

К ЗАДАЧЕ О ПРОМЫВКЕ ЗАСОЛЕННОЙ ПОЧВЫ

В. И. Пеньковский, В. А. Постнов

(Новосибирск)

В имеющихся исследованиях по движению солевых растворов в почве, из которых упомянем, например, работы [1,2], как правило, постулируется независимость скорости движения раствора от его концентрации. Это допущение, как указывалось в работе [2], справедливо, если концентрация раствора невелика упрощениям в решениях задач. Однако в случае сильно засоленных почв концентрации в промываемой воде могут достигать значений, близких к предельному насыщению c_* (для поваренной соли, например, концентрация предельного насыщения раствора при 10°C $c_* = 385 \text{ г/л}$).

Вязкость и плотность раствора (минерализованной воды) с повышением концентрации растворенных солей возрастает, причем вязкость значительно более чувствительна к изменению минерализации, нежели плотность, поэтому при изменении концентрации от нуля до предельной насыщенности скорость фильтрации при одном и том же градиенте давления может уменьшиться примерно в два раза [3].

Величина минерализации (г/л)	0	40—50	60—70	100—110	180—200
Вязкость μ (сПа)	1.0	1.3	1.3—1.4	1.45—1.50	1.8—1.9
Плотность ρ (г/см ³)	1.0	1.03	1.05	1.08	1.15

Примем линейные зависимости μ и ρ раствора от его концентрации c

$$\mu(c) = \mu_0 + \beta c, \quad \rho(c) = \rho_0 + \alpha c \quad (1)$$

Соответствующим подбором коэффициентов α и β в формулах (1) можно добиться удовлетворительного отражения реальных зависимостей $\mu(c)$ и $\rho(c)$.

Рассматривая одномерное движение вдоль оси x , направленной вертикально вниз, и пренебрегая эффектом диффузии, приведем уравнения процесса промывки почвы

$$v(x, c, t) = -\frac{k}{\mu(c)} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k\rho(c)g}{\mu(c)} \quad (2)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad -\frac{\partial(vc)}{\partial x} + \gamma(c_* - c) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t} \quad (3)$$

Здесь $v(x, c, t)$ — скорость движения раствора концентрации $c(x, t)$; k, σ — пористость и пористость грунта, соответственно (предполагаются постоянными в процессе движения); $p(x, t)$ — давление в растворе; t — время; γ — коэффициент солевого обмена, характеризующий скорость растворения солей.

Пусть на поверхности почвы (при $x = 0$) и на границе промачивания (стационарной $x = H$, или подвижной $x = h(t) \in [0, H]$) известны давления

$$p(0, t) = p_0(t), \quad p(h, t) = p_1(t) \quad (4)$$

Запишем интеграл первого уравнения (3) в виде

$$v(x, c, t) = \sigma \frac{dA}{dt} \quad (5)$$

Здесь $A(t)$ — произвольная дифференцируемая функция, подлежащая определению, и такая, что $A(0) = 0$. Подставляя (5) во второе уравнение (3), получим

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{dA}{dt} \frac{dc}{dx} = \gamma(c_* - c) \quad (6)$$

Для случая промывки пресной водой примем начальное и граничное условия:

$$c(0, t), \quad c(x, 0) = f(x) \quad (7)$$

В случае подвижной границы промачивания начальное условие, очевидно, задавать не следует. Система характеристик уравнения (6) запишется так:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{dA/dt} = \frac{dc}{\gamma(c_* - c)}$$

Интегрируя эту систему по t от t_0 до t , по x от x_0 до x и по c от c_0 до c , найдем

$$A(t) - A(t_0) = x - x_0, \quad t - t_0 = -\frac{1}{\gamma} \ln \frac{c_* - c}{c_* - c_0} \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что в силу условий (7) интегральная поверхность $c = c(x, t)$ будет претерпевать излом (либо разрыв, если $f(0) \neq 0$) вдоль характеристики, проходящей через точку $x = t = 0$.

В соответствии с этим, полагая $x_0 = 0$, $c_0 = 0$ и исключая параметр t_0 , найдем

$$t = A^{-1} [A(t) - x] = -\frac{1}{\gamma} \ln \frac{c_* - c}{c_*} \quad (0 \leq x \leq A(t))$$

Здесь $y = A^{-1}(x)$ — функция, обратная к функции $x = A(y)$.

