

УДК 532.593.2

МОДЕЛИ ДВУХСЛОЙНОЙ «МЕЛКОЙ ВОДЫ»

Л. В. Овсянников

(Новосибирск)

Введение. Математическая модель «мелкой воды», т. е. асимптотической теории неустановившихся волновых движений на поверхности тонкого слоя идеальной несжимаемой жидкости, находящегося в поперечном поле тяжести, хорошо известна [1]. Особенно примечательным в этой теории является совпадение основных дифференциальных уравнений с уравнениями газовой динамики изэнтропических движений политропного газа с показателем политропы, равным двум. Эта теория была поставлена в работе [2] на прочную асимптотическую основу, получила определенное строгое обоснование в работах [3, 4] и в этом смысле может считаться завершенной. Вместе с тем проблемы океанологии приводят к необходимости изучения волновых движений стратифицированной жидкости, т. е. такой несжимаемой жидкости переменной плотности, которая расслаивается на почти горизонтальные слои семейством изохорических поверхностей. Особый интерес представляют такие случаи стратификации, когда число слоев конечно и в каждом слое плотность постоянна. При этом допускается возможность скольжения одного слоя по другому, т. е. образование контактных разрывов на границах слоев разной плотности. Такие движения интересны тем, что за счет передачи импульса от одного слоя к другому на границах слоев могут развиваться волны значительной амплитуды при сравнительно мало возмущенной внешней поверхности — так называемые внутренние волны [5, 6]. Точная гидродинамическая теория образования и развития внутренних волн очень трудна и продвинута мало (один из немногих точных результатов по стационарным волнам получен в работе [7]). Поэтому первыми шагами в изучении этого явления должно быть построение и исследование простейших моделей, содержащих его основные особенности. Одна из таких моделей — линейная теория — развивается уже почти сто лет и изучена достаточно хорошо. Этого нельзя сказать о нелинейной теории нестационарных внутренних волн, современный прогресс в которой связан главным образом с численным решением отдельных задач. В этой области явно ощущается дефицит в аналитических исследованиях.

Данная работа посвящена выводу и предварительному анализу трех математических моделей волновых движений двухслойной жидкости в асимптотическом приближении «мелкой воды». Здесь рассматривается только тот случай, когда более легкая жидкость расположена сверху над более тяжелой.

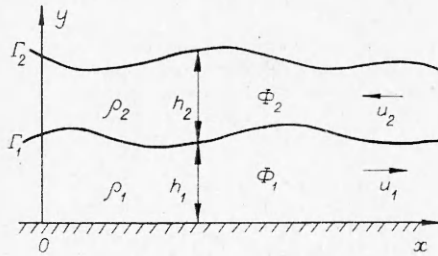
Первая модель описывает движения со свободной верхней границей и представляет собой автономную квазилинейную однородную систему из четырех дифференциальных уравнений первого порядка. Принципиальная особенность этой системы состоит в том, что в определенной области значений глубин слоев и скоростей течения она имеет составной тип, в то время как вне этой области является строго гиперболической. Этот факт нуждается в последующем детальном анализе, так как с ним связана возможная некорректность естественной для волновых движений задачи Коши.

Во второй модели верхняя граница представляет собой горизонтальную непроницаемую стенку. Здесь двухслойная жидкость движется в горизонтальной трубе, или, как сказано в тексте, «под крышкой». Это существенно меняет граничное условие на внешней границе и вносит в модель значительное упрощение. Несмотря на то, что в работах по внутренним волнам прием упрощения задачи путем введения верхней непроницаемой стенки довольно широко распространен, уравнения двухслойной «мелкой воды» «под крышкой», по-видимому, в предшествующей литературе не встречались. В этой модели, состоящей всего из двух дифференциальных уравнений, вышеупомянутая особенность проявляется в более явной форме. Полученная система оказывается просто системой смешанного эллипτικο-гиперболического типа. При этом вопрос о корректности задачи Коши встает особенно остро.

Третья модель носит более частный характер и является подчиненной первым двум. Она относится к случаю малой относительной разности плотностей слоев и малых чисел Фруда относительного скольжения слоя по слою. В результате определенного асимптотического представления о характере этой малости обе предыдущие модели приводят к одной и той же системе из двух уравнений смешанного типа. Привлекательность этой системы в том, что для нее в явном виде вычисляются инварианты Римана и тем самым делается прозрачной вся аналитическая структура модели. При этом устанавливается замечательный факт: полученная система точно эквивалентна системе уравнений газовой динамики политропного газа с показателем политропы, равным двум, причем решения уравнений газовой динамики необходимо рассматривать также и при отрицательных значениях плотности газа.

Можно надеяться, что дальнейшее детальное исследование этих относительно более простых моделей позволит разобраться в существенных особенностях нелинейных волновых движений двухслойной жидкости с тем, чтобы создать основу для развития точной теории и сделать надежными рекомендации прикладного характера.

