ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В.В.** Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958.
2. **Белл Дж. Ф.** Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 1. — М.: Наука, 1984.
3. **Рэнсон У., Саттон М., Питерз У.** Голографическая и лазерная спекл-интерферометрия // Экспериментальная механика. Кн. 1. — М.: Мир, 1990. — С. 448—491.
4. **Лурье А.И.** Теория упругости. — М.: Наука, 1970.

г. Новосибирск *Поступила 16/VII 1993 г.*

УДК 539.37

А.Г. Акопян

МАЛОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНО-СОСТАВНЫХ КЛИНЬЕВ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Исследуется влияние неоднородности материала на малонапряженное состояние на крае контактной поверхности составного клиновидного тела со степенным законом упрочнения в условиях продольного сдвига и плоской деформации. Принимается, что одна грань клина свободна, а другая жестко защемлена. Решение аналогичных задач для однородных составных клиньев изложено в [1]. Явление малонапряженности линейно-упругих кусочно-однородных тел исследовано в [2, 3]. Задачи малонапряженности неоднородно-составного клина со свободными гранями при продольном сдвиге и плоской деформации рассмотрены в [4].

В настоящей работе получены условия ограниченности напряжений у вершины неоднородного составного клина. Показана зависимость зон малонапряженности от неоднородных механических свойств материалов составного клина.

1. Продольный сдвиг. Пусть два длинных цилиндрических тела из неоднородных материалов со степенным упрочнением спаяны друг с другом по некоторой части боковых поверхностей полным прилипанием. Угловая точка на крае контактной поверхности находится в условиях продольного сдвига. Одна грань в угловой части тела жестко защемлена. В угловой точке контактной поверхности поместим начало цилиндрической системы координат, ось $\theta = 0$ проведем по контактной поверхности, ось z — по продольному направлению (рис. 1).

В каждой области поперечного сечения имеем уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\tau_{rz} = 0; \tag{1.1}$$

соотношения между компонентами напряжений, деформаций и перемещений

$$\tau_{rz} = 2\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\gamma_{rz}, \quad \tau_{\theta z} = 2\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\gamma_{\theta z}, \quad 2\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r}, \; 2\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}. \tag{1.2}$$

Здесь σ_0 и ε_0 — интенсивности напряжений и деформаций:

$$\sigma_0 = \sqrt{\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2}, \quad \varepsilon_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2}.$$

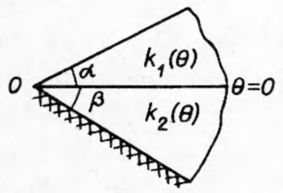


Рис. 1

Между этими интенсивностями принимаем зависимость

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0^m,\ k = k(\theta),\ 0 \leqslant m \leqslant 1, \tag{1.3}$$

где функция $k(\theta)$ характеризует неоднородные деформативные свойства материалов и определяется из соответствующих экспериментов. Степени упрочнения m у обоих материалов принимаем одинаковыми, а функции $k(\theta)$ — различными.

Исключая компоненты напряжений из (1.1)—(1.3), приходим к дифференциальному уравнению относительно w:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\varepsilon_0^{m-1}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{k}{r}\varepsilon_0^{m-1}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{1.4}$$

Принимаем следующие граничные условия:

$$\tau_{\theta z} = 0 \text{ при } \theta = \alpha,\ w = 0 \text{ при } \theta = -\beta. \tag{1.5}$$

Полагая, что перемещение не меняет знак, решение строим в двух областях: $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$ и $-\beta \leqslant \theta \leqslant 0$, величины в которых обозначим индексами $i = 1, 2$ соответственно.

Компоненты напряжений и перемещений в каждой области представим в виде

$$\tau_{rzi} = k_i\lambda r^{(\lambda-1)m}\chi_i f_i,\ \tau_{\theta zi} = k_i r^{(\lambda-1)m}\chi_i f_i', \tag{1.6}$$
$$w_i = r^\lambda f_i,\ \chi_i = (\sqrt{f_i'^2 + \lambda^2 f_i^2})^{m-1}.$$

Здесь $f_i = f_i(\theta, \lambda)$ и λ — искомые функции и постоянная.

