УДК 532.591

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДОЕМА ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

А. А. Луговцов

(Новосибирск)

Осесимметричное уравнение Кортевега — де-Вриза (КДВ) для случая водоема постоянной глубины было получено в [1]. В данной работе приведен вывод осесимметричного уравнения КДВ в случае водоема переменной глубины. Для полученного уравнения указаны условия, при которых асимптот ческое поведение его решений описывается уравнением вида

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0,$$

асимптотическое поведение решений которого хорошо изучено [2].

1. Для невязкой несжимаемой тяжелой жидкости задача о потенциальном движении в водоеме переменной глубины в точной постановке (плоский и осесимметричный случай) формулируется следующим образом:

уравнение неразрывности

$$u_r + w_z + \frac{ku}{r} = 0; \tag{1.1}$$

уравнение безвихренности

$$u_z - w_r = 0; \tag{1.2}$$

постоянство давления на свободной границе

$$z = h(r, t),$$

$$u_t + h_r + uu_r + ww_r + h_r w_t - h_t w_r = 0; \tag{1.3}$$

кинематическое условие на свободной границе

$$h_t - w + uh_r = 0; \tag{1.4}$$

условие непротекания на дне

$$z = -H(r),\ w = -\dot{H}u. \tag{1.5}$$

Система уравнений (1.1) — (1.5) записана в безразмерном виде. Все длины измеряются здесь в единицах H_0 (характерная глубина водоема), скорости — в единицах $\sqrt{gH_0}$, время — в единицах $\sqrt{H_0/g}$, g — ускорение силы тяжести, вертикальная координата z отсчитывается от невозмущенной свободной поверхности жидкости, осесимметричному случаю соответствует $k = 1$, плоскому — $k = 0$. Заметим, что (1.3) получено из обычного интеграла Коши — Лагранжа дифференцированием по r вдоль поверхности $z = h(r, t)$ и $\dot{H} = dH/dr$.

Добавляя к системе (1.1) — (1.5) начальные условия, получаем полностью сформулированную задачу.

Как известно, система уравнений (1.1) — (1.5) обладает двумя важными законами сохранения: массы и энергии, которые при ограниченных h, u и w, стремящихся достаточно быстро к нулю при $r \to \infty$, имеют следующий вид:

$$\int_0^\infty hr^k dr = C_1; \tag{1.6}$$

$$\int_0^\infty \int_{-H(r)}^{h(r,t)} (u^2 + w^2)\, r^k dr + \int_0^\infty h^2 r^k dr = C_2, \tag{1.7}$$

где $k = 1$ соответствует осесимметричному случаю. В плоском случае нужно положить $k = 0$ и заменить нижний предел интегрирования по r на $-\infty$.

Для вывода приближенного уравнения, описывающего распространение волн в одном (положительном) направлении оси r, необходимо определить порядки величин. Предположим, что h, u, w, $\partial/\partial t$, $\partial/\partial r$, $\partial/\partial z$ имеют тот же порядок малости, что и в уединенной волне, распространяющейся в положительном направлении оси r. Можно проверить, что для уединенной волны, распространяющейся над ровным дном, в системе координат, двигающейся с критической скоростью $V = \sqrt{gH_0}$, имеют место следующие оценки: если $h \sim \varepsilon \ll 1$, то

$$u \sim \varepsilon,\ w \sim \varepsilon^{3/2}, \partial/\partial t \sim \varepsilon^{3/2},\ \partial/\partial r \sim \varepsilon^{1/2},\ \partial/\partial z \sim 1. \tag{1.8}$$