Модель I. Рассматривается плоскопараллельное неустановившееся движение несжимаемой жидкости над ровным горизонтальным дном в поле тяжести ($g = 1$). Предполагается, что жидкость состоит из двух несмешивающихся слоев разной плотности,



Ф и г. 1

в каждом из которых движение потенциально (фиг. 1). Давление на верхней свободной границе считается равным нулю.

Пусть Φ_i , h_i , ρ_i , Γ_i — соответственно потенциалы скоростей, глубины, плотности и верхние границы i -го слоя ($i = 1, 2$). Если ввести граничные значения потенциалов Φ_i по формулам $\Phi_{ij} = \Phi_i|_{\Gamma_j}$ ($i, j = 1, 2$; $i \geq j$), то из кинематических и динамических условий на границах Γ_i

получится следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} (1) \quad h_{1t} + \Phi_{11x} h_{1x} &= (1 + h_{1x}^2) N_{11}, \quad h_{1t} + \Phi_{21x} h_{1x} = (1 + h_{1x}^2) N_{21}, \\ (h_1 + h_2)_t + \Phi_{22x} (h_1 + h_2)_x &= (1 + (h_1 + h_2)_x^2) N_{22}, \\ \rho_1 \left(\Phi_{11t} + \frac{1}{2} \Phi_{11x}^2 + h_1 \right) - \rho_2 \left(\Phi_{21t} + \frac{1}{2} \Phi_{21x}^2 + h_1 \right) &= \\ &= \frac{1}{2} (1 + h_{1x}^2) (\rho_1 N_{11}^2 - \rho_2 N_{21}^2), \\ \Phi_{22t} + \frac{1}{2} \Phi_{22x}^2 + h_1 + h_2 &= \frac{1}{2} (1 + (h_1 + h_2)_x^2) N_{22}^2, \end{aligned}$$

где $N_{ij} = \Phi_{iy}|_{\Gamma_j}$ ($i, j = 1, 2$); индексами t, x, y обозначены частные производные по соответствующим аргументам.

Выполняется моделирование в духе обычной теории «мелкой воды», при котором делается замена переменных (новые величины, стоящие справа от знака $\rightarrow$ в дальнейшем называются *модельными*)

$$(2) \quad y \rightarrow \varepsilon y, \quad h_i \rightarrow \varepsilon h_i, \quad \Phi_i \rightarrow \varepsilon^{1/2} \Phi_i, \quad \Phi_{ij} \rightarrow \varepsilon^{1/2} \Phi_{ij}, \quad t \rightarrow \varepsilon^{-1/2} t$$

и последующий формальный предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, основанный на нижеследующей лемме. В ней участвуют модельные величины из (2), причем $N_{ij} \rightarrow \varepsilon^{-1/2} N_{ij}$, предполагается надлежащая гладкость функций h_i , Φ_{ij} и учитывается условие непротекания при $y = 0$.

Основная лемма. Для модельных величин (2) справедливы предельные соотношения

$$(3) \quad \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varphi_{21} - \varphi_{22}) &= 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} N_{11} = -h_1 \varphi_{11xx}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} N_{21} &= h_{1x} \varphi_{21x} - (h_1 \varphi_{11x})_x, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} N_{22} &= h_{1x} \varphi_{21x} - h_2 \varphi_{21xx} - (h_1 \varphi_{11x})_x, \end{aligned}$$

первое из которых допускает дифференцирование по t и по x .

Формальное доказательство этой леммы основано на представлении модельных потенциалов

$$\Phi_i = \Phi_i^0 + \varepsilon^2 \Phi_i^1 + O(\varepsilon^4),$$

компоненты которого ищутся при надлежащих краевых условиях после подстановки в уравнение

$$\varepsilon^2 \Phi_{ixx} + \Phi_{iy y} = 0$$

и сравнения членов с одинаковыми степенями ε .

С учетом соотношений (3) уравнения (1) для модельных величин в пределе переходят после небольших преобразований в систему уравнений двухслойной «мелкой воды» (динамические соотношения продифференцированы по x)

$$(4) \quad \begin{aligned} h_{1t} + u_1 h_{1x} + h_1 u_{1x} &= 0, \quad h_{2t} + u_2 h_{2x} + h_2 u_{2x} = 0, \\ u_{1t} + u_1 u_{1x} + h_{1x} + \lambda h_{2x} &= 0, \quad u_{2t} + u_2 u_{2x} + h_{1x} + h_{2x} = 0, \end{aligned}$$

где $u_i = \varphi_{iix}$ ($i = 1, 2$); $\lambda = \rho_2/\rho_1$. Обычные уравнения однослойной «мелкой воды» получаются из (4) для величин h_1 и u_1 , если положить $\lambda = 0$ и отбросить второе и четвертое уравнения. Первые два уравнения (4) выражают дифференциальные законы «сохранения массы» для каждого из слоев, а последние два — дифференциальные законы «сохранения импульса» этих слоев. Точнее, в последнем случае следует говорить об обмене импульсом между слоями.