Аналогично, полагая $t_0 = 0$, $c_0 = f(x_0)$ и исключая x_0 , получим

$$t = -\frac{1}{\gamma} \ln \frac{c_* - c}{c_* - f[x - A(t)]} \quad (A(t) < x \leq H)$$

Таким образом, функция $c(x, t)$ может быть записана в виде

$$c(x, t) = \begin{cases} c_* \{1 - \exp(-\gamma t + \gamma A^{-1}[A(t) - x])\} & (0 \leq x \leq A(t)) \\ c_* - \exp(-\gamma t) [c_* - f(x - A)] & (A(t) < x \leq H) \end{cases} \quad (9)$$

Из уравнения (2) получаем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu(c)}{k} \sigma \frac{dA}{dt} + g\rho(c)$$

Интегрируя это по x от 0 до H и принимая во внимание условие (6), найдем

$$p_1(t) - p_0(t) = -\frac{\sigma}{k} \frac{dA}{dt} \left[\int_0^A \mu(c) dx + \int_A^H \mu(c) dx \right] + g \left[\int_0^A \rho(c) dx + \int_A^H \rho(c) dx \right]$$

С учетом (1), (2) и (9) это уравнение для $A(t)$ примет вид

$$\frac{k}{\sigma} \frac{dt}{dA} = \frac{B_1 + \beta(D - E)}{g[B_2 + \alpha(D - E) + p_0 - p_1]} \quad (10)$$

$$B_1 = (\mu_0 + \beta c_*) H - \beta c_* e^{-\gamma t} (H - A),$$

$$B_2 = (\rho_0 + \alpha c_*) H - \alpha c_* e^{-\gamma t} (H - A), \quad E = c_* e^{-\gamma t} \int_0^A \exp[\gamma A^{-1}(A - x)] dx$$

$$D = e^{-\gamma t} [F(H - A) - F(0)],$$

Здесь $F = \int (x) dx$ — известная функция. В случае подвижной границы промачивания в уравнении (10) следует H заменить на A . Легко видеть, что уравнение (10) сводится к следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\sigma} \frac{dt}{dA} &= \frac{B_1 + \beta[D - c_* \exp(-\gamma t) \Phi(A)]}{g\{B_2 + \alpha[D - c_* \exp(-\gamma t) \Phi(A)]\} + p_0 - p_1} \\ \frac{d\Phi}{dA} &= \exp[\gamma t(A)], \quad \Phi(0) = 0, \quad A(0) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Для начального распределения концентрации примем линейный закон

$$f(x) = c(0, 0) + \frac{c(H, 0) - c(0, 0)}{H} x$$

Положим в системе (11) $p_1 = p_0$ и приведем ее к безразмерному виду

$$\frac{d\tau}{dA_1} = \frac{\gamma_1 (1 + 1/\gamma_1) \exp(\gamma_3 \tau) - \Phi(A_1) - (1 - A_1) [\delta_1 - \omega(1 - A_1)]}{\gamma_2 (1 + 1/\gamma_1) \exp(\gamma_3 \tau) - \Phi(A_1) - (1 - A_1) [\delta_1 - \omega(1 - A_1)]} \quad (12)$$

$$\frac{d\Phi(A_1)}{dA_1} = \exp(\gamma_3 \tau), \quad \tau(0) = 0, \quad \Phi(0) = 0$$

$$A_1 = \frac{A}{H}, \quad \tau = Rt, \quad \gamma_3 = \frac{\gamma}{R}, \quad R = \frac{k}{\sigma} \frac{g\rho_0}{\mu_0 H}$$

$$\gamma_1 = \frac{\beta c_*}{\mu_0}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha c_*}{\rho_0}, \quad \delta_1 = 1 - \frac{c(0, 0)}{c_*}, \quad \omega = \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}, \quad \delta_2 = 1 - \frac{c(H, 0)}{c_*}$$

Если соли находятся только в жидкой фазе, то $\gamma_3 = 0$ и решением системы будет

$$\Phi(A_1) = A_1$$

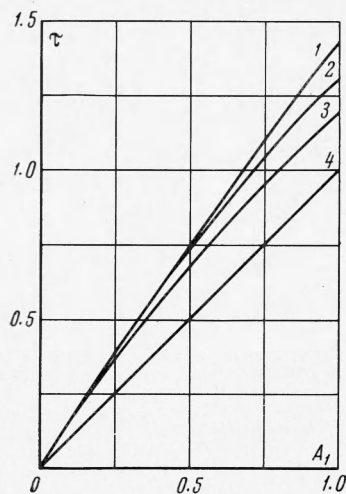
$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (1 - A^0) + \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} - 1 \right) \frac{1}{R} \ln \frac{(2\gamma_2 \omega A^0 + \delta_1^0 \gamma_2 - R)(2\gamma_2 \omega + \delta_1^0 \gamma_2 + R)}{(2\gamma_2 \omega A^0 + \delta_1^0 \gamma_2 + R)(2\gamma_2 \omega + \delta_1^0 \gamma_2 - R)} \\ (R &= \sqrt{(\delta_1 \gamma_2)^2 - 4\gamma_2 \omega}, \quad A^0 = 1 - A_1, \quad \delta_1^0 = 1 - \delta_1, \quad \gamma_2 \delta_1^2 > 4\omega) \end{aligned} \quad (13)$$

