УДК 519.21, 658.524, 658.527

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ В МАССОВОМ И СЕРИЙНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

В.И. Мамонов, В.А. Полуэктов
Новосибирский государственный университет
экономики и управления «НИНХ»
E-mail: v.i.mamonov@edu.nsuem.ru; v.a.poluektov@edu.nsuem.ru

Рассматриваются вопросы повышения качества оперативного управления производством на основе статистических методов, позволяющих обосновать основные характеристики производственного процесса. Основными характеристиками в массовом производстве являются страховые запасы, в серийном производстве – межзвенные страховые запасы и опережения как инструменты объемного и временного резервирования. В качестве случайного фактора, существенно влияющего на характеристики процесса, рассматривается количество функционирующего технологического оборудования в производственных звеньях. Показано, что количество функционирующих единиц оборудования является случайным процессом с автокорреляцией. Предложена модель стационарного случайного процесса, позволяющего прогнозировать количество функционирующих технологических единиц.

Ключевые слова: статистические методы, производственный процесс, страховые запасы, опережения, случайный процесс, корреляционная функция.

STATISTICAL MODELING OF PROCESS EQUIPMENT IN MASS AND BATCH PRODUCTION

V.I. Mamonov, V.A. Poluektov
Novosibirsk State University of Economics and Management
E-mail v.i.mamonov@edu.nsuem.ru, v.a.poluektov@edu.nsuem.ru

The questions of improving the quality of operational management based on statistical methods that allows justify characteristics of production process are described in the article. The main characteristics in mass production are reserve bunker stock and in batch production – reserve stock between units and advances as volumetric and temporal reservation instrument. Amount of functioning technological equipment in production elements considered as random factor that significantly affects characteristics of process. It is shown that the number of operating units of equipment is a random process with autocorrelation. Suggested the model of stationary stochastic process that allows forecast amount of functioning technological units.

Keywords: statistical methods, production process, reserve stock, advance, stochastic process, the correlation function.

ВВЕДЕНИЕ

Производственные процессы в машиностроении и приборостроении рассматриваются как процессы, которые находятся под воздействием широкого спектра случайных воздействий, имеющих объективный характер. Рассматривая производственные подразделения как системы с заданным набором входных и выходных характеристик производственного процесса, оказывается невозможным установление уравнений связи между ними в виде аналитических выражений. Объективный характер действия случайных возмущений на производственный процесс требует его рассмотрения как случайного процесса, а определение статистической взаимосвязи между характеристиками процесса как имманентное свойство, присущее таким системам, что неизбежно требует использования аппарата теории случайных процессов.

Учет случайных факторов и определение статистических характеристик производственных процессов имеет заметные отличия для условий массового и серийного типов в машино- и приборостроении. Если речь идет о массовом производстве, то влияние такого случайного фактора, как число функционирующих технологических единиц, существенно определяет размер межоперационного страхового задела, обеспечивающего заданный ритм поточной линии и производительность. В данном случае возможны различные подходы и статистические модели, которые могут не учитывать динамику процесса отказов единиц технологического оборудования. Ситуация существенно меняется, когда в качестве объекта рассматриваются подразделения серийного производства, поскольку реализацию производственного процесса приходится моделировать в динамике. Уменьшение коэффициента готовности системы из-за отказов станочных систем приводит к значительному увеличению длительности производственного цикла изготовления партий и требует проведения статистических расчетов не только страховых межоперационных запасов, но и опережений, которые являются управляющими параметрами предоставляемой системе временной избыточности. В статье показано, что в условиях серийного производства количество функционирующих единиц оборудования является стационарным случайным процессом с автокорреляцией. Рассматривается модель стационарного случайного процесса, которая используется для прогнозирования количества функционирующего технологического оборудования.

1. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ФОНДОВ ВРЕМЕНИ РАБОТЫ ОБОРУДОВАНИЯ И ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МЕЖОПЕРАЦИОННЫХ СТРАХОВЫХ ЗАДЕЛОВ НА ПОТОЧНОЙ ЛИНИИ