Подставляя выражения перемещений из (1.6) в (1.4), приходим к дифференциальному уравнению

$$(k_i f_i'\chi_i)' + \eta k_i f_i \chi_i = 0,\ \eta = \lambda[1 + (\lambda - 1)m]. \tag{1.7}$$

Согласно условиям (1.5) и представлению (1.6), имеем граничные условия

$$f_1'(\alpha) = f_2(-\beta) = 0, \tag{1.8}$$

а также условия сопряжения на контактной поверхности

$$f_1 = f_2,\ f_1'\chi_1 = \gamma f_2'\chi_2 \text{ при } \theta = 0\ \ (\gamma = k_2(0)/k_1(0)). \tag{1.9}$$

Вводя новую функцию $\psi_i(\theta, \lambda)$ в виде

$$f_i' = f_i\psi_i, \tag{1.10}$$

из (1.7)—(1.9) приходим к дифференциальному уравнению

$$\psi_i' = -\frac{(\psi_i^2 + \lambda^2)(\psi_i^2 + 2nh_i\psi_i + s^2)}{\psi_i^2 + \lambda^2 n} \tag{1.11}$$

$$(2h_i = k_i'/k_i,\ n = 1/m,\ s^2 = \lambda(\lambda + n - 1))$$

при граничных условиях

$$\psi_1(\alpha) = 0,\ \psi_2(-\beta) = \infty \tag{1.12}$$

и условии на контактной поверхности

$$\mu_1(\sqrt{\mu_1^2 + \lambda^2})^{m-1} = \gamma\,\mu_2(\sqrt{\mu_2^2 + \lambda^2})^{m-1} \tag{1.13}$$

$$(\mu_i = \psi_i(0, \lambda)).$$

В случае экспоненциального закона неоднородности, т.е. когда

$$k_i = k_i^* e^{2h_i^* \theta} \tag{1.14}$$

(k_i^* и h_i^* — постоянные материалов), имеем $h_i = \text{const}$.

Тогда общее решение уравнений (1.11) при $\Delta_i = s^2 - n^2h_i^2 > 0$ представим в виде

$$\frac{E_i}{\sqrt{\Delta_i}} \operatorname{arctg} \frac{\psi_i + nh_i}{\sqrt{\Delta_i}} + G_i \operatorname{arctg} \frac{\psi_i}{\lambda} + \tag{1.15}$$

$$+ Q_i \ln \left(\sqrt{\frac{\psi_i^2 + 2nh_i\psi_i + s^2}{\psi_i^2 + \lambda^2}} \frac{\lambda}{s} \right) = H_i - \theta,$$

где H_i — произвольные постоянные. Здесь введены обозначения:

$$B_iG_i = (n-1)^2, \quad B_iE_i = 2(n+1)n^2h_i^2 + (1-\lambda)(n-1)^2, \tag{1.16}$$

$$B_iQ_i = 2(n-1)nh_i, \quad B_i = (n-1)^2 + 4n^2h_i^2.$$

Используя граничные условия (1.12), из (1.15) для различных интервалов θ находим

$$H_1 = \alpha + \frac{E_1}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{arctg} \frac{nh_1}{\sqrt{\Delta_1}},$$

$$H_2 = -\beta + \left(\frac{E_2}{\sqrt{\Delta_2}} + G_2 \right) \frac{\pi}{2} + Q_2 \ln \frac{\lambda}{s}.$$

Принимая в (1.15) $\theta = 0$, имеем

$$\alpha = \frac{E_1}{\sqrt{\Delta_1}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\mu_1 + nh_1}{\sqrt{\Delta_1}} - \operatorname{arctg} \frac{nh_1}{\sqrt{\Delta_1}} \right) + G_1 \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\lambda} + \tag{1.17}$$

$$+ Q_1 \ln \left(\sqrt{\frac{\mu_1^2 + 2nh_1\mu_1 + s^2}{\mu_1^2 + \lambda^2}} \frac{\lambda}{s} \right),$$

$$\beta = \frac{E_2}{\sqrt{\Delta_2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_2 + nh_2}{\sqrt{\Delta_2}} \right) + G_2 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_2}{\lambda} \right) -$$

$$- \frac{Q_2}{2} \ln \frac{\mu_2^2 + 2nh_2\mu_2 + s^2}{\mu_2^2 + \lambda^2}.$$

Полученные зависимости (1.13) и (1.17) составляют систему из трех трансцендентных уравнений относительно μ_1, μ_2 и λ, определяющую в конечном счете $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, n, h_i)$.

