УДК 532.51

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ВЕКТОРА СКОРОСТИ ОТ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Д. В. Князев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь, Россия
E-mail: dvk5@yandex.ru

Показано, что классы точных решений уравнений Навье — Стокса с линейной или обратно пропорциональной зависимостью компонент скорости от некоторых пространственных переменных можно расширить путем добавления конечных возмущений, являющихся степенными и тригонометрическими рядами или их отрезками по одной из координат. Приведен пример однократного интегрирования трехмерных уравнений движения вязкой жидкости, которые в этом случае сводятся к одному уравнению для потенциала двух составляющих скорости.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, точные решения, разделение переменных, переопределенные системы.

DOI: 10.15372/PMTF20180521

Введение. В настоящее время под точным решением (классом точных решений) уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости, как правило, понимается представление гидродинамических полей, редуцирующее уравнения Навье — Стокса к замкнутой системе дифференциальных уравнений относительно неизвестных, зависящих от одного или двух аргументов, одним из которых обычно является время.

Особое место среди решений уравнений динамики вязкой жидкости занимают потенциальные решения и решения Бельтрами, так как в обоих случаях уравнения системы Навье — Стокса сводятся к линейным уравнениям. Однако порядок этих линейных уравнений значительно ниже порядка исходных уравнений, что не позволяет удовлетворить необходимым граничным условиям, например условиям прилипания.

Наибольший интерес представляют классы точных решений, наследующие нелинейные свойства гидродинамических уравнений и сохраняющие высокий порядок. Большую часть таких классов решений можно отнести к трем типам: конические течения, вектор скорости которых обратно пропорционален расстоянию до начала координат [1, 2]; решения с линейной зависимостью некоторых компонент вектора скорости от двух декартовых координат [3, 4]; решения с линейной зависимостью некоторых компонент вектора скорости от одной пространственной переменной (как правило, осевой координаты в цилиндрической системе) [5–7]. Таким образом, данные классы таковы, что одна или две пространственные переменные отделяются и составляющие вектора скорости имеют вид линейной либо обратно пропорциональной зависимости от этих переменных.

В настоящей работе показано, что перечисленные классы можно дополнить таким образом, чтобы некоторые компоненты вектора скорости записывались в виде степенных и тригонометрических рядов или их отрезков по одной из переменных.

Анализ точных решений уравнений Навье — Стокса выполнен в [8, 9]. Работа [10] посвящена построению точных решений уравнений гидродинамики с использованием методов группового анализа дифференциальных уравнений, а также обсуждению понятия точного решения с теоретико-групповой точки зрения.

1. Решения, линейные по одной координате. Уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости в декартовой системе координат допускают представление гидродинамических полей, при котором одна из компонент вектора скорости (V_x, V_y, V_z) линейно зависит от соответствующей ей координаты [4]:

$$\begin{gathered} V_x = u(t,x,y), \quad V_y = v(t,x,y), \quad V_z = W(t,x,y) - zw(t,x,y), \\ P = p_0(t,x,y) + zp_1(t) + z^2 p_2(t)/2. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь P — давление, отнесенное к постоянной плотности среды с кинематической вязкостью ν; новые неизвестные функции u, v, w, p_0 удовлетворяют замкнутой системе

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + vu_y = \nu\,\Delta u - p_{0x}, \quad v_t + uv_x + vv_y = \nu\,\Delta v - p_{0y}, \quad w = u_x + v_y, \\ w_t + uw_x + vw_y - w^2 = \nu\,\Delta w + p_2, \end{gathered} \tag{2}$$

функция $W(t,x,y)$ находится из линейного уравнения

$$W_t + uW_x + vW_y - wW = \nu\,\Delta W - p_1, \tag{3}$$

индексы t, x, y обозначают частные производные по соответствующим переменным; Δ — двумерный оператор Лапласа.

Система (2) более простая, чем исходные трехмерные уравнения Навье — Стокса, однако сложна для того, чтобы решение (1) считать классом точных решений уравнений гидродинамики в указанном ранее смысле. Поскольку первая пара уравнений (2) по форме совпадает с уравнениями двумерного движения вязкой жидкости, продолжить редукцию можно в двух направлениях: рассмотреть квазипотенциальные течения либо применить к (2) известные классы точных решений уравнений Навье — Стокса.

