чения и числа Рейнольдса турбулентности, которое в проведенных опытах изменялось более чем в 50 раз.

Автор выражает глубокую признательность В. Л. Зимонту, по предложению которого выполнена работа, и Ю. М. Денисову, оказавшему большую помощь в создании комплекса программ для ЭЦВМ.

Поступила 23 III 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов В. И.** Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970.
2. **Щербина Ю. А.** Амплитудно-масштабная характеристика турбулентных пульсаций.— В кн.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1974.
3. **Narayanan M. A. B.** Universal trends observed in the maxima longitudinal velocity fluctuations and the zero crossings in turbulent flows.— AIAA J., 1979, vol. 17, N 5. Рус. пер. Ракетн. техн. и космонавтика, 1979, т. 17, № 5.
4. **Antonia R. A., Danh H. Q., Prabhu A.** Bursts in turbulent flows.— Phys. Fluids, 1976, vol. 19, N 11.
5. **Васильев В. И., Юденков Н. А., Богданов В. В.** Исследование интенсивности турбулентных пульсаций потока в воздухозаборниках.— Труды ЦАГИ, 1971, вып. 1327.
6. **Зимонт В. Л., Прасковский А. А., Тарышкин А. Г.** Исследование влияния ограниченности частотного диапазона аппаратуры на результаты измерений параметров турбулентности.— Труды ЦАГИ, 1980, вып. 2048.
7. **Колмогоров А. Н.** О логарифмически нормальном распределении размеров частиц при дроблении.— ДАН СССР, 1941, т. 31, № 2.
8. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. Ч. II. М.: Наука, 1967.
9. **Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.** Теория вероятностей. М.: Наука, 1967.

УДК 532.62

О РАСТЕКАНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Г. И. Шапиро

(*Москва*)

Растекание вязкой жидкости по поверхности твердого тела играет важную роль в ряде практических задач, например при формировании покрытий твердых тел, при движении газожидкостных смесей и эмульсий в капиллярах и в других случаях [1]. Движение тонкого слоя вязкой жидкости по горизонтальной поверхности вызвано действием сил тяжести и поверхностного натяжения и имеет много общего с движением тонких пленок по наклонной плоскости, которое интенсивно изучалось в течение ряда лет [2—4]. Переход от наклонной плоскости к горизонтальной не является тривиальным, т. е. не сводится к подстановке угла наклона, равного нулю, в окончательные формулы. Дело в том, что движение по горизонтальной плоскости даже в самом грубом приближении описывается дифференциальным уравнением более высокого порядка.

В двумерной постановке задача о растекании вязкой жидкости по горизонтальной плоскости рассматривалась в [5], где получено приближенное нелинейное уравнение для толщины слоя h в зависимости от координаты x и времени t:

$$h_t = (g/3\nu)(h^3h_x)_x. \tag{1}$$

Здесь ν — коэффициент кинематической вязкости; g — ускорение силы тяжести. К сожалению, в [5] фактически не учтено влияние поверхностного натяжения.

В противоположном предельном случае, когда силой тяжести можно пренебречь по сравнению с силой поверхностного натяжения, уравнение для $h(x, t)$ получено в [6] (также только в двумерной постановке):

$$h_t + (\sigma/3\rho\nu)(h^3h_{xxx})_x = 0, \tag{2}$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность жидкости.

В данной работе рассматривается трехмерная задача о движении вязкой несжимаемой жидкости по горизонтальной плоскости с учетом силы тяжести и поверхностного натяжения. Наклон свободной поверхности предполагается малым, а движение — достаточно медленным (ползущим), так что инерционными силами можно пренебречь по сравнению с вязкими. При этом, как будет показано, число Рейнольдса не обязательно должно быть мало. На изменения толщины слоя $h(x, y, t)$ ограничения не накладываются, в частности, h может обращаться в нуль, как это бывает при растекании капли.

