ПМТФ, № 5, 1962

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИОННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Н. Ораевский

(*Новосибирск*)

Часто состояния разреженной плазмы неустойчивы по отношению к возбуждению различного рода колебаний. Из-за нелинейного взаимодействия волн в таких случаях возможно возникновение турбулентного режима. Для того чтобы описать, хотя бы качественно, эволюцию какого-либо спектра колебаний, необходимо знать механизмы нелинейного взаимодействия волн, приводящие к возбуждению и затуханию колебаний. Хорошо известно, что на малые колебания при наличии волны конечной амплитуды, образно говоря, действует «вынуждающая» сила. При этом возбуждается находящаяся в резонансе кратная гармоника. Это не единственный механизм возбуждения волн из-за нелинейного взаимодействия гармоник. Дело в том, что малые синусоидальные колебания, распространяющиеся независимо в однородной плазме, при наличии волны конечной амплитуды оказываются, вообще говоря, связанными. Связь волн через начальную амплитуду может привести, в частности, к одновременному возбуждению группы волн. Такой механизм возбуждения волн особенно хорошо исследовать тогда, когда нет возбуждения кратных гармоник, т. е. при решении задач устойчивости нелинейных установившихся колебаний [1].

В предлагаемой работе исследована устойчивость нелинейных установившихся ионных продольных колебаний плазмы в магнитном поле. Показано, что при определенных значениях параметров плазмы ионные продольные колебания неустойчивы по отношению к возбуждению двух поперечных волн.

1. Сущность применяемого метода состоит в следующем. В системе координат, движущейся с волной, коэффициенты в уравнениях для малых отклонений от установившегося движения (которое в дальнейшем будем называть «фоном») не зависят от времени. Поэтому зависимость от времени всех величин, характеризующих малые отклонения от фона, может быть выбрана в виде $\exp(i\Omega t)$. Систему уравнений, описывающих динамику малых возмущений, символически можно записать в виде

$$(\check{H_0} + \check{H_1})\,\varphi = \Omega\varphi \qquad (1)$$

где $\check{H_0}$ — линейный дифференциальный самосопряженный оператор, описывающий колебания однородной плазмы с собственными функциями φ_Ω пропорциональными $\exp(i\, k\cdot r)$ и собственными значениями $\Omega^{(0)}$, удовлетворяющими дисперсионному уравнению $\Omega^{(0)} = \Omega^{(0)}(k)$; $\check{H_1}$ — линейный дифференциальный оператор, зависящий от фона и стремящийся к нулю вместе со стремлением к нулю амплитуды фона.

При исследовании устойчивости волн малой амплитуды $\check{H_1}$ мало и можно воспользоваться теорией возмущений. Задача состоит в отыскании поправки $\omega^{(1)}$ к собственной частоте $\Omega^{(0)}$. В первом приближениии теории возмущений $\omega^{(1)}$ пропорциональна матричному элементу $\langle\varphi_\Omega\,|\check{H_1}|\,\varphi_\Omega\rangle$, причем пространственная зависимость $\check{H_1}$ характеризуется множителями $\exp(\pm\, \mathbf{i}\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r})$. Очевидно, $\omega^{(1)}$ отлично от нуля лишь в том случае, когда одному $\Omega^{(0)}$ соответствуют по меньшей мере два волновых вектора различных по модулю (эти вектора обозначим через $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$) и они связаны между собой соотношением

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_2 \qquad (2)$$

[1] Нелинейные установившиеся волны в плазме рассматривались во многих работах (см., например, [1], где сделан обзор некоторых из них).

Это равенство не изменяется и при переходе к лабораторной системе координат. Частоты же ω_1 и ω_2, соответствующие волновым векторам $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, в лабораторной системе координат связаны соотношением

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega_2 \tag{3}$$

где ω_0— частота колебаний фона в лабораторной системе координат.

Следовательно, неустойчивость того или иного вида колебаний может возникнуть (в первом порядке рассматриваемой теории возмущений) только в том случае, если существуют малые отклонения от фона в виде суммы двух волн, для которых выполняются условия (2) и (3). (Для разных ветвей колебаний могут возникнуть «запреты», связанные с поляризацией волн.)