2. Квазипотенциальные решения. Квазипотенциальными будем называть решения типа (1), такие что вектор $(V_x, V_y, 0)$ имеет потенциал: $u = \Phi_x$, $v = \Phi_y$. Первые два уравнения (2) сводятся к интегралу типа интеграла Лагранжа — Коши, наличие которого позволяет получить явные выражения для p_0, из остальных уравнений получаем уравнение для потенциала $\Phi(t,x,y)$. В результате имеем

$$\begin{gathered} \Delta\Phi_t + \Phi_x\,\Delta\Phi_x + \Phi_y\,\Delta\Phi_y - \Delta\Phi\,\Delta\Phi = \nu\Delta\Delta\Phi + p_2, \\ w = \Delta\Phi, \qquad p_0 = p_{00} + \nu\,\Delta\Phi - (\Phi_x\Phi_x + \Phi_y\Phi_y)/2 - \Phi_t. \end{gathered} \tag{4}$$

Таким образом, система (2) один раз проинтегрирована ($p_{00}(t)$ — функция, появляющаяся в результате интегрирования) и описание трехмерных квазипотенциальных течений типа (1) сведено к нахождению решений уравнения (4). Например, решению (4) удовлетворяет семейство решений

$$\Phi = Ax + By + Cx^2/2 + Dy^2/2 + Exy + F\sin(\lambda x + \mu y + \theta),$$

где девять функций времени A, B, C, D, E, F, λ, μ, θ связаны уравнениями

$$(C+D)_t-(C+D)^2-(\lambda^2+\mu^2)^2F^2=p_2,$$
$$[(\lambda^2+\mu^2)F]_t+[\nu(\lambda^2+\mu^2)-2(C+D)](\lambda^2+\mu^2)F=0,$$
$$(\theta_t+\lambda A+\mu B)(\lambda^2+\mu^2)F=0,\qquad \lambda_t+C\lambda+E\mu=0,\qquad \mu_t+D\mu+E\lambda=0.$$

3. Обобщенный класс решений Хименца. Двумерные уравнения Навье — Стокса допускают класс точных решений Хименца [11], что позволяет искать решение двух первых уравнений (2) в виде

$$u=u(t,x),\qquad v=V(t,x)+yg(t,x),\qquad p_0=p(t,x)+yp_3(t)+y^2p_4(t)/2.$$

В результате (2) сводится к замкнутой системе одномерных уравнений

$$\begin{gathered} w=u_x+g,\qquad g_t+ug_x+g^2=\nu g_{xx}-p_4,\qquad w_t+uw_x-w^2=\nu w_{xx}+p_2,\\ V_t+uV_x+gV=\nu V_{xx}-p_3,\qquad p=\nu u_x-\frac{u^2}{2}-\int u_t\,dx. \end{gathered}\tag{5}$$

Как и в рассмотренном выше случае, функцию W считаем зависящей от времени t и двух пространственных переменных и удовлетворяющей следующему из (3) уравнению

$$W_t+uW_x+(V+yg)W_y-wW=\nu\,\Delta W-p_1.$$

Частные решения этого уравнения можно искать в виде полиномов по степеням переменной y с коэффициентами, удовлетворяющими цепочкам линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} W=\sum_{n=0}^{N}y^nW_n(t,x),\\ W_{nt}+uW_{nx}+(ng-w)W_n+(n+1)(1-\delta_{n,N})VW_{n+1}=\\ =\nu[W_{nxx}+(n+1)(1-\delta_{n,N-1})(1-\delta_{n,N})W_{n+2}]-p_1\delta_{n,0} \end{gathered}\tag{6}$$

($\delta_{i,j}$ — символы Кронекера).

Систему (6) следует решать последовательно, начиная с номера N.

Таким образом, уравнения гидродинамики вязкой жидкости допускают решения, в которых одна из компонент вектора скорости может быть представлена в виде полинома произвольной степени N по одной из декартовых координат:

$$V_x=u(t,x),\qquad V_y=V(t,x)+yg(t,x),\qquad V_z=\sum_{n=0}^{N}y^nW_n(t,x)-zw(t,x),$$
$$P=p(t,x)+zp_1(t)+z^2p_2(t)/2+yp_3(t)+y^2p_4(t)/2.$$

Новые неизвестные удовлетворяют уравнениям (5), (6). При $N=1$ полученный результат является частным случаем решений с двумя линейно разделяющимися переменными [3].

4. Дополнения к классу конических течений. Рассмотрим решения (1) в полярной системе координат:

$$\begin{gathered} V_r=\frac{u(t,r,\varphi)}{r},\quad V_\varphi=\frac{v(t,r,\varphi)}{r},\quad V_z=W(t,r,\varphi)-\frac{z}{r^2}\,w(t,r,\varphi),\\ P=\frac{p_0(t,r,\varphi)}{r^2}+zp_1(t)+\frac{z^2}{2}\,p_2(t). \end{gathered}\tag{7}$$

Вновь возникает замкнутая относительно u, v, w, p_0 система нелинейных уравнений, причем уравнения для компонент вектора скорости V_r, V_φ по форме аналогичны уравнениям двумерной системы Навье — Стокса (без условия несжимаемости), что позволяет использовать известные двумерные классы для построения трехмерных решений гидродинамических уравнений. Функция W удовлетворяет линейному уравнению в частных производных с переменными коэффициентами. Ниже приведены два случая редукции системы для u, v, w, p_0 к обыкновенным дифференциальным уравнениям и одномерным уравнениям в частных производных, а функция W ищется в виде функции с разделенными переменными.