Для случая водоема с неровным дном естественно предположить (по крайней мере, для задачи об эволюции волн, приходящих из области ровного дна), что при некоторых ограничениях на гладкость функции $H(r)$ и малость наклона дна $\dot{H}(r)$ оценки (1.8) остаются справедливыми в системе координат, двигающейся со скоростью $V = \sqrt{gH(r)}$. Малость наклона дна, требуемую для выделения волн одного направления, можно оценить следующим образом. В линейном приближении распространение осесимметричных волн описывается системой уравнений

$$h_t + Hu_r + \dot{H}u + (1/r)Hu = 0; \tag{1.9}$$

$$u_t + h_r = 0. \tag{1.10}$$

Волна, бегущая в положительном направлении, должна иметь вид

$$h = \varphi_1(r)\,h(\xi) + O(\varepsilon), \quad u = \varphi_2(r)\,u(\xi) + O(\varepsilon), \quad \xi = \int\limits_{r_0}^{r} H^{-1/2}dr - t. \tag{1.11}$$

Можно показать, что в общем случае произвольной функции $H(r)$ решение системы (1.9), (1.10) имеет вид (1.11) в том и только в том случае, когда последние два члена левой части уравнения (1.9) являются малыми следующего порядка по отношению к первым двум членам, т. е. когда ими в нулевом приближении можно пренебречь. При этом отраженные волны будут малы по амплитуде и в нулевом приближении не будут влиять на распространение волн в положительном направлении.

Следовательно, выделение волн одного направления возможно при $\dot{H}(r) \leqslant \varepsilon^{3/2}$, $r \gtrsim \varepsilon^{-3/2}$ (длина рассматриваемых волн порядка $\varepsilon^{-1/2}$). Таким образом, порядки всех величин определены и теперь можно перейти к выводу приближенного уравнения.

2. Введем новые неизвестные функции и независимые переменные согласно следующим соотношениям:

$$h = \varepsilon h',\ u = \varepsilon u',\ w = \varepsilon^{3/2}w',\ r = \varepsilon^{-1/2}r',\ t = \varepsilon^{-1/2}t'; \tag{2.1}$$

$$x = \int\limits_{r_0}^{r'} H^{-1/2}dr' - t', \quad \tau = \varepsilon r', \quad z = [\varepsilon h' - H(\tau)]\,q - H(\tau), \tag{2.2}$$

где x, q, τ — новые независимые переменные.

Замена независимых переменных (2.2) означает переход в систему координат, движущуюся в положительном направлении оси r с критической скоростью $V = \sqrt{H(\tau)}$. Кроме того, мы переходим от области движения $r < \infty$, $-H(\tau) \leqslant z \leqslant h(x, t)$ с неизвестной верхней границей к фиксированной по q области $x < \infty$, $0 \leqslant q \leqslant 1$.

Подставляя (2.1), (2.2) в (1.1) — (1.5) и опуская штрихи, получаем

(2.3) $$\varepsilon^{3/2}(u_x + H^{-1/2}w_q) + \varepsilon^{5/2}[H^{1/2}u_\tau + H^{-1}hu_x - (H^{-1}h_x + H^{-1/2}\dot{H})qu_q + kH^{1/2}u/\tau] = O(\varepsilon^{7/2});$$

(2.4) $$\varepsilon u_q + \varepsilon^2 H^{1/2}w_x = O(\varepsilon^3);$$

(2.5) $$\varepsilon^{3/2}(h_x - H^{1/2}u_x) + \varepsilon^{5/2}(H^{1/2}h_\tau + H^{-1}hh_x - H^{-1/2}hu_x + uu_x) = O(\varepsilon^{7/2});$$

(2.6) $$\varepsilon^{3/2}(h_x + w) - \varepsilon^{5/2}H^{-1/2}uh_x = O(\varepsilon^{7/2}) \text{ при } q = 1;$$

(2.7) $$\varepsilon^{3/2}w + \varepsilon^{5/2}\dot{H}u = 0,\ H = H(\tau),\ \dot{H} \equiv dH/d\tau \text{ при } q = 0.$$