Поскольку в условиях поточного производства динамика отказов и восстановлений станочных систем не так важна как для условий серийного производства, то можно предположить, что с приемлемой для практических целей точностью в качестве статистической модели определения коэффициента готовности группы оборудования на операциях можно использовать статистические распределения суммарного времени работы всех единиц оборудования на операции. Статистическая обработка данных свидетельствует о допустимости использования нормально распределенной случайной величины: $N(M[t_i],\sigma[t_i])$. При этом следует учесть, что случайная величина – суммарное время работы оборудования на операциях – изменяется в определенных пределах, так что $t_i \in [T_i^{\min}, T_i^{\max}]$. Следовательно, плотность распределения $\tilde{f}_{t_i}(t)$ случайной величины t_i при известных пределах изменения выражается следующим образом:

$$\tilde{f}_{t_i}(t)=\begin{cases} f_{t_i}(t)\Big/\displaystyle\int_{T_i^{\min}}^{T_i^{\max}} f_{t_i}(t)dt = f_{t_i}(t)/\beta_i,\ t\in(T_i^{\min},T_i^{\max}),\\ 0,\ t\notin(T_i^{\min},T_i^{\max}),\end{cases}$$

$$\tilde{f}_{t_i}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma[t_i]}e^{-\frac{(t-\overline{T}_i)^2}{2\sigma^2[t_i]}},$$

$$\beta_i=\Phi_0\left(\frac{T_i^{\max}-\overline{T}_i}{\sigma[t_i]}\right)-\Phi_0\left(\frac{T_i^{\min}-\overline{T}_i}{\sigma[t_i]}\right),$$

где $\Phi_0(u)$ – функция Лапласа.

Поскольку суммарное время работы станков на операциях является случайной величиной, то это необходимо приводит к образованию межоперационных страховых заделов и обоснованию их величины. В условиях массового производства учет величины потерь от фонда времени работы группы оборудования является основой для расчета величины бункерных запасов, переходящих оборотных заделов на поточных линиях [4].

Страховой задел деталей необходим для компенсации возможных перебоев в работе поточной линии. Большой страховой межоперационный задел хотя и обеспечивает непрерывность работы станков на операциях, однако приводит к росту затрат, связанных с его хранением и увеличением незавершенного производства. При недостаточном страховом заделе между операциями станки простаивают из-за отсутствия деталей, что приводит к понижению установленной производительности поточной линии и к потерям в производстве. Поэтому задача заключается в определении оптимальной величины страховых межоперационных заделов на поточной линии, т.е. таких, при которых суммарные затраты, связанные с их хранением и потерями из-за отказов станков, были бы минимальны.

Работу поточной линии можно отобразить схемой, представленной на рис. 1, где 0-я и $(m+1)$-я операции представляют собой подразделения, которые передают на поточную линию заготовки деталей и потребляют готовые детали соответственно.

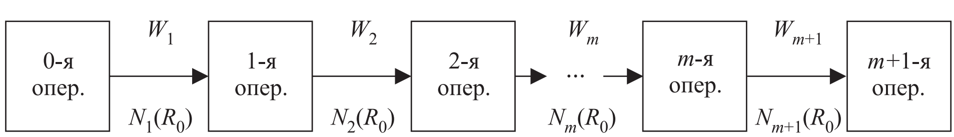

Рис. 1. Схема работы однопредметной прерывно-поточной линии

Для рассматриваемой задачи стратегией управления является последовательность чисел $(W_1, W_2, \ldots, W_m, W_{m+1})$, где W_i определяет число деталей в страховом заделе перед станками i-й операции, обработанных на $(i–1)$ операции и поступивших на i-ю операцию.

Сформулируем задачу определения страховых заделов, а для этого введем необходимые обозначения:

m+1 – число операций;

t_i – суммарное время работы станков на i-й операции за период оборота линии;

$f_i(t)$ – плотность распределения случайной величины t_i, $i = 1(1)(m+1)$;

P_i – потери от простоя станка (станков) на i-й операции в единицу времени;

c_i – величина затрат на одну деталь после (i–1) операции;

λ_i – производительность станка на i-й операции в единицу времени;

$T_i^{\min}$, $T_i^{\max}$ – минимальное и максимальное суммарное время работы станка (станков) на i-й операции за период оборота линии.

Время работы станка (станков) на i-й операции в течение периода оборота линии определяется следующим образом. Если суммарное время работы станков меньше времени, необходимого на обработку количества деталей, поступивших с предыдущей операции и находящихся в страховом заделе, то время простоя равно нулю; если суммарное время больше времени, необходимого на обработку всех деталей, готовых к обработке на операции, то время простоя есть величина положительная:

$$t_i^{\text{пр}} = \begin{cases} 0, \text{ если } t_i \le \dfrac{W_i + N_i(R_0)}{\lambda_i}, \\ t_i - \dfrac{W_i + N_i(R_0)}{\lambda_i}, \text{ если } t_i > \dfrac{W_i + N_i(R_0)}{\lambda_i}. \end{cases}$$