Условие $\lambda = 1$ в пространстве параметров $\alpha, \beta, \gamma, n, h_i$ определяет некоторую поверхность конечных напряжений, отделяющую зону малонапряженности от зоны сильной концентрации напряжений. Полагая $\lambda = 1$, из (1.13) и (1.17) получим

$$\mu_1(\sqrt{\mu_1^2 + 1})^{m-1} = \gamma \mu_2 (\sqrt{\mu_2^2 + 1})^{m-1}, \quad h_i^2 < m, \tag{1.18}$$

$$\alpha = \frac{E_1}{\sqrt{\Delta_1}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\mu_1 + nh_1}{\sqrt{\Delta_1}} - \operatorname{arctg} \frac{nh_1}{\sqrt{\Delta_1}} \right) + G_1 \operatorname{arctg} \mu_1 + \frac{Q_1}{2} \ln \frac{\mu_1^2 + 2nh_1\mu_1 + n}{n(\mu_1^2 + 1)},$$

$$\beta = \frac{E_2}{\sqrt{\Delta_2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_2 + nh_2}{\sqrt{\Delta_2}} \right) + G_2 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \mu_2 \right) - \frac{Q_2}{2} \ln \frac{\mu_2^2 + 2nh_2\mu_2 + n}{\mu_2^2 + 1}.$$

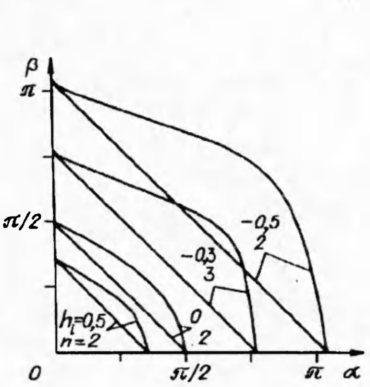


Рис. 2

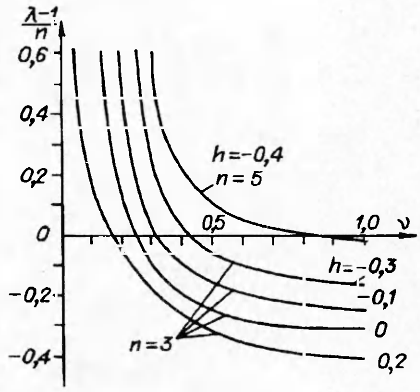


Рис. 3

Здесь $B_iE_i = 2(n + 1)n^2h_i^2$; $\Delta_i = n - n^2h_i^2$; значения G_i, B_i, Q_i остаются, как в (1.16).

Результаты численного исследования системы трансцендентных уравнений (1.18) в плоскости $\alpha\beta$ приведены на рис. 2, где показано изменение зоны малонапряженности (ниже кривых) в зависимости от неоднородности механических свойств материалов как для составного ($\gamma \neq 1$), так и для сплошного ($\gamma = 1$, $h_1 = h_2$) неоднородного клина. На рисунке прямые линии соответствуют $\gamma = 1$, а кривые $\gamma = 2$.

1. *Случай одного неоднородного клина.* Когда клин изготовлен из одного неоднородного материала, т.е. при $\gamma = 1$, $h_1 = h_2 = h$, полагая $\mu_1 = \mu_2$, уравнение (1.13) удовлетворим тождественно, а из (1.17) находим

$$\alpha + \beta = \left(\frac{E}{\sqrt{\Delta}} + G\right)\frac{\pi}{2} - \frac{E}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{nh}{\sqrt{\Delta}} + Q\ln\frac{\lambda}{s}. \tag{1.19}$$