Свойства волновых движений двухслойной жидкости, описываемых системой (4), тесно связаны с ее типом. Для анализа характеристик вводится их угловой коэффициент $k = dx/dt$ и по известному правилу составляется характеристический определитель $D(k)$ — полином четвертой степени от k . Вычисление дает

$$D(k) = ((u_1 - k)^2 - h_1)((u_2 - k)^2 - h_2) - \lambda h_1 h_2.$$

Наглядное геометрическое представление о расположении корней уравнения $D(k) = 0$ получается, если ввести величины p, q соотношениями

$$(5) \quad u_1 - k = p\sqrt{h_1}, \quad u_2 - k = q\sqrt{h_2}.$$

Уравнение $D(k) = 0$ принимает стандартную форму

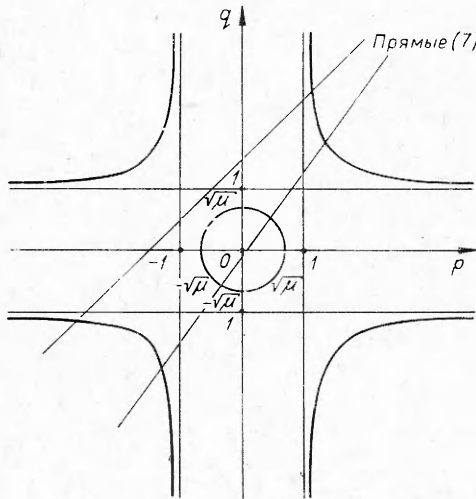
$$(6) \quad (p^2 - 1)(q^2 - 1) = \lambda,$$

а исключение k из (5) дает соотношение

$$(7) \quad q = \sqrt{h_1/h_2} \cdot p + (u_2 - u_1)/\sqrt{h_2}.$$

На плоскости (p, q) уравнение (6) описывает кривую четвертого порядка, имеющую четыре оси симметрии, а уравнение (7) — прямую с положительным угловым коэффициентом $\sqrt{h_1/h_2}$ и начальной ординатой $(u_2 - u_1)/\sqrt{h_2}$. Эти линии показаны на фиг. 2, где $\mu = 1 - \lambda$ и предполагается (как и всюду ниже), что $0 < \lambda < 1$.

Из фиг. 2 следует, что прямая (7) при ненулевых h_1, h_2 всегда имеет по меньшей мере две точки пересечения с кривой (6) и максимум четыре такие точки. Так как каждая точка пересечения кривой (6) с прямой (7) дает характеристику с наклоном $k = u_1 - p\sqrt{h_1}$, то получается следующий вывод. Система (4) имеет



Ф и г. 2

смешанный тип: на некоторых решениях она является строго гиперболической (четыре вещественные характеристики), а на некоторых — системой составного типа (две вещественные и две мнимые характеристики); переход от одного типа к другому получается при слиянии двух характеристик в одну (соответствует касанию прямой (7) и кривой (6)).

Опираясь на данное геометрическое представление характеристик, можно заметить, что составной тип системы (4) реализуется в области значений h_i, u_i вида

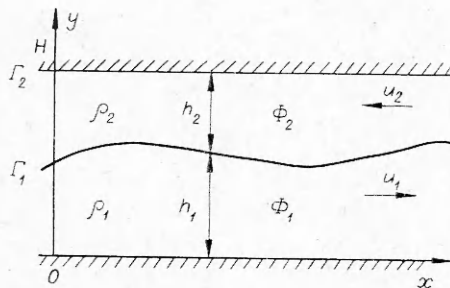
$$\sqrt{h_1}f_1(h_2/h_1) < |u_2 - u_1| < \sqrt{h_1}f_2(h_2/h_1)$$

с некоторыми конкретными функциями f_i , зависящими только от λ . При этом $f_1 \geq \sqrt{\mu}$, $f_2 \geq 1$. Следовательно, строгая гиперболичность имеет место либо для достаточно малых, либо для достаточно больших значений числа Фруда, определяемого относительно скоростью

$$f = |u_2 - u_1|/\sqrt{h_1}.$$

Факт существования области переменных h_i, u_i , в которой система (4) имеет составной тип, ставит под сомнение (но не опровергает!) корректность для нее задачи Коши с произвольными начальными данными при $t = 0$.

Частные решения. Групповой анализ системы (4) показывает, что она допускает 5-параметрическую основную группу, порожденную однопараметрическими группами переносов по t и по x , галилеева переноса и двух независимых растяжений. Это позволяет исследовать различные частные решения, отыскание которых сводится к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, простые волны описываются с помощью параметра k , имеющего смысл углового коэффициента наклона



Ф и г. 3

характеристик прямолинейного семейства к оси t , следующей системой:

$$\begin{aligned} dh_1/dk &= -\sqrt{h_1 h_2}(q^2 - 1)A, & dh_2/dk &= -\sqrt{h_1 h_2}A, \\ du_1/dk &= \sqrt{h_2}(q^2 - 1)pA, & du_2/dk &= \sqrt{h_1}qA, \end{aligned}$$

где

$$A = \frac{3}{2} \frac{p(q^2 - 1)\sqrt{h_2} + q(p^2 - 1)\sqrt{h_1}}{p^2(q^2 - 1)^2 h_2 + q^2(p^2 - 1)h_1},$$

а величины p и q определены соотношениями (5) и связаны уравнениями (6), (7).