Будем теперь искать решение системы (2.3) — (2.7) в виде рядов по степеням ε

(2.8) $$h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x, \tau)\varepsilon^n,\quad u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, \tau, q)\varepsilon^n,\quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, \tau, q)\varepsilon^n.$$

Подставляя (2.8) в (2.3) — (2.7) и приравнивая нулю коэффициент при низшей степени ε в каждом уравнении (2.3) — (2.7), получим задачу в нулевом приближении

$$u_{0x} + H^{-1/2}w_{0q} = 0,\ u_{0q} = 0;$$

при $q = 1$ $h_{0x} - H^{1/2}u_{0x} = 0,\ h_{0x} + w_0 = 0;$

при $q = 0$ $w_0 = 0$; при $x \to \infty$ $h_0 = u_0 = w_0 = 0.$

Решение этой задачи есть

(2.9) $$u_0 = H^{-1/2}h_0,\ w_0 = -h_{0x}q,$$

причем $h_0(x, \tau)$ остается неопределенной. Для того чтобы получить уравнение для $h_0(x, \tau)$, необходимо рассмотреть следующее приближение. Это приближение с учетом (2.9) дает задачу

(2.10) $$u_{1x} + H^{-1/2}w_{1q} + h_{0\tau} + H^{-3/2}h_0h_{0x} - \left(\frac{1}{2}H^{-1}\dot{H} - \frac{k}{\tau}\right)h_0 = 0;$$

(2.11) $$u_{1q} + H^{1/2}qh_{0xx} = 0;$$

(2.12) $$h_{1x} - H^{1/2}u_{1x} + H^{1/2}h_{0\tau} + H^{-1}h_0h_{0x} = 0,\ h_{1x} + w_1 - H^{-1}h_0h_{0x} = 0 \text{ при } q = 1;$$

(2.13) $$w_1 + H^{-1/2}\dot{H}h_0 = 0 \text{ при } q = 0.$$

Неизвестные функции u_1 и w_1 находятся из уравнений (2.10), (2.11) с учетом (2.13). Подставляя найденные u_1 и w_1 в граничные условия (2.12), получим

$$h_{1x} - H^{1/2}\Phi_x + H^{1/2}h_{0\tau} + H^{-1}h_0h_{0x} + \frac{1}{2}Hh_{0xxx} = 0,$$

$$h_{1x} - H^{1/2}\Phi_x - H^{1/2}h_{0\tau} - 2H^{-1}h_0h_{0x} + \frac{1}{6}Hh_{0xxx} - \left(\frac{1}{2}H^{-1/2}\dot{H} + \frac{kH^{1/2}}{\tau}\right)h_0 = 0,$$

где $\Phi(x, \tau)$ — произвольная функция, возникающая при интегрировании уравнения (2.11). Исключая из этих уравнений h_1, получаем искомое уравнение для определения $h_0(x, \tau)$

(2.14) $$h_{0\tau} + \frac{3}{2}H^{-3/2}h_0h_{0x} + \frac{1}{6}H^{1/2}h_{0xxx} + \left(\frac{1}{4}H^{-1}\dot{H} + \frac{k}{2\tau}\right)h_0 = 0.$$

Уравнения (2.14), (2.9) определяют в нулевом приближении волну, распространяющуюся в положительном направлении оси r в осесимметричном ($k = 1$) и плоском ($k = 0$) случаях в водоеме переменной глубины. При $H(\tau) \equiv 1$ уравнение совпадает с полученным в работе [1], где исследованы некоторые свойства этого уравнения. При $k = 0$ (плоский случай) уравнение (2.14) с точностью до системы координат совпадает с «обобщенным» уравнением КДВ [3].