Вводя обозначения $\alpha + \beta = 2\alpha_*$, $\nu = \alpha_*/\pi$, из (1.19) приходим к трансцендентному уравнению относительно λ:

$$\nu + \frac{E}{2\pi\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{nh}{\sqrt{\Delta}} - \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{\lambda}{s} - \frac{1}{4}\left(\frac{E}{\sqrt{\Delta}} + G\right) = 0. \tag{1.20}$$

Численным решением уравнения (1.20) найдены значения λ в зависимости от параметров ν, n, h. На рис. 3 приведено семейство кривых $(\lambda - 1)/n$ для различных значений степеней упрочнения n и неоднородности h в зависимости от ν. Отсюда следует, что для одних и тех же значений степени упрочнения и раствора угла клина в зависимости от неоднородности механических свойств материала рассматриваемый край может находиться в состоянии малонапряженности ($\lambda > 1$) или сильной концентрации напряжений ($\lambda < 1$).

В этой задаче, если для сплошного однородного клина с углом раствора больше $\pi/2$ всегда имеется концентрация напряжений в вершине, а с углом раствора меньше $\pi/2$ отсутствует, то для сплошного неоднородного клина, как показывают графики рис. 2 и 3, эта закономерность нарушается.

2. *Линейно-упругий неоднородно-составной клин.* Когда составной клин изготовлен из линейно-упругих неоднородных материалов, принимая в системе уравнений (1.13), (1.17) $m = 1$, получим уравнение относительно λ:

$$\frac{h_1 + \sqrt{\lambda^2 - h_1^2}\,\operatorname{tg}(\alpha\sqrt{\lambda^2 - h_1^2})}{\sqrt{\lambda^2 - h_1^2} - h_1\operatorname{tg}(\alpha\sqrt{\lambda^2 - h_1^2})}\sqrt{\lambda^2 - h_1^2} - \tag{1.21}$$

$$- \gamma\sqrt{\lambda^2 - h_2^2}\,\operatorname{ctg}(\beta\sqrt{\lambda^2 - h_2^2}) - h_1 + \gamma h_2 = 0.$$

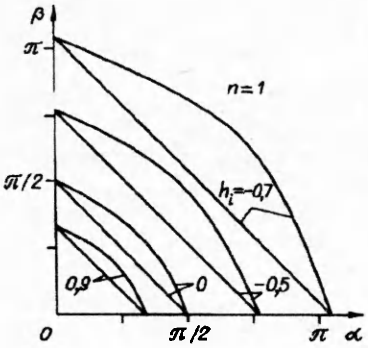


Рис. 4

Далее, полагая $\lambda = 1$, определяем уравнение предельных кривых малонапряженности

$$\frac{h_1 + \sqrt{1-h_1^2}\,\mathrm{tg}\,(\alpha\sqrt{1-h_1^2})}{\sqrt{1-h_1^2} - h_1\,\mathrm{tg}\,(\alpha\sqrt{1-h_1^2})}\sqrt{1-h_1^2} - \tag{1.22}$$

$$- \gamma\sqrt{1-h_2^2}\,\mathrm{ctg}\,(\beta\sqrt{1-h_2^2}) - h_1 + \gamma h_2 = 0.$$

Здесь соблюдается условие $|h_i| < 1$. Граничные кривые, определяемые уравнением (1.22), для различных значений h_i изображены на рис. 4, где прямые линии соответствуют значениям $\gamma = 1$, а кривые $\gamma = 2$. Графики показывают, что по сравнению с однородным клином зоны малонапряженности для неоднородного клина могут увеличиваться или уменьшаться в зависимости от степени неоднородности.

Для однородных клиньев при $h_i = 0$ по результатам настоящего пункта получаются соответствующие формулы работ [1, 3].

2. Плоская деформация. Рассмотрим теперь задачу малонапряженности, когда составной клин, изготовленный из неоднородных несжимаемых материалов со степенным упрочнением, находится в состоянии плоской деформации. Здесь используем схему рис. 1. Принимаем, что край $\theta = \alpha$ свободен от нагрузки, а край $\theta = -\beta$ жестко защемлен.