Для случая $\omega = 0$, т. е. когда начальное распределение концентрации постоянно по глубине, будем иметь

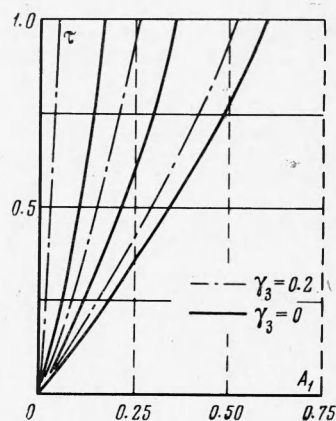
$$\tau = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left[A_1 + \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1} \right) \frac{1}{1 - \delta_1} \ln \left(1 - \frac{A_1}{1 + 1/\gamma_2 (1 - \delta_1)} \right) \right] \quad (14)$$

Отсюда при $A_1 = 1$ найдется время полного рассоления.

Кривые 1—3 на фиг. 1 иллюстрируют некоторые численные и аналитические решения $\tau(A_1)$ при различных параметрах: кривая 1 соответствует случаю $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$, $\gamma_3 = 0.5$; кривая 2 — случаю $\gamma_3 = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.5$; кривая 3 — случаю $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$, $\gamma_3 = 0$. При этом $\gamma_1 = 1.6$, $\gamma_2 = 0.25$. Кривая 4 соответствует предельному движению $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Поставим теперь задачу об определении зависимости $\tau(A_1)$ в предположении, что промывается сухая засоленная почва и что почвенный воздух всегда находится в замкнутом объеме между фронтом промачивания и водоупором. Предположим, также что в этом случае давление p_1 почвенного воздуха будет возрастать пропорционально сжатию его фильтрующей жидкостью, т. е., что справедливо уравнение состояния идеального газа при постоянной температуре вида

$$p_0 H = p_1 (H - A) = \text{const}, \quad \text{или} \quad p_0 - p_1 = p_0 \frac{A_1}{1 - A_1} \quad (15)$$

Так как в начале движения граница промачивания совпадает с поверхностью почвы то, подставляя (13) в (11) и полагая $H = A$, $F \equiv 0$, получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dA_1} &= \frac{(1 + \gamma_1) A_1 \exp(\gamma_3 \tau) - \gamma_1 \Phi(A_1)}{(1 + \gamma_2) A_1 \exp(\gamma_3 \tau) - \gamma_2 \Phi(A_1) - h_0 A_0 \exp(\gamma_3 \tau)} \\ \frac{d\Phi}{dA_1} &= \exp(\gamma_3 \tau), \quad \tau(0) = 0, \quad \Phi(0) = 0, \quad A_0 = \frac{A_1}{1 - A_1}, \quad h = \frac{p_0}{\rho_0 g H} \end{aligned} \quad (16)$$

Из физических представлений ясно, что граница промачивания при описанном условии защемления почвенного воздуха никогда не достигнет водоупора; ее расстояние от поверхности почвы будет стремиться к пределу $\lim_{\tau \rightarrow \infty} A_1(\tau) = \eta$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Таким образом $\lim_{\tau \rightarrow \infty} (dA_1/d\tau) = 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ и

$$\eta = \frac{1}{1 + h_0/(\gamma_2 + 1)}$$

В частности, при $\gamma_3 = 0$ решение системы (14) имеет вид

$$\tau = \eta_0 \left[A_1 - (1 - \eta_0) \ln \left(1 - \frac{A_1}{\eta_0} \right) \right], \quad \eta_0 = \frac{1}{1 + h_0}$$

Некоторые случаи движения с защемлением представлены на фиг. 2. При этом концентрация солей в растворе определится формулой

$$c(x, t) = c_s \{ 1 - \exp(-\gamma t + \gamma A^{-1}) [A(t) - x] \} \quad 0 \leq x \leq A(t)$$

Поступила 26 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. В е р и г и н Н. Н. Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники. Изв. АН СССР, ОТН, 1953, № 10.
2. А в е р ь я н о в С. Ф., Ц з я Д а л и н. К теории промывки засоленных почв. Докл. ТСХА, 1960, вып. 56.
3. Справочник гидрогеолога. М., Гостеолтехиздат, 1962.