Для описания динамики жидкости воспользуемся уравнениями Навье — Стокса при следующих граничных условиях. На поверхности твердого тела — прилипание:

(3) $$\mathbf{u}|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = 0.$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор горизонтальной скорости; w — вертикальная компонента скорости; z — вертикальная координата.

На свободной поверхности граничным условием является непрерывность нормального σ_{nn} и касательного $\sigma_{n\tau}$ напряжений [7]:

(4) $$\sigma_{nn}\big|_{z=h} = -p_a + \sigma\frac{\Delta h}{[1+(\nabla h)^2]^{3/2}}, \quad \sigma_{n\tau}\big|_{z=h} = 0,$$

где p_a — атмосферное давление (считаем, что $p_a = \text{const}$); σ — коэффициент поверхностного натяжения; ∇, Δ — двумерные (в горизонтальной плоскости x, y) операторы Гамильтона и Лапласа. Кинематическое граничное условие удобно скомбинировать с уравнением неразрывности и записать в виде

(5) $$h_t + \nabla\int_0^h \mathbf{u}dz = 0.$$

Пусть характерная толщина слоя равна H, а характерный горизонтальный размер L. За масштаб горизонтальной скорости выберем величину $U = gH^3/\nu L$, которая определяется из условия баланса характерных величин горизонтального градиента гидростатического давления и сил вязкости. Введем безразмерные переменные по формулам:

$$\mathbf{u} = U\mathbf{u}', \quad w = \alpha Uw', \ x = Lx', \ y = Ly',$$

$$z = H\xi, \ h = H\eta, \ t = T\tau, \ p = p_a + \rho g(h - z) + P\ p',$$

где

$$\alpha = H/L; \ P = \rho gH; \ T = L/U = \nu L^2/gH^3,$$

гидростатическая составляющая $\rho g(h - z)$ давления p для удобства выделена в отдельное слагаемое.

В этих переменных уравнения Навье — Стокса условие несжимаемости и уравнение (5) записываются в виде

(6) $$\mathrm{Fr}^2\left(\mathbf{u}'_\tau + (\mathbf{u}'\nabla)\,\mathbf{u}' + w'\mathbf{u}'_\xi\right) = -\nabla\eta - \nabla p' + \mathbf{u}'_{\xi\xi} + \alpha^2\Delta\mathbf{u}';$$

(7) $$\alpha^2\,\mathrm{Fr}^2\left(w'_\tau + (\mathbf{u}'\nabla)\,w' + w'w'_\xi\right) = -p'_\xi + \alpha^2 w'_{\xi\xi} + \alpha^4\Delta w';$$

(8) $$\Delta\mathbf{u}' + w'_\xi = 0;$$

(9) $$\eta_\tau + \nabla\int_0^\eta \mathbf{u}'d\xi = 0,$$

где $\mathrm{Fr}^2 = gH^5/\nu^2L^2 = U^2/gH$ — квадрат числа Фруда. Для краткости безразмерные операторы ∇, Δ обозначены теми же символами, что и размерные.

Выведем уравнение, описывающее эволюцию свободной поверхности $\eta(x', y', \tau)$ при малых значениях α^2 и достаточно медленных движениях жидкости. Из уравнений (6), (7) видно, что в рассматриваемой задаче условием «медленности» движения, т. е. малости инерционных членов по сравнению с вязкими, является малость числа Фруда Fr, а не числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = UH/\nu = gH^4/\nu^2L$. Легко убедиться, что число Рейнольдса связано с числом Фруда соотношением $\mathrm{Fr}^2 = \alpha\,\mathrm{Re}$, так что условие $\mathrm{Fr}^2 \ll 1$ может выполняться и при $\mathrm{Re} \gg 1$, если только $\alpha^2 \ll 1$. Следовательно, при асимптотическом анализе удобно воспользоваться разложением величин $\mathbf{u}'$, w', p' в ряды по двум независимым малым параметрам α^2 и F^2:

(10) $$\mathbf{u}' = \sum_{m,n}\mathbf{u}'_{mn}\alpha^{2m}\,\mathrm{Fr}^{2n}.$$

Замкнутое уравнение для η получается следующим образом. Подставляем разложение (10) в уравнения (6) — (8) и граничные условия и решаем эту систему, считая $\eta(x', y', \tau)$ заданным. В каждом приближении по α^2, Fr^2 решение сводится к интегрированию известных функций по вертикали и может быть выполнено в конечном виде. Найденное решение $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_{00} + \mathrm{Fr}^2\mathbf{u}'_{01} + \alpha^2\mathbf{u}'_{10} + \ldots$, зависящее функционально от η, подставляем затем в уравнение (9). Интересно, что при таком выводе не требуется раскладывать величину η в ряд по малым параметрам. Это не только упрощает выкладки, но и позволяет не накладывать никаких дополнительных ограничений на амплитуду изменений η.

Отметим, что в тонких пленках жидкости часто выполняется соотношение $\alpha^2 \ll \mathrm{Fr}^2 \ll 1$. Например, для воды при $H = 0{,}3$ мм, $L = 1$ см, $\nu = 10^{-2}$ см²/с получим $\alpha^2 = 9\cdot 10^{-4}$, $\mathrm{Fr}^2 = 0{,}2 \gg \alpha^2$. Поэтому в асимптотическом разложении (10) нужно в первую очередь учитывать поправки по Fr^2, а члены $\sim\alpha^2$ в низших приближениях (которые и представляют основной интерес) можно вовсе не учитывать. При этом граничные условия (4) существенно упрощаются и в безразмерных переменных принимают вид

$$\mathbf{u}'_{\xi}\big|_{\xi=\eta} = 0, \quad p'\big|_{\xi=\eta} = -\,\mathrm{We}\Delta\eta, \tag{11}$$

где $\mathrm{We} = \sigma/\rho g L^2$ — число Вебера.

В нулевом приближении по α^2, Fr^2 горизонтальный вектор скорости $\mathbf{u}'_{00}$, найденный из (3), (6), (7), (11), имеет вид

$$\mathbf{u}'_{00} = \eta^2\left(\frac{\xi^2}{2\eta^2} - \frac{\xi}{\eta}\right)\nabla(\eta - \mathrm{We}\Delta\eta). \tag{12}$$

Подставляя это выражение в (9), получаем нелинейное уравнение для $\eta(x', y', \tau)$ нулевого приближения *. Запишем его сразу в размерных переменных:

$$h_t - \frac{g}{3\nu}\nabla(h^3\nabla h) + \frac{\sigma}{3\rho\nu}\nabla(h^3\nabla\Delta h) = 0. \tag{13}$$

После того как $\eta(x', y', \tau)$ найдено из решения уравнения (13), горизонтальную скорость находим по формуле (12), а вертикальную — из условия несжимаемости (8).

В первом приближении по Fr^2 уравнение для η выглядит более громоздко, поэтому выпишем его для случая, когда членом с We можно пренебречь:

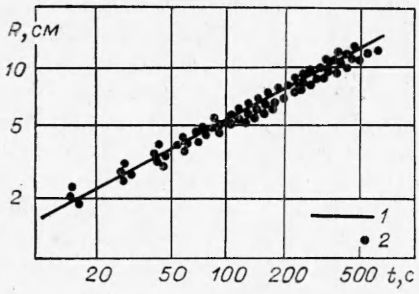
$$\eta_t - \frac{1}{3}\nabla(\eta^3\nabla\eta) + \mathrm{Fr}^2\nabla\left\{\frac{47}{180}\eta^6\nabla\eta(\nabla\eta)^2 + \frac{641}{3780}\eta^7\Delta\eta\nabla\eta + \frac{4}{105}\eta^7\nabla[(\nabla\eta)^2] + \frac{2}{45}\eta^8\Delta\nabla\eta\right\} = 0.$$

Проанализируем подробнее уравнение нулевого приближения (13). В двух предельных случаях это уравнение переходит в известные уравнения. При $\sigma = 0$ (отсутствует поверхностное натяжение) и $\partial/\partial y = 0$ получаем уравнение (1). При $g = 0$ (отсутствует сила тяжести) и $\partial/\partial y = 0$ получаем уравнение (2).

