возьмем тело в виде прямого кругового цилиндра. Поставим ему в соответствие другой экземпляр такого же тела, но подвергнутого деформации сдвига. Сдвиг осуществим таким образом, чтобы основания цилиндра остались круговыми. Будем вращать прообраз вокруг оси симметрии с некоторой постоянной угловой скоростью θ . Тогда деформацию образа можно описать уравнениями

$$v_1 = \gamma x_2 + \theta x_3, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = -\theta x_1, \quad \gamma, \theta = \text{const}. \quad (4.1)$$

В соответствии с (4.1) основания наклонного цилиндра вращаются как жесткие целые с постоянной и одинаковой угловой скоростью θ . Точно так же вращаются и все сечения



тела, параллельные основаниям. В [5] описана реализация (4.1) и приведены экспериментальные данные по деформированию сыпучего материала.

Далее, осуществим другой тип сдвига преобраза — вдоль оси симметрии. Тогда его боковая поверхность останется круговой цилиндрической, а основания преобразуются в эллипсы (см. рисунок). Жесткое вращение преобраза приведет к следующему однородному процессу деформирования:

$$v_1 = \gamma x_2, \quad v_2 = -\Omega x_3, \quad v_3 = \Omega x_2. \quad (4.2)$$

Все траектории материальных частиц представляют собой эллипсы, полученные сечениями круговой цилиндрической поверхности плоскостями, параллельными основаниям. Закон обращения частиц по эллиптическим орбитам является кеплеровским: за равное время радиус-вектор частицы ометает равные площади. Плоскость орбиты составляет с плоскостью Ox_2x_3 неизменный угол. Поэтому проекция материальной точки на Ox_2x_3 будет двигаться по окружности с постоянной угловой скоростью. Это обстоятельство можно использовать для конструктивной реализации кеплеровских краевых условий.

Класс нагружений типа (2.7) обладает одним замечательным свойством. Возьмем некоторый образец тела формы $\tilde{S}^0$ в естественном ненапряженном состоянии. Преобразуем его в S^* по закону (2.5). Этому преобразованию будут соответствовать некоторые инварианты тензора деформаций. Дальнейшее нагружение будем осуществлять по программе (2.7). Легко показать, что результатом этого нагружения будет только поворот главных осей тензора деформаций. Сами значения инвариантов тензора остаются при этом неизменными. Таким образом, здесь реализуется специальный тип нейтрального нагружения с непрерывным поворотом осей тензора деформаций. В случае (4.1) первое главное направление равномерно вращается в плоскости Ox_1x_3 , а два других описывают конические поверхности так, что угол между каждым из них и плоскостью Ox_1x_3 остается неизменным. В случае (4.2) аналогичная картина реализуется относительно плоскости Ox_2x_3 .

Рассмотрим теперь роль инерционных эффектов для пространственных течений. Пусть по-прежнему на границе некоторой области задано распределение скоростей (2.1). Предположим, что течение носит стационарный характер, но инерционными силами пренебречь нельзя. Поставим вопрос: какие необходимо принять дополнительные условия, чтобы распределение деформаций и их скоростей оставалось по-прежнему однородным? Как и для плоского случая, легко показать, что основным здесь является условие несжи-

маемости среды.

Предположим, что определяющие уравнения среды зависят только от девиатора тензора напряжений. Иными словами, аддитивное гидростатическое давление на кинематику среды влияния не оказывает. Для аффинных течений подобных сред можно допустить наличие неоднородного распределения давления. В этом случае инерционные силы должны полностью компенсироваться градиентом давления. Последнее эквивалентно условию существования потенциала инерционных сил.

Запишем соотношения вида (3.6) для трехмерного случая, исключив потенциал и подставив вместо скоростей выражения (2.1). После несложных преобразований получим однородную систему уравнений:

$$\begin{aligned} -(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\Omega_1 + \varepsilon_{12}\Omega_2 + \varepsilon_{13}\Omega_3 &= 0, & \varepsilon_{12}\Omega_1 - (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33})\Omega_2 + \varepsilon_{23}\Omega_3 &= 0, \\ \varepsilon_{13}\Omega_1 + \varepsilon_{23}\Omega_2 - (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\Omega_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Нетривиальные решения системы позволяют дать описание течений, которые сохраняют однородный характер не только при квазистатическом нагружении, но и когда инерционные силы становятся существенными. Пусть вектор поворота $\Omega \neq 0$. Направим его вдоль оси Ox_3 . Тогда $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$. Соотношения (4.3) дают $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$, $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0$. Из условия несжимаемости следует, что и $\varepsilon_{33} = 0$. Полученный результат означает, что течение должно быть плоским, т. е. при $\Omega \neq 0$ пространственных течений, которые не зависели бы от сил инерции, не существует.