Еще одно семейство частных решений описывается с помощью предположения о полиномиальной зависимости искомых h_i , u_i от переменного x . Именно, система (4) имеет точные решения вида

$$u_i = \alpha_i(t)x + \beta_i(t), \quad h_i = \gamma_i(t)x^2 + \delta_i(t)x + \varepsilon_i(t) \quad (i = 1, 2),$$

где функции $\alpha_i, \dots, \varepsilon_i$ удовлетворяют определенной нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, получаемой подстановкой данных выражений в систему (4) и «расщеплением» ее по переменному x .

Полезно также отметить, что система (4) допускает запись в виде законов сохранения

$$(8) \quad M_t + N_x = 0$$

с функциями M , N , зависящими от h_i , u_i . Всего имеется шесть и только шесть линейно-независимых законов сохранения вида (8). Четыре из них видны непосредственно из записи системы (4), причем функция M равна одной из величин h_i или u_i . Два дополнительных закона сохранения верны с функциями

$$M = 2h_1u_1 + 2\lambda h_2u_2, \quad N = 2h_1u_1^2 + 2\lambda h_2u_2^2 + h_1^2 + 2\lambda h_1h_2 + \lambda h_2^2$$

или

$$M = h_1u_1^2 + \lambda h_2u_2^2 + h_1^2 + 2\lambda h_1h_2 + \lambda h_2^2,$$

$$N = h_1u_1^3 + \lambda h_2u_2^3 + 2h_1^2u_1 + 2\lambda h_1h_2(u_1 + u_2) + 2\lambda h_2^2u_2.$$

В предельном случае $\lambda = 0$ движение в нижнем слое определяется известными уравнениями однослойной «мелкой воды». Другой предельный случай $\lambda = 1$ будет рассмотрен ниже.

Модель II. Совершенно другими уравнениями описывается аналогичное движение двухслойной жидкости в том случае, когда верхний слой находится «под крышкой» (фиг. 3). Здесь граница Γ_2 является горизонтальной непроницаемой стенкой (жидкость «зажата» и снизу и сверху). В этом случае из системы (1) выпадают третье и пятое уравнения и добавляется условие непротекания $\Phi_{2y}|_{\Gamma_2} = 0$.

Тот же самый процесс моделирования (2) и применение аналога основной леммы приводит к следующей системе уравнений для модельных величин:

$$(9) \quad h_1 + h_2 = H, \quad h_{1t} + u_1h_{1x} + h_1u_{1x} = 0,$$

$$h_{2t} + u_2h_{2x} + h_2u_{2x} = 0,$$

$$u_{1t} + u_1u_{1x} + h_{1x} = \lambda(u_{2t} + u_2u_{2x} + h_{2x}).$$

Из первых трех уравнений (9) следует «интеграл расхода»

$$u_1 h_1 + u_2 h_2 = a(t).$$

При отсутствии источников необходимо должно быть $a(t) = a = \text{const.}$ В системе координат, движущейся равномерно со скоростью a/H (галилеев перенос), будет $a = 0$. При этом, если положить $h_1 = h$, то для скоростей слоев справедливы формулы

$$u_1 = u, \quad u_2 = -[h/(H - h)]u.$$

Это позволяет исключить u_2 и h_2 из последнего уравнения (9), что приводит к системе уравнений двухслойной «мелкой воды» «под крышкой»

$$\begin{aligned} h_t + u h_x + h u_x &= 0, \\ (H + \mu h) u_t + \frac{H^2 - (2 + \lambda) H h + \mu h^2}{H - h} u u_x + \left(\mu (H - h) - \frac{\lambda H^2}{(H - h)^2} u^2 \right) h_x &= 0, \end{aligned}$$

где, как и прежде, $\mu = 1 - \lambda$. Более симметричная форма этих уравнений получается, если вместо u ввести «нормализованную» скорость v по формуле

$$u = [(H - h)/(H - \mu h)]v.$$

Тогда предыдущая система преобразуется к следующей:

$$\begin{aligned} (10) \quad h_t + \frac{H^2 - 2Hh + \mu h^2}{(H - \mu h)^2} v h_x + \frac{h(1 - h)}{H - \mu h} v_x &= 0, \\ v_t + \frac{H^2 - 2Hh + \mu h^2}{(H - \mu h)^2} v v_x + \left(\mu - \frac{\lambda H^2}{(H - \mu h)^3} v^2 \right) h_x &= 0. \end{aligned}$$

Вычисление характеристик системы (10) дает следующее выражение для углового коэффициента $k = dx/dt$:

$$(11) \quad k = \frac{H^2 - 2Hh + \mu h^2}{(H - \mu h)^2} \pm \sqrt{\frac{h(H - h)}{H - \mu h}} \sqrt{\mu - \frac{\lambda H^2 v^2}{(H - \mu h)^3}}.$$

Из (11) видно, что система (10) имеет смешанный тип. Она является строго гиперболической в полосе $0 < h < H$ для таких (v, h) , для которых

$$(12) \quad |v| < \sqrt{\mu/\lambda} \cdot H^{-1} (H - \mu h)^{3/2}.$$

Для значений (v, h) , удовлетворяющих неравенству противоположного знака, система (10) эллиптическая.