Тогда величина математического ожидания затрат, связанных с простоем станков i-й операции из-за нехватки деталей, находится по формуле:

$$C_i^{\text{пр}} = P_i \int\limits_{\frac{W_i + N_i(R_0)}{\lambda_i}}^{T_i^{\max}} \left(t - \frac{W_i + N_i(R_0)}{\lambda_i} \right) f_i(t)dt, \ i = 1(1)(m+1).$$

Для $i = m+1$ $C_{m+1}^{\text{пр}}$ – есть величина потерь, имеющих место в подразделении (m+1) из-за простоя по причине отсутствия готовых деталей. В случае, когда суммарное время работы станков на операции меньше требуемого для обработки деталей, находящихся в страховом заделе и поступивших с предыдущей операции, возникает излишек деталей, число которых равно:

$$D = \begin{cases} 0, \text{ если } t \ge \dfrac{W_i + N_i(R_0)}{\lambda_i}, \\ W_i + N_i(R_0) - t_i\lambda_i, \text{ если } t_i < \dfrac{W_i + N_i(R_0)}{\lambda_i}, \ i = 1(1)(m+1). \end{cases}$$

С величиной D_i связаны затраты на хранение, которые будем определять равными затратам на деталь перед i-й операцией. Величина математического ожидания затрат, связанных с хранением деталей перед i-й операцией, находится по формуле:

$$C_i^{\text{хр}} = C_i \int\limits_{T_i^{\min}}^{\frac{W_i + N_i(R_0)}{\lambda_i}} \left(W_i + N_i(R_0) - t_i\lambda_i \right) f_i(t)dt, \;\; i = 1(1)(m+1).$$

Число деталей, поступающих с (i–1) операции на i-ю операцию, равно:

$$N_i(R_0) = \begin{cases} W_{i-1} + N_{i-1}(R_0), \text{ если } t_{i-1} \ge \dfrac{W_{i-1} + N_{i-1}(R_0)}{\lambda_{i-1}}, \\ \lambda_{i-1}t_{i-1}, \text{ если } t_{i-1} < \dfrac{W_{i-1} + N_{i-1}(R_0)}{\lambda_{i-1}}, \;\; i = 1(1)(m+1). \end{cases}$$

Расчетное значение $N_i(R_0)$, равное математическому ожиданию этой случайной величины, будем определять по формуле:

$$N_i(R_0) = [N_{i-1}(R_0) + W_{i-1}] \int\limits_{\frac{W_{i-1} + N_{i-1}(R_0)}{\lambda_{i-1}}}^{T_{i-1}^{\max}} f_{i-1}(t)dt + \int\limits_{T_{i-1}^{\min}}^{\frac{W_{i-1} + N_{i-1}(R_0)}{\lambda_{i-1}}} t\lambda_{i-1} f_{i-1}(t)dt, \qquad (1)$$

где $F_{i-1}(t)$ – интегральная функция распределения случайной величины t_{i-1}.

Для решения данной задачи используем метод динамического программирования, который основан на принципах поэтапного конструирования решения и оптимальности. Принцип оптимальности в методе формулируется следующим образом: оптимальная последовательность решений обладает свойством, что каковы бы ни были первоначальное состояние и первоначальное решение, последующее решение должно определять оптимальную стратегию относительно состояния, полученного в результате первоначального решения.

Для задачи определения оптимальной последовательности значений заделов оптимальной стратегией является (W_1, W_2, …, W_{m+1}), где W_i есть число деталей в страховом заделе перед i-й операцией. Все числа из оптимальной последовательности определяют экстремальное значение критериальной функции: минимум затрат от хранения деталей (запаса) и затрат от простоя станочного оборудования на операциях в целом для поточной линии.

Поэтапное конструирование решения будет состоять в выполнении последовательности из (m+1) процедур: на первом этапе формируется целевая функция, равная минимуму затрат для первой операции; на втором этапе определяется целевая функция, равная суммарным затратам на двух первых операциях и т.д. На (m+1)-м этапе целевая функция равна затратам для всей поточной линии с учетом ущерба, связанного с простоем подразделения, потребляющего готовую продукцию.

Поскольку в качестве нулевой операции выступает подразделение, обеспечивающее поточную линию заготовками, то все их количество можно рассматривать как страховой запас $W_1 = N_0(R_0)$ и полагать $N_1(R_0) = 0$. Следующее обстоятельство, которое следует учитывать, относится к правилу исполнения страховых заделов. С целью упрощения постановки задачи межоперационные страховые заделы пополняются не в процессе работы самой поточной линии, а автономно. Это означает, что величины $N_i(R_0)$ могут быть как больше, так и меньше количества обрабатываемых деталей на операциях в течение периода оборота линии. Кроме того, их соотношение зависит от соотношения затрат на хранение деталей и от простоя станков.