Пусть $\Omega = 0$. Тогда уравнения (4.3) удовлетворяются при любых ε_{ij} . Таким образом, любое однородное течение, в котором главные оси тензора скоростей деформаций относительно материальных объемов не поворачиваются, не будет зависеть от сил инерции.

5. Нестационарные течения. Во многих случаях необходимо исследовать нагружения с изломами траекторий, циклические сдвиги и т. д., что возможно только при нестационарных режимах деформирования. Формально это означает, что в уравнениях (2.1) необходимо допустить зависимость коэффициентов от времени. Множество нестационарных течений неизмеримо богаче, чем стационарных. Однако рассмотренная выше классификация позволяет описать и важнейшие нестационарные течения. Возьмем отображения (2.5) и (2.6). Будем вращать прообраз S^0 вокруг осей симметрии по произвольной программе, допуская переменную скорость, изменение направления вращения и т. д. Ясно, что, как и в стационарном случае, поверхность S^* будет по-прежнему переходить сама в себя. В соответствии с этим поверхность образца S^0 также будет переходить в себя; материал внутри области будет испытывать аффинную нестационарную деформацию. Общее описание течений этого класса можно получить, если в качестве прообраза S^* взять сферу. Сферу можно вращать вокруг центра по любой программе. При этом поверхность сферы S^* , а следовательно, и ее образ S^0 будут переходить в себя.

Можно указать еще один метод получения нестационарных течений. Пусть (1.6) — решение некоторых нестационарных уравнений (1.5). Коэффициенты b_{ij} зависят от времени t . Будем считать, что t — это не время, а параметр нагружения, который зависит от физического времени τ : $t = t(\tau)$. Причем на монотонность функции $t(\tau)$ никаких ограничений не накладывается. Такая интерпретация требует более жестких условий на скорость квазистатического нагружения, но позволяет расширить класс удобных для реализации однородных течений. В частности, в этой постановке можно использовать течения, инфинитные по t . Например, простой сдвиг (течение Куэтта) является инфинитным по t . Однако если принять зависимость $t = \sin \tau$, то сдвиг по времени τ становится финитным, а нагружение — циклическим.

В заключение отметим следующее обстоятельство. Практическая реализация любых идеальных требований всегда носит приближенный характер. Неизбежны возмущения, связанные с влиянием сил тяжести, инерции, с неточностью в реализации краевых усло-

вий и т. д. В некоторых случаях такие отклонения приводят к новым эффектам, представляющим самостоятельный интерес [5, 7].

6. Выводы.

1. Дано полное описание способов нагружения, которые обеспечивают в среде однородное распределение напряжений и деформаций. Такие способы являются идеальными для постановки экспериментов по изучению определяющих уравнений различных сред.

2. Указаны способы нагружения, которые могут быть использованы для исследования сложных реологических сред, сыпучих и порошковых материалов. Рассмотрены случаи, когда инерционные силы на однородность течения влияния не оказывают.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Правительства и Международного научного фонда (грант NPD300).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolymbas D. Bifurcation analysis for sand samples with a nonlinear constitutive equation // *Ing.-Arch.* 1981. V. 50, N 2. P. 131–140.
2. Кондауров В. И., Никитин Л. В. Теоретические основы реологии геоматериалов. М.: Наука, 1990.
3. Ревуженко А. Ф. Однородные сдвиговые течения сыпучей среды // *Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых.* 1996. № 1. С. 3–14.
4. Овсянников Л. В. Общие уравнения и примеры // *Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей.* Новосибирск: Наука, 1967. С. 5–75.
5. Ревуженко А. Ф. О самых простых течениях сплошной среды // *Докл. АН СССР.* 1988. Т. 303, № 1. С. 54–58.
6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
7. Аннин Б. Д., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. Механика деформируемого твердого тела в СО АН СССР // *ПМТФ.* 1987. № 4. С. 66–86.
8. Романов В. А. Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта // *Докл. АН СССР.* 1971. Т. 196, № 5. С. 1045–1051.
9. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

*Поступила в редакцию 7/XII 1995 г.,
в окончательном варианте — 25/III 1996 г.*