В каждой клиновидной области имеем дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} = 0, \tag{2.1}$$

соотношения между компонентами деформаций и перемещений

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}, \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta},$$

зависимости между компонентами напряжений и деформаций

$$\sigma_r - \sigma = 2\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(\varepsilon_r - \varepsilon), \quad \sigma_\theta - \sigma = 2\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(\varepsilon_\theta - \varepsilon),$$

$$\tau_{r\theta} = 2\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\gamma_{r\theta}, \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta).$$

Здесь

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau_{r\theta}^2}, \quad \varepsilon_0 = \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + 4\gamma_{r\theta}^2}$$

— интенсивности напряжений и деформаций, между которыми принимается зависимость (1.3) с одинаковыми степенями упрочнения m у обоих материалов и различными функциями неоднородности $k(\theta)$.

В каждой области допускается условие несжимаемости материала ($\varepsilon = 0$), т.е.

(2.2) $$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0.$$

Величины в областях $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$, $-\beta \leqslant \theta \leqslant 0$ обозначим соответственно индексами $i = 1, 2$.

1. *Случай* $\lambda \neq 1$. Поле перемещений в каждой области, удовлетворяющее условию несжимаемости (2.2), представим в форме

$$u_i = r^\lambda f_i', \quad v_i = -(\lambda + 1) r^\lambda f_i, \quad w_i = 0,$$

где $f_i = f_i(\theta, \lambda)$ и λ — искомые собственные функции и собственное значение задачи. Компоненты напряжений имеют вид

(2.3) $$\sigma_{ri} = \sigma_{\theta i} + 4\lambda k_i r^{(\lambda-1)m} f_i' \chi_i, \quad \tau_{r\theta i} = k_i r^{(\lambda-1)m} [f_i'' + (1 - \lambda^2) f_i] \chi_i.$$

Здесь

$$\chi_i = \{\sqrt{[f_i'' + (1 - \lambda^2) f_i]^2 + 4\lambda^2 f_i'^2}\}^{m-1}.$$

Подставляя (2.3) в уравнения равновесия (2.1), приходим к выражениям

$$\sigma_{\theta i} = -\frac{r^{(\lambda-1)m}}{(\lambda - 1)m}\{(k_i [f_i'' + (1 - \lambda^2) f_i] \chi_i)' + 4\eta k_i f_i' \chi_i\}, \quad \lambda \neq 1$$

и к системе дифференциальных уравнений

(2.4) $$\{k_i [f_i'' + (1 - \lambda^2) f_i] \chi_i\}'' + k_i \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2}\right) [f_i'' + (1 - \lambda^2) f_i] \chi_i +$$
$$+ 4\eta (k_i f_i' \chi_i)' = 0, \quad \eta = \lambda [1 + (\lambda - 1) m].$$

Граничные условия на внешних поверхностях клина

(2.5) $$f_2' = f_2 = 0 \text{ при } \theta = -\beta,$$
$$\{k_1 [f_1'' + (1 - \lambda^2) f_1] \chi_1\}' + 4\eta k_1 f_1' \chi_1 = 0,$$
$$f_1'' + (1 - \lambda^2) f_1 = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha;$$

на контактной поверхности

(2.6) $$[f_1'' + (1 - \lambda^2) f_1] \chi_1 = \gamma [f_2'' + (1 - \lambda^2) f_2] \chi_2, \quad \gamma = k_2(0)/k_1(0),$$
$$\{k_1 [f_1'' + (1 - \lambda^2) f_1] \chi_1\}' + 4\eta k_1 f_1' \chi_1 =$$
$$= \{k_2 [f_2'' + (1 - \lambda^2) f_2] \chi_2\}' + 4\eta k_2 f_2' \chi_2,$$
$$f_1 = f_2, \quad f_1' = f_2' \quad \text{при} \quad \theta = 0.$$

Система дифференциальных уравнений (2.4) с граничными условиями (2.5), (2.6) — трехточечная задача на собственные значения для определения $f_i(\theta, \lambda)$ и λ.

Полуобратным способом, придавая различные значения $\lambda = \lambda_* < 1$, из (2.4)—(2.6) численным способом определяем соотношения между параметрами α, β, γ, m и параметрами неоднородности материалов для данной степени концентрации напряжений. При условии $\lambda = \lambda_* > 1$ в пространстве этих параметров определится область малонапряженности.