Используя полученные выражения, запишем основное функциональное уравнение для произвольного i-го этапа, в том числе для последней операции и потребляющего продукцию подразделения:

$$C_i(W_i, W_{i-1}) = \min_{W_i \geq 0,\, W_{i-1} \geq 0} \left\{ P_i \int_{\frac{W_i + N_i(R_0)}{\lambda_i}}^{T_i^{\max}} \left(t - \frac{W_i + N_i(R_0)}{\lambda_i} \right) f_i(t)dt + \right.$$

$$\left. + C_1 \int_{T_1^{\min}}^{\frac{W_i + N_i(R_0)}{\lambda_i}} (W_i + N_i(R_0) - t\lambda_i) f_i(t)dt + C_{i-1}(W_{i-1}) \right\},\ i = 2(1)(m+1).$$

Очевидно, что нахождение оптимальной стратегии (W_1, W_2, …, W_{m+1}) приводит к решению системы уравнений:

$$\frac{dC_2(W_2, W_1)}{dW_1} = F_1\left(\frac{W_1}{\lambda_1}\right) - \frac{P_1}{P_1 + \lambda_1 C_1} = 0,$$

$$\frac{dC_i(W_i, W_{i-1})}{dW_i} = F_i\left(\frac{W_i + N(R_0)}{\lambda_i}\right) - \frac{P_i}{P_i + \lambda_i C_i} = 0,$$

где $i = 2(1)(m+1)$ при уравнениях связи (1).

Оптимальные значения межоперационных страховых заделов находим, начиная с первой операции. Величину W_1 для первой операции определяем из уравнения

$$F_1\left(\frac{W_1}{\lambda_1}\right) - \frac{P_1}{P_1 + \lambda_1 C_1}.$$

Найдя из этого уравнения W_1 по формуле (1) определяем $N_2(R_0)$, а с помощью $N_2(R_0)$ по формуле

$$F_k\left(\frac{W_k + N_k(R_0)}{\lambda_k}\right) - \frac{P_k}{P_k + \lambda_k C_k},\ k = 2(1)(m+1) \qquad (2)$$

находим W_2. Затем аналогично находим $N_3(R_0)$, W_3 и т.д. То есть вычисляем последовательно: по $W_1 - N_2(R_0)$ и W_2, по $W_2 - N_3(R_0)$ и W_3 и т.д. Таким образом, использование метода динамического программирования позволило найти оптимальную стратегию аналитически, т.е. получить формулы для расчета страховых заделов в явном виде.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧИСЛА ФУНКЦИОНИРУЮЩЕГО ОБОРУДОВАНИЯ В ГРУППАХ В УСЛОВИЯХ СЕРИЙНОГО ПРОИЗВОДСТВА

При решении задач анализа технологических процессов, расчета точности производства, обеспечении заданной производительности и решении других практических задач во многих случаях ограничиться только статическими характеристиками недостаточно. Более достоверное представление о процессе и его выходных переменных можно получить при определении его динамических характеристик. Построение динамической модели технологического процесса статистическими методами требует обработки большого массива информации, получаемой непосредственно в процессе нормального функционирования объекта. Для реальных технологических процессов динамические характеристики изменяются в связи с изменениями условий протекания процесса, надежности работы оборудования, внешней среды и т.д. Очевидно, что на реальных технологических процессах весьма затруднительно обеспечить подачу входного возмущения с заданными характеристиками. Однако можно говорить о возможности получения этих характеристик на основе опыта в условиях массового или серийного типа производства.

Аналитические модели, описывающие функционирование производственной системы позволяют устанавливать зависимости между внешними условиями (ресурсами), компонентами решения и результатом, который характеризуется критерием эффективности функционирования системы. Однако основным недостатком аналитических моделей является то, что они неизбежно требуют каких-то допущений, в частности, о независимости, например, величины потерь от фонда времени работы оборудования группы рабочих мест в последовательные отрезки времени. Применимость таких допущений не всегда может быть оценена без контрольных просчетов, которые проводятся методом Монте-Карло. Качество расчета с использованием имитационных моделей существенно зависит от того, насколько реалистично представлен в модели объект.