Подставляя в законы сохранения (1.6), (1.7) новые переменные (2.1), (2.2) и учитывая (2.8), (2.9), получим

$$(2.15)\qquad \tau^k H^{1/2}(\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau, x)\,dx = \tau_0^k H^{1/2}(\tau_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau_0, x)\,dx = C_1 + O(\varepsilon);$$

$$(2.16)\qquad \tau^k H^{1/2}(\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_0^2(\tau, x)\,dx = \tau_0^k H^{1/2}(\tau_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_0^2(\tau_0, x)\,dx = C_2 + O(\varepsilon),$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы; $h_0(\tau_0, x)$ — начальное возмущение свободной поверхности. Появление на нижнем пределе $-\infty$ объясняется тем, что рассматриваются волны с длиной порядка $\varepsilon^{-1/2}$ при $r \geqslant \varepsilon^{-3/2}$. Поскольку законы сохранения массы и энергии являются одними из наиболее важных свойств исходной точной задачи, естественно считать, что из всех решений приближенного уравнения (2.14) физический смысл имеют только те, которые удовлетворяют законам сохранения (2.15), (2.16).

Можно проверить, что закон сохранения энергии (2.16) выполняется для любого точного решения уравнения (2.14) при принятом выше предположении о достаточно быстром стремлении $h_0(\tau_0, x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Закон сохранения массы (2.15) выполняется только при условии $C_1 = 0$, т. е.

$$(2.17)\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau, x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau_0, x)\,dx = 0,$$

причем равенство нулю интеграла от начального возмущения $h_0(\tau_0, x)$ по x является необходимым и достаточным условием выполнения закона сохранения массы при $k = 1$ и произвольной функции $H(\tau)$. Это означает, во-первых, что в осесимметричном случае в волне одного направления наряду с горбами обязательно присутствуют впадины. Во-вторых, из этого следует, что уравнение (2.14) применимо в осесимметричном случае не ранее того момента, когда из произвольного начального возмущения выработается волна, удовлетворяющая условию (2.17). До этого момента для эволюции начального возмущения существенны волны обоих направлений, и уравнение (2.14) не является достаточным для описания этой эволюции.

В плоском случае ($k = 0$) при $H(\tau) \equiv \mathrm{const}$ закон сохранения массы выполняется для произвольной C_1, и условие (2.17) отсутствует, в то время как при $k = 1$ это условие необходимо и при $H(\tau) \equiv \mathrm{const}$ [1].

Необходимо заметить, что в плоском случае при $H(\tau) \neq \mathrm{const}$ условие (2.17) является неудовлетворительным, поскольку доказано существование уединенной волны, для которой (2.17) не выполняется. В этом случае, по-видимому, необходимо привлекать к рассмотрению уравнение для h_1, которое допускает появление волн с длиной, на порядок большей, чем у h_0. Наличие таких волн, не нарушая квадратичный закон сохранения энергии (ввиду малости амплитуды), может привести к выполнению закона сохранения массы (2.15). С физической точки зрения появление волн с длиной порядка неоднородностей дна естественно. Однако этот вопрос является самостоятельной проблемой, которая в данной работе не рассматривается.

Теперь с учетом сделанных замечаний задача о распространении длинных плоских ($k = 0$) и осесимметричных ($k = 1$) волн в положительном направлении оси r может быть поставлена следующим образом: найти функцию $h_0(\tau, x)$, удовлетворяющую уравнению (2.14), начальному условию $h_0(\tau_0, x) = F(x)$ ($F(x)$ — заданная функция), граничным условиям $h_0(\tau, x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ и законам сохранения (2.16), (2.17). При $k = 0$ и $H(\tau) \equiv \mathrm{const}$ (2.17) заменяется на (2.15).

3. Одним из интересных вопросов, возникающих при исследовании поставленной задачи, является вопрос об асимптотическом поведении решений уравнения (2.14) для больших τ при заданной $H(\tau)$. В частности, представляет интерес практически важный случай уменьшения глубины с ростом τ, что соответствует перемещению волны из открытого океана к побережью.