К сожалению, здесь дифференциальное уравнение характеристик на плоскости (v, h) в явном виде не интегрируется. Область (12) и соответствующая сетка характеристик, полученная численным расчетом, показаны на фиг. 4.

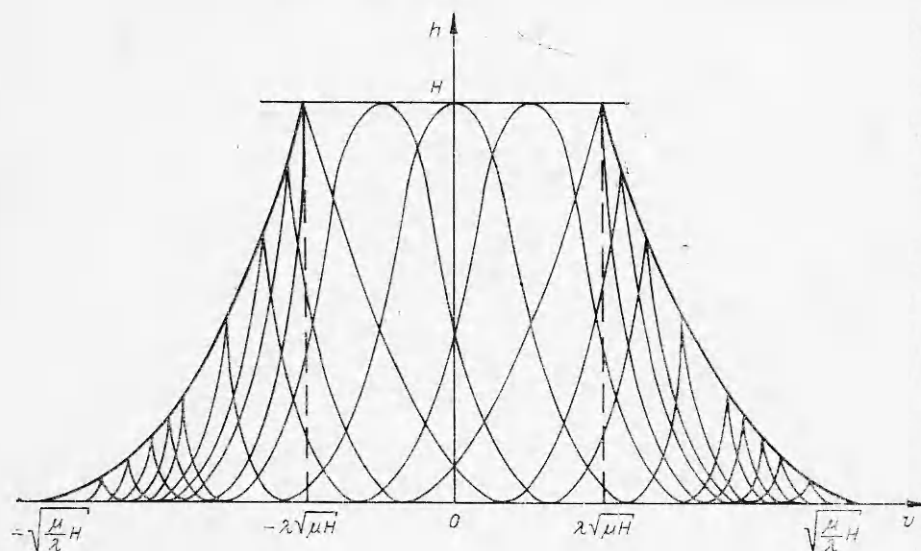
Полезно отметить, что на переходной линии, где

$$v = \pm \sqrt{\mu/\lambda} \cdot H^{-1} (H - \mu h)^{3/2},$$

характеристики в плоскости (v, h) имеют точки возврата. Вместе с тем они имеют касание второго порядка с особыми линиями $h = 0$ и $h = H$.

Модель II замечательна тем, что дает пример эволюционной системы из двух дифференциальных уравнений, которая имеет ясный физический смысл и является системой смешанного типа. Изучение физически осмыс-

ленных задач в модели II вызывает определенные трудности. Действительно, с одной стороны, для эволюционных систем типична корректная постановка задачи Коши с начальными данными при $t = 0$. С другой стороны, выход величин v, h в область эллиптичности системы (10) должен приводить в задаче Коши к развитию адамаровской неустойчивости. Вопрос о том, каким образом справляется модель II с возникающими разру-



Ф и г. 4

шительными тенденциями, пока остается открытым. Следует отметить отсутствие каких-либо известных аналогов этой ситуации в гидрогазодинамике, где до сих пор системы смешанного типа встречались только в стационарных задачах.

Определенные аналитические трудности исследования решений системы (10) связаны с тем, что здесь инварианты Римана в явном конечном виде не вычисляются. Это обстоятельство навело на мысль изучить предельный случай $\mu \rightarrow 0$, в котором, как оказалось, для инвариантов Римана получаются явные аналитические формулы. Однако если в системе уравнений (10) просто положить $\mu = 0$, считая все остальные величины конечными и отличными от нуля, то она превратится в систему эллиптического типа. Точнее, эллиптический тип получится при любом $v \neq 0$, в то время как при $v = 0$ будет иметь место параболическое вырождение. Последнее замечание показывает, что можно ожидать получение существенно новой модели, если сделать одновременный предельный переход $\mu \rightarrow 0$ и $v \rightarrow 0$.

Модель III. Для получения более простой модели смешанного типа в модели II осуществляется новое независимое от (2) моделирование с малым параметром μ

$$(13) \quad h \rightarrow Hh, \quad v \rightarrow \sqrt{\mu H}v, \quad t \rightarrow t/\sqrt{\mu H}.$$

Подстановка в (10) и формальный предельный переход $\mu \rightarrow 0$ приводят к следующей системе уравнений для модельных величин:

$$(14) \quad \begin{aligned} h_t + (1 - 2h)vh_x + h(1 - h)v_x &= 0, \\ v_t + (1 - 2h)vv_x + (1 - v^2)h_x &= 0. \end{aligned}$$

В дальнейшем гидродинамическая система, описываемая уравнениями (14), будет называться «моделью III».