Следуя работам [12, 13], рассмотрим случай стационарного течения, для которого неизвестные u, v, w, p_0 зависят от автомодельной переменной $\xi = m \ln r + n\varphi$. Частные решения уравнения относительно W ищутся в виде $W(r,\xi) = r^{-k} W_k(\xi)$ (n — целое число; m, k — действительные числа). В итоге получаем класс точных решений уравнений Навье — Стокса, таких что z-компоненту скорости можно представить в виде ряда или его отрезка по степеням радиальной переменной:

$$V_r = \frac{u(\xi)}{r}, \quad V_\varphi = \frac{v(\xi)}{r}, \quad V_z = \sum_k r^{-k} W_k(\xi) - \frac{z}{r^2}\, w(\xi), \quad P = \frac{p_0(\xi)}{r^2} + z p_1(t). \tag{8}$$

Новые неизвестные удовлетворяют системе

$$(mu + nv)u' - u^2 - v^2 = 2p_0 - mp_0' + \nu[(m^2 + n^2)u'' - 2(mu + nv)'],$$
$$(mu + nv)v' = -np_0' + \nu[(m^2 + n^2)v'' + 2(nu - mv)'], \qquad w = (mu + nv)',$$
$$(mu + nv)w' - w^2 - 2uw = \nu[(m^2 + n^2)w'' - 4mw' + 4w],$$
$$(mu + nv)W_k' - (w + ku)W_k = \nu[(m^2 + n^2)W_k'' + k^2 W_k] - p_1\delta_{k,2},$$

где штрих обозначает дифференцирование по переменной ξ. При $W_k = 0$ класс (8) совпадает с классом решений, найденных в [6], а при $m = 0$ (см. [14]) обобщает некоторый подкласс трехмерных конических течений [2].

Основываясь на (7), будем полагать, что в любой плоскости, перпендикулярной оси z, течение осесимметрично, а функцию $W(t, r, \varphi)$ будем искать в виде тригонометрического ряда или его отрезка по азимутальному углу φ:

$$V_r = \frac{u(t,r)}{r}, \qquad V_\varphi = \frac{v(t,r)}{r}, \qquad P = \frac{p_0(t,r)}{r^2} + zp_1(t) + \frac{z^2}{2}\, p_2(t),$$
$$V_z = \sum_n [W_{1n}(t,r)\sin(n\varphi) + W_{2n}(t,r)\cos(n\varphi)] - \frac{z}{r^2}\, w(t,r,\varphi).$$

Новые неизвестные удовлетворяют системе

$$r^2 u_t + r u_r u - u^2 - v^2 = 2p_0 - r p_{0r} + \nu[r(ru_r)_r - 2ru_r],$$
$$r^2 v_t + r v_r u = \nu[r(rv_r)_r - 2rv_r], \qquad w = ru_r,$$
$$r^2 w_t + r w_r u - w^2 - 2uw = \nu[r(rw_r)_r - 4rw_r + 4w] + p_2 r^4,$$
$$r^2 W_{1nt} + rW_{1nr}u - nvW_{2n} - wW_{1n} = \nu[r(rW_{1nr})_r - n^2 W_{1n}],$$
$$r^2 W_{2nt} + rW_{2nr}u + nvW_{1n} - wW_{2n} = \nu[r(rW_{2nr})_r - n^2 W_{2n}] - p_1 r^2 \delta_{n,0},$$

где индексы t, r обозначают дифференцирование по соответствующей переменной; $n = 0, 1, \ldots$. Гидродинамические поля вида (8) обобщают класс решений с полем скорости, линейным по осевой координате z [5].

5. Пример переопределенной системы. Решение Кармана, описывающее течение вязкой жидкости, создаваемое вращением диска [11], принадлежит классу решений уравнений гидродинамики с линейной зависимостью некоторых компонент вектора скорости от двух координат [3, 15]. Рассмотрим два примера построения новых решений уравнений Навье — Стокса с разделяющимися переменными на основе класса Кармана. Используя цилиндрическую систему координат, гидродинамические поля представим в виде

$$V_r = \frac{U(t,z)}{r} + ru_z, \qquad V_\varphi = \frac{V(t,z)}{r} + rv(t,z), \qquad V_z = -2u(t,z),$$
$$P = 2\Big(\int u_t\,dz - u^2 - \nu u_z\Big) + p_1(t)\ln r - \frac{r^2}{2}\,p_2(t) - \frac{r^{-2}}{2}\,p_3^2(t) \tag{9}$$