Из уравнения (2.14) видно, что при уменьшении глубины роль нелинейного члена должна возрастать из-за коэффициента $H^{-3/2}$. С другой стороны, известно, что наличие нелинейности приводит к укручению фронта волны, что влечет за собой автоматически рост дисперсионного члена с третьей производной от h_0 по x. Следовательно, этот член должен быть одного порядка с нелинейным, несмотря на то что перед ним стоит убывающий коэффициент. Учитывая эти соображения, можно попытаться представить h_0 в виде

$$h_0(x, \tau) = f(\tau)U[\varphi(\tau)x,\ T(\tau)], \tag{3.1}$$

где функции $f(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ определяются из двух условий. Одно из них — равенство между собой коэффициентов при нелинейном и дисперсионном членах. В качестве второго условия потребуем, чтобы после подстановки (3.1) в закон сохранения энергии (2.16) получилось следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^2(T, \eta)\, d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(0, \eta)\, d\eta = C, \tag{3.2}$$

где $\eta = \varphi(\tau)x$ и $T(\tau)$ — новые независимые переменные. Это приводит к представлению h_0 в виде

$$h_0(x, \tau) = \frac{1}{\tau^{2k/3}H}\, U(\eta, T); \tag{3.3}$$

$$\eta = \frac{3x}{\tau^{k/3}H^{3/2}}, \quad T = \frac{9}{2}\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau^k H^4}. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.3), (3.4) в (2.14), (2.15), получим

$$U_T + UU_\eta + U_{\eta\eta\eta} - \tau^k H^4\left(\frac{2}{9}\frac{k}{\tau} + \frac{\dot H}{H}\right)\left(\frac{1}{3}\eta U_\eta + \frac{1}{6}U\right) = 0; \tag{3.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(T, \eta)\, d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} U(0, \eta)\, d\eta = 0. \tag{3.6}$$

Кроме того, $U(T, \eta)$ удовлетворяет закону сохранения энергии (3.2)

Из (3.5) следует, что в частном случае $k = 1$, $H(\tau) = \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{-2/9}$ U (T, η) определяется уравнением

$$U_T + UU_\eta + U_{\eta\eta\eta} = 0, \tag{3.7}$$

т. е. уравнением КДВ, асимптотическое решение которого при больших T изучено достаточно полно [2].

Из (3.4) в этом случае следует

$$T = \frac{81}{16}\left[\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{8/9} - 1\right] = \frac{81}{16}\left[H^{-4} - 1\right],$$

откуда видно, что $T \to \infty$ при $\tau \to \infty$ и, следовательно, асимптотика $U(T, \eta)$ при $T \to \infty$ определяет через (3.3), (3.4) асимптотику $h_0(\tau, x)$ при $\tau \to \infty$. В частности, для начальных возмущений, удовлетворяющих условию (3.6), в зависимости от параметра σ^2, равного отношению нелинейного члена к дисперсионному в начальный момент, возможны два характерных варианта поведения решения уравнения (3.7). Для значений σ, меньших некоторого критического σ_0, решение представляется в виде расплывающегося волнового пакета, аналогичного по скорости убывания амплитуды и движению фаз решению линеаризованного уравнения КДВ. Для $\sigma > \sigma_0$ при $\tau \to \infty$ решение представляется в виде одного или нескольких солитонов, убегающих вправо:

$$U_i(T, \eta) = a_i \operatorname{ch}^{-2}\left[\sqrt{\frac{a_i}{12}}\left(\eta - \frac{a_i}{3} T\right)\right], \tag{3.8}$$

и расплывающегося волнового пакета в области $\eta \lesssim 0$, причем $a_i = \text{const}$, т. е. после своего образования и отрыва от расплывающегося хвоста солитоны остаются стационарными (в координатах η, T). Из (3.3), (3.4) следует, что в этом случае амплитуда солитонов (3.8) убывает как $\tau^{-4/9}$, длина их не зависит от τ, а скорость перемещения убывает как $\tau^{-1/9}$.