Любой технологический объект можно рассматривать как процесс, преобразующий входные случайные переменные в выходные случайные переменные. Например, для процесса токарной обработки партий заготовок имеет место преобразование исходных параметров в выходные параметры партий деталей, к которым в том числе относятся фактический размер партии и сроки ее передачи на смежные стадии. С точки зрения обеспечения установленной производительности технологического объекта и точности временного сопряжения со смежными стадиями обработки существенное значение имеет решение задачи прогнозирования числа функционирующих станков, объединенных в группы для выполнения однородных технологических операций [8].

В условиях серийного производства качество расписаний обработки партий зависит от того, насколько точно в имитационных моделях представлены характеристики функционирования технологического объекта [5].

Существующие статистические модели прогнозирования числа функционирующих станков являются статистическими распределениями и, следовательно, рассматривают их как последовательности независимых случайных величин. Однако статистический анализ свидетельствует об обратном: возмущение производственного процесса в виде количества станков, функционирующих в последовательные дни (смены), представляет собой случайный процесс с автокорреляцией, которая весьма значительна. Выражается это в том, что если произошел «отказ» станочной системы в момент t, то вероятность того, что он не будет восстановлен в (t+1)-й и ближайшие моменты времени, довольно велика.

Потери рабочего времени в динамике представимы в виде случайного стационарного процесса. С точки зрения процессов оперативного управления производством изменение интенсивностей отказов станочных систем может считаться медленным и поэтому потери рабочего времени допускают их описание процессом с медленно меняющимися параметрами. Это позволяет, зафиксировав значения параметров, построить модель случайного стационарного процесса, удовлетворительно описывающего реальный процесс на коротких отрезках времени. Использование модели процесса дает возможность прогнозировать число функционирующих станков, а следовательно, наиболее эффективно использовать рабочее время и повысить качество оперативного управления производством.

Статистическая обработка данных реальных технологических процессов позволяет получить оценки среднего интервала времени между последовательными «отказами» станков и среднего значения времени, в течение которого станок не функционирует по причине его восстановления [2, 3, 7].

Как показано в работе [1], из такого представления процесса «работа–восстановление» следует, что последовательность значений $x(t)$ представляет собой процесс со значительной автокорреляцией. Действительно, статистическая оценка нормированных корреляционных функций, представленная на рис. 2, 3, свидетельствует о том, что изменения параметров процесса на коротких интервалах (t_1, t_2) незначительны. Это подтверждает предположение – изменение числа функционирующих в технологическом процессе станков есть процесс с медленно меняющимися параметрами. Однако с ростом длины интервала (t_1, t_2) корреляционная зависимость слу-

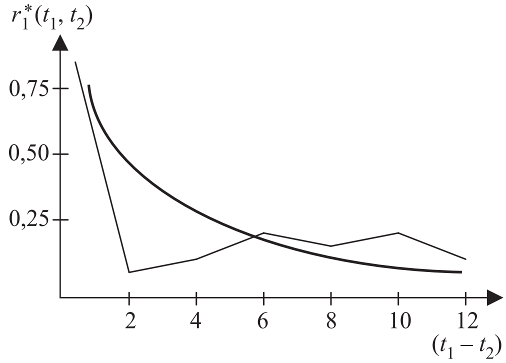

Рис. 2. Оценка нормированной корреляционной функции $r_1^*(t_1, t_2)$ числа функционирующих станков (ломаная кривая) и ее аппроксимация (сплошная кривая)

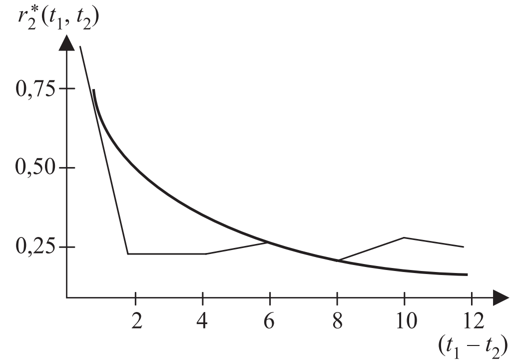

Рис. 3. Оценка нормированной корреляционной функции $r_2^*(t_1, t_2)$ потерь рабочего времени из-за отказов станочных систем и ее аппроксимация

чайных величин $x(t_1)$ и $x(t_2)$ уменьшается и при $|t_1 - t_2| = 12$ сменам они практически не коррелированы.

С удовлетворительной для практических расчетов точностью автокорреляция между количеством функционирующих станков в t-й и $(t + \upsilon)$-й моменты времени описывается функцией

$$r(\upsilon) = \eta^{|\upsilon|}, \quad 0 < \eta < 1,$$

где величина η определяет скорость затухания автокорреляции и равна автокорреляции для двух смежных дней ($\eta^{|\upsilon|}$ характеризует степень зависимости сечений $x(t)$ и $x(t + \upsilon)$ процесса).