Прежде чем переходить к ее анализу, полезно отметить, что те же самые уравнения (14) получаются, если применить моделирование вида (13) к системе (4). Действительно, при этом для модельных величин первые два уравнения (4) останутся неизменными, в то время как последние два примут вид

$$(15) \quad \begin{aligned} \mu(u_{1t} + u_1 u_{1x} - h_{2x}) + (h_1 + h_2)_x &= 0, \\ \mu(u_{2t} + u_2 u_{2x}) + (h_1 + h_2)_x &= 0. \end{aligned}$$

В пределе при $\mu \rightarrow 0$ отсюда получается, что $h_1 + h_2 = b(t)$. Но тогда первые два уравнения дают «интеграл расхода»

$$h_1 u_1 + h_2 u_2 = -b'(t)x + c(t).$$

Предположение об отсутствии источников, аналогичное сделанному при выводе модели II, влечет необходимые равенства $b(t) = b = \text{const}$ и $c(t) = c = \text{const}$. Ясно, что за счет надлежащего выбора константы H при моделировании вида (13) можно сделать $b = 1$. Поэтому дополнительное использование галилеева переноса приводит к соотношениям

$$(16) \quad h_1 + h_2 = 1, \quad h_1 u_1 + h_2 u_2 = 0,$$

в силу которых первые два уравнения (4) сводятся к одному, например, первому из них. Для получения дополнительного уравнения (второго в исходной модельной системе) необходимо составить из уравнений (15) такое уравнение, которое не содержит высших приближений относительно μ ; оно получается вычитанием уравнений (15)

$$u_{1t} + u_1 u_{1x} - h_{2x} - u_{2t} - u_2 u_{2x} = 0.$$

Теперь можно проверить, что после исключения h_2, u_2 с помощью (16) для величин $h = h_1$ и $v = u_1/(1 - h)$ получится в точности система (14).

В связи с моделью III возникает интересный и важный вопрос обоснования моделирования вида (13) по параметру μ . Нетривиальность этого вопроса связана с различием в поведении характеристик систем (10), (14) на линии параболичности.

Итак, модель III предназначена для описания волновых движений на границе раздела слоев двухслойной жидкости при малой положительной относительной разности плотностей $\mu = (\rho_1 - \rho_2)/\rho_1$ как для слоя «под крышкой», так и при наличии свободной верхней поверхности верхнего слоя. Конечно, в последнем случае этим описанием будут охвачены не все возможные волновые движения, а только такие, для которых оба относительных числа Фруда $F_i = |u_i|/\sqrt{h_i}$ ($i = 1, 2$) имеют порядок $\sqrt{\mu}$. Другими словами, это движения с относительно малыми скоростями скольжения верхнего слоя по нижнему.

Качественные свойства модели III. В дальнейшем плоскость переменных (v, h) будет называться «плоскостью годографа» (этот термин ниже употребляется без кавычек). По смыслу вывода уравнения (14) следует рассматривать в полосе $0 \leq h \leq 1$.

Уравнения характеристик системы (14)

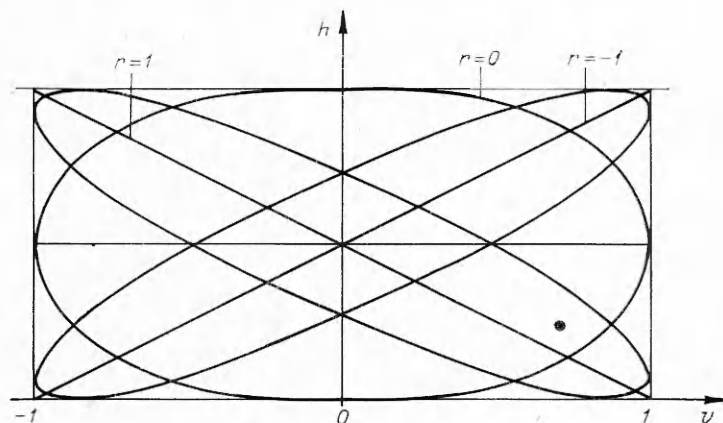
$$(17) \quad dx/dt = k_{\pm} = (1 - 2h)v \pm \sqrt{h(1 - h)}\sqrt{1 - v^2}$$

показывают, что эта система имеет гиперболический тип при $|v| < 1$

и эллиптический тип при $|v| > 1$. Инварианты Римана, т. е. такие функции $r = r(v, h)$, для которых $r_t + kr_x = 0$ в силу уравнений (14), здесь находятся в явном виде

$$(18) \quad r_{\pm} = (1 - 2h)v \pm 2\sqrt{h(1-h)}\sqrt{1-v^2},$$

причем в (17), (18) следует брать одновременно либо верхние, либо нижние знаки. Так как характеристики являются линиями уровня инвариан-



Фиг. 5

тов Римана, то изображением характеристик на плоскости годографа являются линии $r_{\pm} = \text{const}$. Все эти линии содержатся в прямоугольнике гиперболичности $|v| \leq 1, 0 \leq h \leq 1$. Кроме того, для $r = r_{\pm}$ уравнение (18) равносильно уравнению

$$(v + r(2h - 1))^2 + (1 - r^2)(2h - 1)^2 = 1 - r^2.$$

Поэтому $|r| \leq 1$, причем изображения характеристик суть эллипсы, вписанные в прямоугольник гиперболичности (фиг. 5). Теперь видно, в чем состоит упоминавшееся выше различие в поведении характеристик для моделей II и III: в то время как в модели II характеристики имеют точки возврата на линии параболичности, в модели III они касаются аналогичной линии.