Пусть теперь

$$H(\tau) = (\tau/\tau_0)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) в (3.4), получим

$$T = \frac{9\tau_0^{(1-k)}}{2(4\alpha + 1 - k)}\left[(\tau/\tau_0)^{1-k} H^{-4} - 1\right], \tag{3.10}$$

т. е. $T \to \infty$ при $\tau \to \infty$. Уравнение (3.5) будет иметь вид

$$U_t + UU_\eta + U_{\eta\eta\eta} + \frac{A}{t}\left(\eta U_\eta + \frac{1}{2} U\right) = 0, \tag{3.11}$$

где
$$A = \frac{(2k - 9\alpha)}{6(4\alpha + 1 - k)}; \quad t = T + \frac{9\tau_0^{(1-k)}}{2(4\alpha + 1 - k)},$$

и, следовательно, при больших T $t \cong T$. Законы сохранения массы и энергии имеют вид (3.6), (3.2) соответственно с заменой T на t.

Учитывая изложенные выше свойства решения уравнения КДВ, можно для $\sigma < \sigma_0$ искать решение уравнения (3.11) для больших t в виде ряда по обратным степеням t

$$U(\eta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(\eta, t)\, t^{-m}. \tag{3.12}$$

Тогда для U_0 будем иметь уравнение КДВ, а для последующих приближений рекуррентную систему линейных уравнений. В этом случае U_0 будет иметь вид расплывающегося волнового пакета п отсутствие солитонов, убегающих в область больших η, обеспечивает малость отбрасываемых в нулевом приближении членов для больших t. Для $\sigma > \sigma_0$, т. е. в случае образования солитонов с амплитудами a_i для отсутствия среди отбрасываемых в нулевом приближении членов, не убывающих с ростом t, нужно представить солитоны в виде

$$U_i(\eta, t) = a_i \operatorname{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{a_i}{12}}Z\right), \tag{3.13}$$

где $Z = \eta - \varphi_i(t)$. Функции $\varphi_i(t)$ находятся из условия, чтобы в области η, соответствующей движению i-го солитона, уравнение (3.11) имело вид

$$-\frac{a_i}{3}U_Z + UU_Z + U_{ZZZ} + \frac{A}{t}\left(ZU_Z + \frac{1}{2}U\right) = 0, \tag{3.14}$$

т. е. чтобы главная часть (3.14) представляла собой уравнение, описывающее стационарный (в координатах Z, t) солитон:

$$\varphi_i = \begin{cases} \dfrac{a_i}{3(1-A)}t + \left(\eta_* - \dfrac{a_i}{3(1-A)}\right)\left(\dfrac{t}{t_*}\right)^A, & A \neq 1, \\ \dfrac{\eta_*}{t_*}t + \dfrac{a_i}{3}\ln\dfrac{t}{t_*}, & A = 1, \end{cases} \tag{3.15}$$

где t_*, η_* соответствуют моменту времени и положению i-го солитона, только что отделившегося от хвоста. Таким образом, в этом случае амплитуда, расплывание и скорость солитонов будут определяться формулами (3.3), (3.4) и (3.15). Добавочные члены к нулевому приближению, как можно видеть из (3.9) — (3.12), будут пропорциональны $1/t^m \sim [\tau^{k-1}H^4]^m$ ($m=1, 2, 3, \ldots$), т. е. будут быстро уменьшаться с уменьшением глубины. Заметим, что применяемое здесь приближение КДВ справедливо для области изменения глубины $\sim$ в 10 раз при движении волн из области открытого океана в направлении континентального шельфа.