Процесс, обладающий этим свойством, может быть воспроизведен в модели с помощью рекуррентного равенства

$$x(t) = \eta\, x(t - 1) + (1 - \eta)\, S + k\, \xi(t), \tag{3}$$

где $x(t)$ – число функционирующих станков в t-й день; η – коэффициент автокорреляции; S – константа, определяющая среднее значение числа работающих станков; k – коэффициент при случайной величине; $\xi(t)$ – случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной единице, взаимонезависимы при различных t.

Если случайная величина $\xi(t)$ подчинена закону нормального распределения, то, очевидно, и число функционирующих станков также подчинено закону нормального распределения.

Соответствие модели требованиям, предъявляемым к ней, будет иметь место, если имитируемые значения $M[x(t)]$ и $\sigma[x(t)]$ соответствуют реально существующим, что обеспечивается выбором величины S и коэффициента k.

Покажем, что модель (3) обладает требуемым свойством. Пусть число работающих станков в начальный момент времени равно $x(0)$; очевидно, что для произвольного t имеет место равенство

$$x(t) = \eta^t x(0) + (1 - \eta^t)S + \sum_{\tau=0}^{t-1} \eta^\tau [k\xi(t - \tau)].$$

Предельный переход при $t \to \infty$ дает выражение для установившегося процесса:

$$x(t) = S + \sum_{\tau=0}^{\infty} \eta^\tau [k\xi(t - \tau)]. \tag{4}$$

Определим параметры модели.

$$M\,[x] = \eta\, M\,[x] + (1 - \eta)\, S + k\, M\,[\xi], \quad M\,[x] = S. \tag{5}$$

Так как случайные величины $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$ независимы, то

$$\sigma^2[x] = \sum_{\tau=0}^{\infty} k^2 \eta^{2\tau} \sigma^2[\xi] = k^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \eta^{2\tau},$$

откуда

$$\sigma^2[x] = k^2 / (1 - \eta^2). \tag{6}$$

Найдем ковариационную функцию. Пусть $\upsilon \geq 0$. Учитывая (4) и (5) получим

$$\operatorname{cov}[x(t), x(t+\upsilon)] = M[x(t) - M[x](x(t+\upsilon) - M[x])] =$$
$$= M\left[\sum_{\tau=0}^{\infty} \eta^{\tau}[k\xi(t-\tau)] \sum_{\tau_1=0}^{\infty} \eta^{\tau_1}[k\xi(t+\upsilon-\tau_1)]\right] =$$
$$= k^2 \sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{\tau_1=0}^{\infty} \eta^{\tau+\tau_1} M[\xi(t-\tau)\xi(t+\upsilon-\tau_1)].$$

Так как $M[\xi(t-\tau)\xi(t+\upsilon-\tau_1)] = \begin{cases} 1, \tau_1 = \tau+\upsilon, \\ 0, \tau_1 \neq \tau+\upsilon, \end{cases}$ и поскольку $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ независимы, то при $t_1 \neq t_2$

$$M[\xi(t_1)\xi(t_2)] = M[\xi(t_1)]M[\xi(t_2)] = 0.$$

$$K(t, t+\upsilon) = \operatorname{cov}[x(t), x(t+\upsilon)] = k^2 \sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{\tau_1=0}^{\infty} \eta^{\tau+\tau_1} = k^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \eta^{2\tau+\upsilon},$$

откуда

$$K(t, t+\upsilon) = k^2\, \eta^{|\upsilon|}/(1-\eta^2) \tag{7}$$

в силу четности корреляционной функции $K(t, t+\upsilon) = K(t+\upsilon, t)$.

Нормированная корреляционная функция равна

$$r(\upsilon) = \frac{\operatorname{cov}[x(t), x(t+\upsilon)]}{\sigma[x(t)]\sigma[x(t+\upsilon)]} = \frac{\operatorname{cov}[x(t), x(t+\upsilon)]}{\sigma^2[x(t)]}.$$

Учитывая (6) и (7) получаем $r(\upsilon) = \eta^{|\upsilon|}$.

Таким образом, модель (3) определяется в конечном счете тремя параметрами: $S = M[x]$, $k^2 = \sigma^2[x]\ (1-\eta^2)$, $r(\upsilon) = \eta^{|\upsilon|}$.