2. Можно показать, что нелинейные установившиеся ионные продольные колебания(такие колебания существуют, как известно, при $p_i \ll p_l$) устойчивы в первом порядке теории возмущений по $H^{\check{}}_1$ в плазме без магнитного поля. Здесь будет исследована устойчивость таких колебаний по отношению к одновременному возбуждению двух поперечных волн в плазме с магнитным полем.

Все величины, характеризующие фон, можно представить в виде

$$A_i = A_{i0} + 2\delta A_i\,(k_0)\cos(\mathbf{k}_0\mathbf{r}') + O\,(\delta A_i^2) \tag{4}$$

где $\mathbf{k}_0$ — волновой вектор «фона» ($\mathbf{k}_0 \| \mathbf{H}_0$), $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}t$, $\mathbf{u}$ — фазовая скорость волны.

Так как устойчивость будет исследоваться в первом порядке теории возмущений по δA_i, слагаемое $O\,(\delta A_i^2)$ можно не учитывать.

Гидродинамические уравнения, описывающие распространение поперечных волн на «неоднородном» фоне, имеют вид [1]

$$\begin{gathered}
M\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\cos(k_0 r')\,\delta\mathbf{v}_i\cdot\nabla\right)\mathbf{v}_i = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\,\mathbf{v}_i\times\mathbf{H}_0 + \frac{e}{c}\,2\cos(\mathbf{k}_0\mathbf{r}')\,\delta\mathbf{v}_i\times\mathbf{H}\\
m\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\cos(\mathbf{k}_0\mathbf{r}')\,\delta\mathbf{v}_l\cdot\nabla\right)\mathbf{v}_l = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}\,\mathbf{v}_l\times\mathbf{H}_0 - \frac{e}{c}\,2\cos(\mathbf{k}_0\mathbf{r}')\,\delta\mathbf{v}_l\cdot\mathbf{H}\\
\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi n_0 e\frac{1}{c}\left(1 + 2\,\frac{\delta n}{n_0}\cos(\mathbf{k}_0\mathbf{r}')\right)(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_l)\\
\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}
\end{gathered}\tag{5}$$

Здесь индексы i и e относятся соответственно к ионным и электронным величинам; $\mathbf{H}_0$ — постоянное магнитное поле; $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — электрическое и магнитное поля поперечных волн, распространяющихся вдоль $\mathbf{H}_0$. Выбирая ось x вдоль магнитного поля из (5), легко получить следующую систему уравнений для величин, описывающих динамику рассматриваемых волн:

$$\begin{gathered}
M\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\delta v_i\cos k_0\,\xi\,\frac{\partial}{\partial x}\right)w = \frac{H_0}{4\pi n_0}\left(1 - 2\cos k_0\,\xi\,\frac{\delta n}{n_0}\right)\frac{\partial H}{\partial x}\\
\frac{\partial H}{\partial t} = H_0\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{c^2}{\omega_0^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(1 - 2\cos k_0\xi\,\frac{\delta n}{n_0}\right)\frac{\partial H}{\partial x} \mp i\,\frac{c_l H_0}{m\omega_0^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(1 - 2\cos k_0\xi\,\frac{\delta n}{n_0}\right)\frac{\partial H}{\partial x} -\\
- 2\delta v_i\frac{\partial}{\partial x}(\mathscr{H}\cos k_0\xi) + \frac{c^2}{\omega_0^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(2\cos k_0\xi\delta v_i\,\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)
\end{gathered}\tag{6}$$

$$(\xi = x + ut,\ w = v_{iy} \pm iv_{iz},\ H = H_y \pm iH_z)$$

Здесь ω_0 — электронная ленгмюровская частота.

---

[1] Так как давление не дает вклада в поперечные составляющие, член с давлением не записан. Кроме того, в (5) используется условие $n_{0l} = n_{0i} = n_0$.