При $k = 0$ (плоский случай) аналогичные результаты можно получить для случая изменения глубины по закону

$$H(\tau) = [1 - (1/L)(\tau - \tau_0)]^\alpha, \quad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + L, \quad \alpha > 1/4.$$

В этом случае справедливы все формулы (3.11) — (3.15), где

$$A = \frac{9\alpha}{2(4\alpha - 1)}, \quad T = \frac{9L}{2(4\alpha - 1)}\left[H^{-4+\frac{1}{\alpha}} - 1\right], \quad t = T + \frac{9L}{2(4\alpha - 1)}.$$

Добавочные члены будут пропорциональны $\dfrac{1}{t^m} \sim H^{\frac{m(4\alpha-1)}{\alpha}}$, т. е. будут убывать тоже достаточно быстро (например, для линейного изменения глубины $\alpha = 1$ и $1/t^m \sim H^{3m}$). Требование $\alpha > 1/4$ необходимо для того, чтобы $T \to \infty$ при $\tau \to \tau_0 + L$. Более широким классом функций $H(\tau)$, для которых применима приведенная выше процедура получения асимптотики, является, по-видимому, класс функций $H(\tau)$, позволяющих представить выражение $\tau^k H^4\left(\dfrac{9}{2}\dfrac{k}{\tau} + \dfrac{\dot{H}}{H}\right)$ в виде ряда по обратным степеням T. В этом случае $U(\eta, T)$ можно искать в виде, аналогичном (3.12). Разница с описанным выше будет только в скорости убывания добавочных членов.

Отметим, что следующий из (3.3) при $k=0$ (плоский случай) закон возрастания амплитуды волны обратно пропорционально глубине был получен в работе [4] методом адиабатических инвариантов.

4. Рассмотрим случай, когда $H(\tau) \equiv 1$, $k = 1$. Исходное уравнение имеет вид

$$h_{0\tau} + \frac{3}{2}h_0h_{0x} + \frac{1}{6}h_{0xxx} + \frac{1}{2\tau}h_0 = 0. \tag{4.1}$$

Несомненна аналогия уравнения (4.1) с уравнением (3.11). Однако задача об асимптотике решений уравнения (4.1) существенно отличается от рассмотренной выше, поскольку закон сохранения для $h_0(\tau, x)$ имеет вид

$$\tau \int_{-\infty}^{\infty} h_0^2(\tau, x)\, dx = \tau_0 \int_{-\infty}^{\infty} h_0^2(\tau_0, x)\, dx = C, \tag{4.2}$$

и, следовательно, уравнение, получающееся отбрасыванием члена $h_0/2\tau$, не обладает нужным законом сохранения (4.2), в то время как с помощью замены (3.3), (3.4) такое соответствие между уравнением (3.11) и законом сохранения (3.2) было достигнуто. Требование такого соответствия приводит к замене

$$h_0(\tau, x) = \tau^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} V_n t^{-n},$$

причем для V_0 получается линейное уравнение КДВ. Асимптотика для этого уравнения хорошо известна [2] и поэтому здесь не приводится. Таким образом, расходящиеся осесимметричные волны для $H(\tau) \equiv 1$ при больших τ представляют собой расплывающийся волновой пакет с дополнительным по сравнению с плоскими волнами затуханием $\sim\tau^{-1/2}$.

Однако можно указать такие начальные условия, при которых возможно существование при больших τ осесимметричных волн типа солитонов.

Пусть

$$h_0(\tau_0, x) = \mu^{-2/3} f\left(\mu^{-1/3} x\right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f\, dx = 0, \tag{4.3}$$

где $\varepsilon \ll \mu \ll 1$. Подставляя (4.3) в (4.2), получим

$$\mu\tau \int_{-\infty}^{\infty} h_0^2(\tau, x)\, dx = \tau_0 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(z)\, dz. \tag{4.4}$$

Произведем замену функции и независимых переменных

$$h_0(\tau, x) = \frac{1}{(\mu\tau)^{2/3}} U(\eta, t); \tag{4.5}$$

$$\eta = \frac{3x}{(\mu\tau)^{1/3}}, \quad t = \frac{9}{2\mu} \ln \frac{\tau}{\tau_0}. \tag{4.6}$$