(индексы t, z обозначают дифференцирование по соответствующим переменным). Новые неизвестные удовлетворяют переопределенной системе уравнений

$$u_{tz} + u_z u_z - 2uu_{zz} - v^2 = \nu u_{zzz} + p_2, \qquad v_t + 2vu_z - 2uv_z = \nu v_{zz}; \tag{10}$$
$$U_t - 2uU_z - 2vV = \nu U_{zz} - p_1, \qquad V_t - 2uV_z + 2vU = \nu V_{zz}, \qquad U^2 + V^2 = p_3^2. \tag{11}$$

Изолированная подсистема (10) является замкнутой, пассивная подсистема (11) переопределена, ее тривиальное решение $U = 0$, $V = 0$, $p_1 = 0$, $p_3 = 0$ превращает решение (9) в класс Кармана. Не проводя общий анализ совместности (10), (11), приведем два примера замыкания.

Пусть $v = 0$, $U(t)$, $V = \mathrm{const}$, $p_1 = -U_t$, $p_3^2 = U^2 + V^2$, тогда система (10), (11) совместна и решение (9) описывает некоторое осесимметричное вязкое течение на фоне нестационарного потенциального вихрестока.

Второй пример совместности (10), (11) менее очевиден. При $U = S_1 u_{zz}$, $V = S_1 v_z$, $p_1 = 0$, $S_1 = \mathrm{const}$ первые два уравнения (11) совпадают с продифференцированной системой (10). Из анализа совместности остальных уравнений получаем семейство решений $u(t,z)$, $v(t,z)$, содержащее в качестве параметров четыре функции времени A, B, p_2, p_3 и постоянные S_1, S_2, связанные двумя уравнениями

$$u = \frac{B_t}{2A} - \frac{S_2}{A^2} + \frac{A_t}{2A}\,z - \frac{p_3}{A^2 S_1}\sin{(Az+B)}, \qquad v = \frac{S_2}{A} + \frac{p_3}{AS_1}\sin{(Az+B)},$$
$$p_{3t} = -\nu p_3 A^2, \qquad p_2 = \frac{A_{tt}}{2A} - \Big(\frac{A_t}{2A}\Big)^2 - \Big(\frac{S_2}{A}\Big)^2 + \Big(\frac{p_3}{AS_1}\Big)^2.$$

Заключение. Показано, что уравнения Навье — Стокса допускают точные решения, представляющие собой суперпозицию основного потока, описываемого в рамках одного из классов точных решений с линейной либо обратно пропорциональной зависимостью скорости от некоторых пространственных переменных, и эволюционирующего на фоне этого потока вторичного течения с нелинейной зависимостью скорости от одной из координат. Во всех рассмотренных случаях, за исключением последнего, вторичное течение описывается линейными уравнениями с коэффициентами, вычисляемыми при описании основного течения. Рассмотрен пример возмущения, удовлетворяющего нелинейной переопределенной системе. Полученные решения дополняют известные классы точных решений уравнений гидродинамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Слезкин Н. А.** Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости // Учен. зап. Моск. гос. ун-та. 1934. № 2. С. 89–90.

2. **Аристов С. Н.** Точное решение задачи о точечном источнике // Докл. АН. 1995. Т. 343, № 1. С. 50–52.
3. **Lin C. C.** Note on class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rat. Mech. Anal. 1957. V. 1. P. 392–395.
4. **Сидоров А. Ф.** Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции. Избр. тр.: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
5. **Yuan S. W., Finkelstein A. B.** Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall // Trans. ASME. Ser. E. 1956. V. 78, N 3. P. 719–724.
6. **Нетреба С. Н.** О спиралевидных течениях вязкой несжимаемой жидкости // Метеорология и гидрология. 1988. № 4. С. 15–24.
7. **Аристов С. Н.** Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой жидкости // Докл. АН. 2001. Т. 377, № 4. С. 477–480.
8. **Пухначев В. В.** Симметрии в уравнениях Навье — Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–67.
9. **Drazin P. G.** The Navier — Stokes equations: a classification of flows and exact solutions / P. G. Drazin, N. Riley. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.
10. **Андреев В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1994.
11. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
12. **Гамель Г.** Спиралевидные движения вязкой жидкости // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 1. С. 111–133.
13. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 2 / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963.
14. **Аристов С. Н., Князев Д. В.** Трехмерные струйные течения вязкой жидкости с плоскими свободными границами // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 2. С. 50–53.
15. **Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д.** Точные решения уравнений Навье — Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теорет. основы хим. технологии. 2009. Т. 43, № 25. С. 547–566.

Поступила в редакцию 12/VII 2017 г.,
в окончательном варианте — 28/II 2018 г.