Величины $x(t)$, вырабатываемые моделью (3), непрерывны, в то время как число функционирующих станков должно быть целым и лежать в пределах от 0 до N. Для имитации процесса величины $x(t)$ следует подвергнуть операции квантования. Проще всего это сделать путем округления с ограничением:

$$y(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } x(t) \leq 0{,}5, \\ n, \text{ если } n-0{,}5 < x(t) \leq n+0{,}5, \\ N, \text{ если } x(t) > 0{,}5, \end{cases} \tag{8}$$

где n – целое, $1 \leq n \leq N-1$.

В процессе квантования происходит искажение математического ожидания $M[x]$ и дисперсии $\sigma^2[x]$. С этой целью необходимо определить поправочные коэффициенты для корректировки вводимых в модель $M[x]$ и $\sigma^2[x]$ в виде ее параметров.

Поскольку $x(t)$ нормально распределенная величина, то для вычисления $p_n = p(y = n)$ и поправок используем функцию Лапласа. Математическое ожидание и дисперсию случайной величины определяем из выражений: $M[y] = \sum np_n$, $\sigma^2[y] = \sum n^2 p_n - M^2[y]$, а поправочные коэффициенты есть $k_1 = M[x]/M[y]$, $k_2 = \sigma[x]/\sigma[y]$ откуда $M[x] = k_1 M[y]$, $\sigma[x] = k_2\sigma[y]$.

Ясно, что поправочные коэффициенты зависят от числа станков в группе: $k_1 = k_1(N)$, $k_2 = k_2(N)$. Анализ экспериментальных расчетов позволяет утверждать, что модель (3) является адекватной технологическому объекту, так как имитирует реальный процесс в достаточной мере точно. Так, например, расхождение между реальным фондом времени работы группы станков и полученным в ходе имитации за квартал не превысило 4–6 %. С учетом точности и достоверности исходных данных результаты имитации можно считать вполне удовлетворительными [9]. Без учета автокорреляции моделируемые потери от фонда времени работы группы оборудования на технологических операциях в случае отказов станочных систем не соответствуют действительности. Модель (3) является составной частью в алгоритме решения задачи по обеспечению оптимальной надежности производственной системы [6]. На рис. 4 приведены результаты расчетов по прогнозированию числа функционирующих станков токарно-винторезной группы, состоящей из 14 единиц.

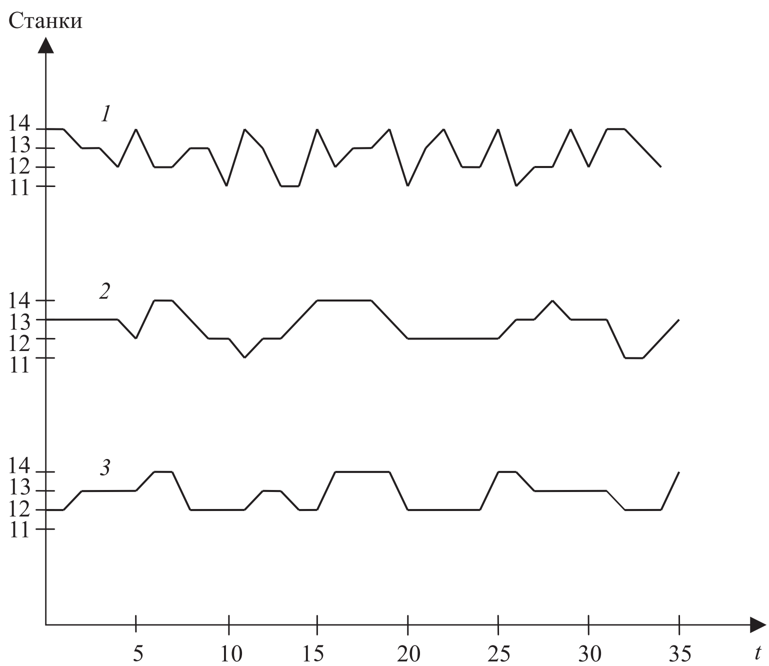

Рис. 4. Результаты прогнозирования числа функционирующих станков по группе токарно-винторезного оборудования.