При подстановке (1.10) снижается порядок уравнения (2.4) с граничными условиями (2.5), (2.6).

2. *Случай* $\lambda = 1$. В специальном исследовании нуждается случай конечных напряжений. Поле перемещений, удовлетворяющее условию несжимаемости (2.2), представим в форме

$$u_i = r f_i', \quad v_i = -2 r f_i + C_i r \ln r, \quad w_i = 0.$$

Здесь $f_i = f_i(\theta)$ и C_i — произвольные функции и постоянные. Представляя компоненты напряжений в форме

$$\sigma_{ri} = \sigma_{\theta i} + 4k_i\psi_i\chi_i, \quad \tau_{r\theta i} = k_i(\psi_i' + C_i)\chi_i$$
$$(\chi_i = [\sqrt{4\psi_i^2 + (\psi_i' + C_i)^2}\,]^{m-1}, \quad \psi_i = f_i')$$

и подставляя в уравнения равновесия (2.1), приходим к выражению

$$\sigma_{\theta i} = E_i - D_i\ln r - 2\int_0^\theta k_i(\psi_i' + C_i)\chi_i d\theta$$

(E_i, D_i — произвольные постоянные) и к дифференциальному уравнению

$$(2.7) \qquad [k_i(\psi_i' + C_i)\chi_i]' + 4k_i\psi_i\chi_i = D_i.$$

Используя граничные условия $\sigma_{\theta 1} = 0$ при $\theta = \alpha$, а также $v_2 = 0$ при $\theta = -\beta$ и условия непрерывности $\sigma_{\theta i}$ и v_i на контактной поверхности, находим

$$(2.8) \qquad C_i = D_i = 0,\ E_i = 2\int_0^\alpha k_1\psi_1'\chi_1 d\theta,\ f_1(0) = f_2(0),\ f_2(-\beta) = 0,$$

$$\sigma_{\theta 1} = 2\int_\theta^\alpha k_1\psi_1'\chi_1 d\theta, \quad \sigma_{\theta 2} = 2\left(\int_0^\alpha k_1\psi_1'\chi_1 d\theta + \int_\theta^0 k_2\psi_2'\chi_2 d\theta\right).$$

Остальные граничные условия дают

$$(2.9) \qquad \psi_1'(\alpha) = \psi_2(-\beta) = 0, \quad \psi_1 = \psi_2, \quad \psi_1'\chi_1 = \gamma\psi_2'\chi_2 \quad \text{при } \theta = 0.$$

После некоторых преобразований из (2.7) следует

$$(2.10) \qquad (\psi_i'' + 4\psi_i)\frac{m\psi_i'^2 + 4\psi_i^2}{\psi_i'^2 + 4\psi_i^2} + \frac{k_i'}{k_i}\psi_i' = 0,$$

откуда, вводя новую функцию $\varphi_i = \psi_i'/\psi_i$, получим систему уравнений первого порядка

$$(2.11) \qquad \varphi_i' = -\frac{k_i'}{k_i}\frac{\varphi_i^2 + 4}{m\varphi_i^2 + 4}\varphi_i - \varphi_i^2 - 4$$

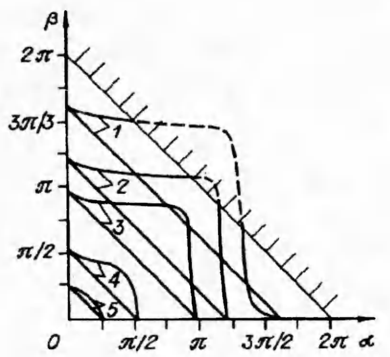
с граничными условиями

$$(2.12) \qquad \varphi_1(\alpha) = 0, \quad \varphi_2(-\beta) = \infty,$$
$$\varphi_1(\sqrt{4 + \varphi_1^2})^{m-1} = \gamma\varphi_2(\sqrt{4 + \varphi_2^2})^{m-1} \quad \text{при } \theta = 0.$$

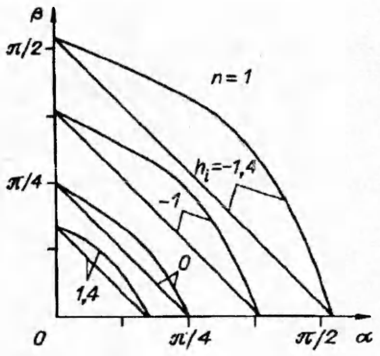
Таким образом, система (2.11) с граничными условиями (2.12) определяет гиперповерхность конечных напряжений с учетом неоднородности материалов и физической нелинейности.