Полезно заметить, что из (17), (18) следуют соотношения

$$(19) \quad 4k_+ = 3r_+ + r_-, \quad 4k_- = r_+ + 3r_-.$$

Отсюда в силу неравенства $|r_{\pm}| \leq 1$ получаются оценки

$$3r_{\pm} - 1 \leq k_{\pm} \leq 3r_{\pm} + 1.$$

С помощью инвариантов Римана элементарно описываются простые волны — частные решения системы (14), для которых справедлива функциональная связь вида $F(v, h) = 0$. Как известно, такая связь имеет вид постоянства одного из инвариантов Римана. В простой r_+ -волне тождественно постоянен инвариант Римана r_+ , и так как вдоль каждой характеристики с угловым коэффициентом k_- постоянен также инвариант r_- , то эти характеристики суть прямые линии на плоскости (x, t) . В частности, уравнение семейства прямолинейных характеристик в простой центри-

рованной (в точке $(0, 0)$) r_+ -волне имеет вид

$$x = (1/4)(r_+ + 3r_-)t \quad (-1 \leq r_- \leq 1).$$

Для r_- -волны надо поменять местами r_+ и r_- . Отыскание функций v и h в простой волне упростится, если ввести новые величины φ и θ по формулам

$$(20) \quad v = \sin \varphi, \quad h = \sin^2 (\theta/2) \quad (-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi).$$

Из (18) следует, что с этими величинами

$$r_+ = \sin (\varphi + \theta), \quad r_- = \sin (\varphi - \theta).$$

Поэтому если положить $\xi = x/t$, то, например, для центрированной простой r_+ -волны $3r_- = 4\xi - r_+$ и

$$\varphi + \theta = \arcsin r_+, \quad \varphi - \theta = \arcsin ((4\xi - r_+)/3),$$

откуда находятся φ и θ , а затем v и h по формулам (20).

Уравнения на плоскости годографа. Как и всякая квазилинейная однородная автономная система двух уравнений с двумя независимыми переменными, система (14) линеаризуется путем перехода на плоскость годографа, т. е. таким преобразованием переменных, при котором v и h становятся независимыми переменными. Например, рассмотрение в системе (14) величин (x, t) как функций от (v, h) приводит к уравнениям

$$(21) \quad x_v = (1 - 2h)vt_v - h(1 - h)t_h, \quad x_h = (1 - 2h)vt_h - (1 - v^2)t_v.$$

Отсюда путем перекрестного дифференцирования исключается x и получается одно линейное уравнение для $t = t(v, h)$

$$(22) \quad h(1 - h)t_{hh} - (1 - v^2)t_{vv} + 2(1 - 2h)t_h + 4vt_v = 0.$$

Для удобства аналитического исследования целесообразно привести уравнение (22) к канонической форме путем преобразования к характеристическим переменным (инвариантам Римана) $r = r_+$ и $s = r_-$. Такое преобразование можно выполнить двумя путями: непосредственной заменой переменных в (22) или же, частично повторив предыдущий путь, исходя из характеристической формы системы (14)

$$r_t + k_+ r_x = 0, \quad s_t + k_- s_x = 0,$$

эквивалентной системе

$$x_s = k_+ t_s, \quad x_r = k_- t_r,$$

которая с учетом формул (19) переписывается в виде

$$(23) \quad 4x_s = (3r + s)t_s, \quad 4x_r = (r + 3s)t_r.$$

Исключение функции x из (23) приводит к каноническому уравнению Эйлера — Пуассона

$$(24) \quad t_{rs} - \frac{3}{2} \frac{1}{r-s} (t_r - t_s).$$

Вторая каноническая форма уравнения (22) (или (24)) получается в результате замены переменных

$$\xi = (1 - 2h)v = \frac{r+s}{2}, \quad \eta = \frac{1}{h(1-h)(1-v^2)} = \frac{16}{(r-s)^2}, \quad t(r, s) = z(\xi, \eta)$$