При $\sigma = 0$ уравнение (13) относится к классу нелинейных параболических уравнений, многочисленные автомодельные решения которых найдены в [9, 10] в связи с задачами теории тепловых волн и теории фильтрации. В частности, если при растекании осесимметричной жидкой капли в ее центре имеется приток жидкости с интенсивностью Q, а на бесконечности выполняется условие $\eta = 0$, то автомодельное решение укороченного уравнения (13) имеет вид, указанный в [10], и отлично от нуля лишь в

---

* Для частного случая $\partial/\partial y = 0$ это уравнение получено другим способом в работе [8], на которую автору любезно указал рецензент.



конечной области $0 < r < R(t)$. Радиус капли R растет со временем по закону

(14) $$R(t) = AQ^{3/8}(g/\nu)^{1/8}t^{1/2}.$$

Численное интегрирование дает для коэффициента A значение 0,62. Формула (14) согласуется (с точностью до некоторого отличия в числовом коэффициенте) с результатами эксперимента [11], где осесимметричное пятно глицерина растекалось по стеклу. На фигуре цифрой *1* обозначена теоретическая зависимость (14) при $A = 0{,}3$, цифрой *2* — экспериментальные данные [11] при $Q = 0{,}91 \pm 0{,}04$ см^3/с, $\nu = 6{,}2$ см^2/с. Оценки показывают, что в условиях этих опытов $\mathrm{We} \ll 1$, т. е. влияние поверхностного натяжения действительно мало. Если приток жидкости отсутствует, то автомодельное решение уравнения (13) дает для осесимметричной капли объема V расширение по закону

(15) $$R = \mathrm{const}\ V^{3/8}(g/\nu)^{1/8}t^{1/8}.$$

При $\sigma \neq 0$ уравнение (13) содержит пространственные производные более высокого порядка, и для его решения необходимы дополнительные граничные условия, например величина угла смачивания.

В простейшем случае двумерной ($\partial/\partial y = 0$) неподвижной капли объема V из уравнения (13) легко получить форму $h(x)$ и длину $2d$ капли аналитически:

$$h(x) = \beta(\mathrm{ch}\, ad - \mathrm{ch}\, ax)/(a\ \mathrm{sh}\, ad),$$

где $a = \sqrt{\rho g/\sigma}$ — капиллярная постоянная; β — тангенс угла смачивания, а величина d определяется из уравнения $(1 + Va^2/2\beta)\ \mathrm{th}\ ad = ad$, что полностью совпадает с известным из гидростатики результатом [12].

Поступила 6 IV 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воинов О. В.** Асимптотика свободной поверхности вязкой жидкости при ползущем движении и зависимость краевого угла смачивания от скорости.— ДАН СССР, 1978, т. 243, № 6.
2. **Капица П. Л.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, № 1.
3. **Шкадов В. Я.** Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1.
4. **Шкадов В. Я.** Уединенные волны в слое вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1.
5. **Nakaya C.** Spread of fluid drops over a horizontal plate.— J. Phys. Soc. Jap., 1974, vol. 37, N 2.
6. **Воинов О. В.** Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях.— ПМТФ, 1977, № 2.
7. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973.
8. **Kamin S.** Continuous groups of transformation of differential equations: applications to free boundary problems.— In: Free boundary problems: Proceedings of a seminar held in Pavia in September — October 1979. Vol. 2. Roma: Instituto nazionale di alta mathematica Francesco Severi, 1980.
9. **Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры.— В кн.: Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
10. **Баренблатт Г. И.** О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде.— ПММ, 1952, т. 16, № 1.
11. **Зацепин А. Г., Шапиро Г. И.** Исследование осесимметричной интрузии в стратифицированной жидкости.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982, т. 18, № 1.
12. **Гидромеханика** невесомости/Под ред. А. Д. Мышкиса. М.: Наука, 1976.