В нулевом приближении пространственно-временная зависимость искомых величин может быть представлена в виде

$$e^{i\Omega t}\{B_1 e^{ik_1\xi} + B_2 e^{ik_2\xi}\}$$

Тогда из (6) можно получить систему алгебраических уравнений:

$$w_{1,2} + \frac{k_{2,1}\,\delta v}{\omega_{1,2}} w_{2,1} = \frac{k_{1,2} H_0}{4\pi n_0 M \omega_{1,2}} H_{1,2} - \frac{H_0 \delta n}{4\pi n_0^2 M \omega_{1,2}} k_{2,1} H_{2,1} (\omega_{1,2} = \Omega + k_{1,2} v_0)$$

$$\omega_{1,2}\left(1 + \frac{k_{1,2}{}^2 c^2}{\omega_0{}^2}\right) H_{1,2} = H_0 k_{1,2} w_{1,2} + \frac{\delta n}{n_0} \frac{k_{2,1} k_{1,2}\, c^2 \omega_{1,2}}{\omega_0{}^2} H_{2,1} \pm \frac{k_{1,2}{}^2 c^2 \omega_H}{\omega_0{}^2} H_{1,2} + \qquad (7)$$

$$\mp \frac{k_{1,2} k_{2,1}\, c^2 \omega_H\, \delta n}{\omega_0{}^2 n_0} H_{2,1} - k_{1,2}\,\delta v H_{2,1} - k_{1,2}\,\delta v H_{2,1} - \frac{k_{2,1}{}^2 c^2}{\omega_0{}^2} k_{1,2}\,\delta v H_{2,1}$$

Приравнивая нулю определитель системы, получаем следующее выражение для $\omega^{(1)2}$ — квадрата поправки $k\Omega^{(0)}$

$$\omega^{(1)^2} = \left(\frac{\delta v_i}{u}\right)^2 A^2 \left\{k_1 u \left(1 + \frac{k_2{}^2 c^2}{\omega_0{}^2}\right) + \frac{k_2}{k_1} \frac{k_1{}^2 v_A{}^2 - \omega_1{}^2}{\omega_1} + \frac{k_1 k_2 v_A{}^2}{\omega_1}\left(\frac{k_2 u}{\omega_2} - 1\right)\right\} \times$$

$$\times \left\{k_2 u \left(1 + \frac{k_1{}^2 c^2}{\omega_0{}^2}\right) + \frac{k_1}{k_2} \frac{k_2{}^2 v_A{}^2 - \omega_2{}^2}{\omega_2} + \frac{k_1 k_2 v_A{}^2}{\omega_2}\left(\frac{k_1 u}{\omega_1} - 1\right)\right\} \qquad (8)$$

$$A^2 = \frac{\omega_1{}^2 \omega_2{}^2}{\{\omega_1{}^2 (1 + k_1{}^2 c^2 / \omega_0{}^2) + k_1{}^2 v_A{}^2\}\{\omega_2{}^2 (1 + k_2{}^2 c^2 / \omega_0{}^2) + k_2{}^2 v_A{}^2\}} \qquad (9)$$

Здесь $\omega_{1,2}$ — частота колебаний в принятой системе координат.

Используя (2), (3), (8), можно показать, что длинноволновые ионные продольные колебания ($k_0 c \ll \omega_{0i}$) при $n_0 T_e > 2\,(H^2 / 8\pi)$ неустойчивы по отношению к возбуждению двух альфвеновских волн. При этом выражение для инкремента нарастания этих волн имеет простой вид

$$\nu \approx \frac{\delta v_i}{u} \frac{k_0 u}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{v_A}{u}\right)^2} \qquad (10)$$

Так как $T_i \ll T_l$, условие $n_0 T_l > 2\,(H^2/8\pi)$ совместимо с условием $n_0 T_i \ll 2$, $(H^2/8\pi)$, необходимым для существования альфвеновских волн.

Условия возбуждения косых волн здесь не рассматривались. Для таких волн качественная картина будет аналогична исследованной выше.

В заключение отметим, что роль ионных продольных колебаний могут играть модулированные ионные пучки. Для них T_l следует взять равной Mv^2, где v — скорость движения пучка.

Автор благодарен Р. З. Сагдееву за советы и стимулирующие дискуссии.

Поступила 8 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Ядерный синтез. Нелинейные колебания плазмы. Международное агентство по атомной энергии. 1961, т. 1, 82.