Для экспоненциального закона неоднородности (1.14) построено численное решение краевой задачи (2.9), (2.10), которое устанавливает зависимость $\beta = \beta(\alpha, n, \gamma, h_i)$, где $n = 1/m$, $h_i = k_i'/k_i = \text{const}$, $\gamma = k_2(0)/k_1(0)$. С точки зрения численного решения уравнения (2.11), (2.12) оказались неудобными. Результаты численного решения приведены на рис. 5, откуда следует, что с изменением степени неоднородности h зоны малонапряженности значительно изменяются. На графиках прямые линии соответствуют $\gamma = 1$, а кривые $\gamma = 2$. Линии *1*—*5* отвечают следующим параметрам: $h_i = -1{,}36$, $n = 2$; $h_i = -0{,}85$, $n = 5$; $h_i = -1$, $n = 3$; $h_i = -1$, $n = 2$; $h_i = 0$, $n = 2$. Штриховые части линий соответствуют тем случаям неоднородности, когда на вершине полубесконечной щели ($\alpha + \beta = 2\pi$) может отсутствовать концентрация напряжений.

3. *Линейно-упругий неоднородно-составной клин.* Если составной клин изготовлен из линейно-упругих неоднородных материалов, то, принимая в



Р и с. 5



Р и с. 6

уравнениях (2.11), (2.12) $m = 1$ и экспоненциальный закон неоднородности (1.14) при $|h_i| < 2$, приходим к трансцендентному уравнению

$$\frac{4\operatorname{tg}(\alpha\sqrt{4-h_1^2})}{\sqrt{4-h_1^2} - h_1 \operatorname{tg}(\alpha\sqrt{4-h_1^2})} - \tag{2.13}$$

$$- \gamma\sqrt{4-h_2^2}\operatorname{ctg}(\beta\sqrt{4-h_2^2}) + \gamma h_2 = 0.$$

Для однородного составного линейно-упругого клина, принимая $h_i = 0$, из (2.13) получаем соответствующее уравнение работы [3], если в нем положить коэффициенты Пуассона материалов равными 1/2.

На рис. 6 показаны следы поверхности, определяющиеся уравнением (2.13), в плоскости $\alpha\beta$ (прямые линии отвечают $\gamma = 1$, а кривые $\gamma = 2$).

В рассмотренной задаче, если для сплошного однородного клина с углом раствора больше $\pi/4$ всегда имеется концентрация напряжений в вершине, а с углом раствора меньше $\pi/4$ отсутствует, то для сплошного неоднородного клина, как показывают графики рис. 5 и 6, эта закономерность нарушается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Задоян М.А.** Пространственные задачи теории пластичности. — М.: Наука, 1992.
2. **Чобанян К.С.** Напряжения в составных упругих телах. — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987.
3. **Аксентян О.К., Лущик О.Н.** Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина // Изв. АН СССР. МТТ. — 1978. — № 5. — С. 102—108.
4. **Акопян А.Г., Задоян М.А.** Малонапряженность неоднородно-составных клиньев // Изв. РАН. МТТ. — 1992. — № 5. — С. 88—96.

г. Ереван *Поступила 23/VI 1993 г.*

УДК 621.929

А.Ф. Ревуженко

О САМОМ ЭФФЕКТИВНОМ ПРОЦЕССЕ СМЕШЕНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

1. Введение. Эволюция всех систем, которые наблюдаются в природе, имеет две тенденции: 1) увеличение в системе хаоса, беспорядка; 2) возникновение порядка, самоорганизация. В самом обычном проявлении увеличение хаоса приводит к тому, что система «забывает» свою историю и в