и оказывается такой

$$(25) \quad \eta^3 z_{\eta\eta} - z_{\xi\xi} = 0.$$

Сопоставление уравнения (24) с аналогичным уравнением, возникающим в газовой динамике политропного газа при описании изэнтропических движений, для которого числовой коэффициент равен $(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)$ (γ — показатель политропы), показывает, что эти уравнения совпадают при $\gamma = 2$. Тем самым возникает аналогия, которую хотелось бы установить в точной форме. Это оказывается возможным, а именно, если ввести новые величины

$$(26) \quad \tilde{\rho} = h(1 - h)(1 - v^2), \quad \tilde{u} = (1 - 2h)v,$$

то система (14) преобразуется в равносильную систему

$$(27) \quad \tilde{\rho}_t + \tilde{u}\tilde{\rho}_x + \tilde{\rho}\tilde{u}_x = 0, \quad \tilde{u}_t + \tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{\rho}_x = 0,$$

т. е. в точности систему уравнений газовой динамики политропного газа с $\gamma = 2$ (и уравнением состояния $\tilde{p} = (1/2)\tilde{\rho}^2$).

Отсюда следует неожиданный и в известной мере парадоксальный вывод: уравнения газовой динамики (27) имеют определенный физический смысл при отрицательных значениях плотности газа $\tilde{\rho}$!

Для выяснения тех особенностей, которые возникают при подстановке (26), вычисляется якобиан перехода $(v, h) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{\rho})$. Он оказывается равным

$$\Delta = \partial(\tilde{u}, \tilde{\rho})/\partial(v, h) = (1 - 2h)^2 - v^2$$

и обращается в нуль на характеристиках $r_{\pm} = 1$. Вместе с тем при переходе через линию $|v| = 1$ якобиан Δ сохраняет знак.

Заключительные замечания. В связи с обнаруженными особенностями в поведении двухслойной «мелкой воды» естественно возникает вопрос о том, какие корректные краевые задачи возможны для рассмотренных здесь моделей. В этом вопросе имеются определенные трудности, вытекающие из факта частичной эллиптичности возникающих дифференциальных уравнений. Для эллиптического случая должны быть характерны задачи типа задачи Дирихле. Однако постановка задачи Дирихле на плоскости независимых переменных (x, t) , где t — время, вызывает сомнение с точки зрения ее физической осмысленности. Вместе с тем физически естественная задача Коши с начальными данными при $t = 0$ для эллиптических данных может оказаться математически некорректной. Здесь приходится высказываться осторожно, так как уравнения нелинейны и предсказать сколько-нибудь определенно результат взаимодействия неустойчивости с нелинейностью затруднительно.

Возможно, что в этом вопросе поможет изучение сильного разрыва, естественного для данных в гиперболической области. Построение обобщенных решений с сильными разрывами требует привлечения каких-либо законов сохранения вида (8). Как уже отмечалось, в модели I выбор сильно ограничен, и если следовать некоторым известным аналогиям, то было бы целесообразно положить в основу справедливые для этой модели два закона сохранения массы, а также законы сохранения полного

импульса и полной энергии. При этом уравнения сильного разрыва получаются весьма сложными и трудными для анализа. Напротив, в моделях II и III имеется неограниченный запас линейно-независимых законов сохранения и результат будет в значительной мере зависеть от их удачного выбора. При этом во всех случаях в качестве критерия успеха можно выдвинуть однозначную разрешимость задачи о распаде произвольного разрыва при любых допустимых исходных состояниях. Это требование не тривиально, в чем можно убедиться на примере уравнений газовой динамики (27), если допустимыми считать также и отрицательные значения плотности.

Изложенные одномерные модели и полученные для них предварительные качественные выводы допускают естественное обобщение в нескольких направлениях. К ним относятся, например, модели волновых движений многослойной «мелкой воды», двумерных («плановых») движений, течений над неровным дном и т. п. Однако значимость соответствующих аналитических исследований в большой мере будет определяться прогрессом в изучении одномерных задач.

Поступила 28 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М., ИЛ, 1959.
2. Friedrichs К. О. On the derivation of the shallow water theory. Appendix to «The formation of breakers and bores» by J. J. Stoker. — «Comm. Pure. Appl. Math.», 1948, vol. 1, p. 81—85.
3. Овсянников Л. В. К обоснованию теории мелкой воды. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 15. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1973.
4. Овсянников Л. В. Обоснование теории мелкой воды. — В кн.: Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию со дня рождения академика И. Г. Петровского. М., изд. Моск. ун-та, 1978.
5. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., ГИТТЛ, 1947.
6. Внутренние волны. Сборник статей под редакцией А. А. Иванова. М., «Мир», 1964.
7. Кочин Н. Е. Точное определение установившихся волн конечной амплитуды на поверхности раздела двух жидкостей конечной глубины. Собр. соч. Т. 2. М.—Л., 1949, с. 43—79.

УДК 532.51

О МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ОДНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

В. М. Меньщиков

(Новосибирск)

Исследование устойчивости нестационарных движений сопряжено с изучением асимптотического представления решений уравнений малых возмущений, удовлетворяющих заданным начальным и граничным условиям. В большинстве случаев определение асимптотики роста малых возмущений становится практически невозможным из-за сложности уравнений, описывающих эволюцию малых возмущений. Решение обсуждаемой задачи значительно упрощается, если урав-