Из (4.4) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^2(\eta, t)\, d\eta = 3\tau_0 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(z)\, dz = C. \tag{4.7}$$

Подставляя (4.5), (4.6) в (4.1), получим

$$\frac{1}{(\mu\tau)^{5/3}} \left[U_t + UU_\eta + U_{\eta\eta\eta} - \frac{\mu}{27} \left(U + \frac{1}{2} \eta U_\eta \right) \right] = 0. \tag{4.8}$$

Представляя $U(\eta, t)$ в виде ряда по степеням малого параметра $\mu^* = \mu/27$, получим для U_0 уравнение КДВ, обладающее нужным нам законом сохранения (4.7). В соответствии с ранее изложенным для $\sigma > \sigma_0$ будут появляться солитоны вида (3.13), причем

$$\varphi_i = \frac{a_i}{3} + \left(\eta_* - \frac{a_i}{3} \right) e^{-\frac{1}{2}\mu^*(t - t_*)}, \tag{4.9}$$

где a_i — амплитуды образующихся солитонов, а t_* и η_* соответствуют моменту отрыва солитонов от хвоста. Из (4.8), (3.13) и (4.9) следует, что отбрасываемые члены будут порядка μ^* для любых $t \to \infty$.

Отметим, что аналогичное рассмотрение сферических волн ($k = 2$), которые имеют место, например, в невязкой жидкости с пузырьками газа, приводит к уравнению

$$U_t + UU_\eta + U_{\eta\eta\eta} - \mu^*\tau\left(U + \frac{1}{2}\eta U_\eta\right) = 0, \tag{4.10}$$

из которого следует, что волны типа солитонов могут существовать только для $\tau < 1/\mu^*$. С математической точки зрения это является следствием того факта, что в отличие от осесимметричного случая, для которого автомодельное решение (4.5), (4.6) удовлетворяет закону сохранения энергии (4.7), имеющему место для плоского уравнения КДВ, такое соответствие для сферического случая не существует. Требование того, чтобы уравнение нулевого приближения было уравнением КДВ и закон сохранения энергии для U_0 имел вид (4.7), приводит в сферическом случае к замене

$$h_0'(\tau, x) = \frac{1}{(\mu\tau)^{4/3}} U\left(\frac{x}{(\mu\tau)^{2/3}}, \quad t(\tau)\right),$$

следствием которой и является уравнение (4.10).

В заключение отметим, что асимптотика расходящихся осесимметричных волн, полученная в работах [5, 6], является неверной, поскольку для нее энергия в волне не сохраняется, а растет как $\tau^{1/4}$.

Поступила 8 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Луговцов А. А., Луговцов Б. А.** Исследование осесимметричных длинных волн в приближении КДВ.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 1. Новосибирск, Наука, 1969.
2. **Карпман В. А.** Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., Наука, 1973.
3. **Островский Л. А.** Приближенные методы в теории нелинейных волн.— Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1974, т. 17, № 4.
4. **Whitham G. B.** A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian. — J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, N 2.
5. **Иорданский С. В.** Об асимптотике осесимметричной расходящейся волны в тяжелой жидкости.— ДАН СССР, 1959, т. 125, № 6.
6. **Дорфман А. А.** Осесимметричная задача о неустановившихся длинных волнах конечной амплитуды, вызванных перемещениями дна бассейна.— В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами. М., Наука, 1977.

УДК 532.593

ПРИБЛИЖЕНИЕ «МЕЛКОЙ ВОДЫ» ДЛЯ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. Ю. Ляпидевский

(*Новосибирск*)

Введение. В работе производится моделирование системы уравнений, описывающей плоские нестационарные движения идеальной несжимаемой жидкости в канале. Для определенного класса течений, например с симметричным профилем скорости, уравнения сведены к одномерной нестационарной системе. Следует отметить, что полученная нелинейная система уравнений