1 – прогнозируемое число функционирующих станков с точностью до распределений (по гистограмме); *2* – рассчитанное по модели (3); *3* – фактически наблюдаемый в группе оборудования процесс

Рассмотрим значения случайных величин – числа функционирующих станков, вырабатываемых моделью (3) $X(t)$, и случайных величин – фактического числа работающих станков $X_ф(t)$ как связанную выборку из 35 пар значений (см. рис. 4). Интерес представляет проверка гипотезы о зависимости случайных величин $X(t)$, $X_ф(t)$ при уровне значимости, например, $\alpha = 0{,}01$. Расчет значения коэффициента корреляции дает $R_{x,y} = 0{,}6656$. Поскольку оценка коэффициента корреляции вычислена на конечной выборке, а потому может отклоняться от своего генерального значения, то следует проверить значимость коэффициента корреляции. Проверку производим с помощью t-критерия:

$$t = \frac{R_{x,y}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_{x,y}^2}}.$$

Случайная величина t следует t-распределению Стьюдента. Вычисляя значение t-критерия, получаем: $t = 5{,}1228$. Искомое критическое значение параметра $t_{\text{кр},\,0{,}01} = 2{,}704$ при числе степеней свободы $n - 2 = 33$, $\alpha = 0{,}01$.

Абсолютное значение t-критерия не меньше критического, и, следовательно, экспериментальные данные с вероятностью 0,99 $(1 - \alpha)$ не противоречат гипотезе о зависимости случайных величин $X(t)$, $X_{\text{ф}}(t)$. Это означает, что модель прогнозирования является адекватной объекту, так как имитирует реальный процесс в достаточной мере точно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты и методики расчета показателей, позволяющие повысить качество оперативного управления сложными производственными системами, могут быть широко использованы в практической деятельности предприятий машино- и приборостроения, работающих в условиях массового или серийного типа производств.

Литература

1. *Ватник П.А.* Статистические методы оперативного управления производством. М.: Статистика, 1978. 240 с.
2. *Генкин Б.М.* Системы обслуживания оборудования и рабочих мест (основы теории и методы расчета). М.: Экономика, 1972. 191 с.
3. *Кокс Д.Р., Смит В.Л.* Теория восстановления / под ред. Ю.К. Беляева. М.: Сов. радио, 1967. 300 с.
4. *Мамонов В.И., Полуэктов В.А.* Взаимосвязь оптимальной величины страхового задела с периодом комплектования поточной линии // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2006. № 45. С. 206–212.
5. *Мамонов В.И., Полуэктов В.А.* Использование внутренних регуляторов оперативного управления в обеспечении устойчивости функционирования производственных подразделений // Организатор производства. 2009. № 4 (43). С. 27–32.
6. *Мамонов В.И., Полуэктов В.А.* Методы и модели оперативно-производственного менеджмента. Новосибирск: НГУЭУ, 2011. 168 с.
7. *Райншке К.* Модели надежности и чувствительности систем / под ред. Б.А. Козлова. М.: Мир, 1979. 452 с.
8. Точность производства в машиностроении и приборостроении / под ред. А.Н. Гаврилова. М.: Машиностроение, 1973. 567 с.
9. *Эдельгауз Г.Е.* Достоверность статистических показателей. М.: Статистика, 1977. 278 с.

Bibliography

1. *Vatnik P.A.* Statisticheskie metody operativnogo upravlenija proizvodstvom. M.: Statistika, 1978. 240 p.

2. *Genkin B.M.* Sistemy obsluzhivanija oborudovanija i rabochih mest (osnovy teorii i metody raschjota). M.: Jekonomika, 1972. 191 p.
3. *Koks D.R., Smit V.L.* Teorija vosstanovlenija / pod red. Ju.K. Beljaeva. M.: Sov. radio, 1967. 300 p.
4. *Mamonov V.I., Polujektov V.A.* Vzaimosvjaz' optimal'noj velichiny strahovogo zadela s periodom komplektovanija potochnoj linii // Nauchno-tehnicheskie vedomosti SPBGPU. 2006. № 45. P. 206–212.
5. *Mamonov V.I., Polujektov V.A.* Ispol'zovanie vnutrennih reguljatorov operativnogo upravlenija v obespechenii ustojchivosti funkcionirovanija proizvodstvennyh podrazdelenij // Organizator proizvodstva. 2009. № 4 (43). P. 27–32.
6. *Mamonov V.I., Polujektov V.A.* Metody i modeli operativno-proizvodstvennogo menedzhmenta. Novosibirsk: NSUEM, 2011. 168 p.
7. *Rajnshke K.* Modeli nadjozhnosti i chuvstvitel'nosti sistem / pod red. B.A. Kozlova. M.: Mir, 1979. 452 p.
8. Tochnost' proizvodstva v mashinostroenii i priborostroenii / pod red. A.N. Gavrilova. M.: Mashinostroenie, 1973. 567 p.
9. *Jedel'gauz G.E.* Dostovernost' statisticheskih pokazatelej. M.: Statistika, 1977. 278 p.