

УДК 539.4

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

А. А. Мовчан, И. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко

Институт прикладной механики РАН, 119991 Москва

E-mail: movchan47@mail.ru

С использованием различных гипотез получены аналитические решения задач о потере устойчивости кольцевой круглой пластины из сплава с памятью формы при прямом или обратном термоупругом фазовом превращении в условиях однородного радиального сжатия. Установлено, что, несмотря на наличие осевой симметрии геометрии тела, нагрузки и граничных условий, для кольцевой пластины, в отличие от сплошной, минимальные критические значения нагрузок соответствуют неосесимметричным формам потери устойчивости.

Ключевые слова: память формы, устойчивость, кольцевая пластина, прямое превращение, обратное превращение.

Сплавы с памятью формы (СПФ) обладают уникальными механическими свойствами, что обусловлено происходящими в них термоупругими мартенситными фазовыми превращениями [1]. При охлаждении нагруженного образца в определенном температурном интервале происходит прямое превращение аустенитной фазы в мартенситную, сопровождающееся накоплением фазовых деформаций. При последующем нагреве, вообще говоря, в другом температурном интервале в СПФ происходит обратное превращение мартенситной фазы в аустенитную, сопровождающееся снятием ранее накопленных деформаций (явление памяти формы) [2]. В изотермических условиях прямое превращение может быть вызвано ростом напряжений, а обратное — разгрузкой. В [3, 4] предложена система определяющих соотношений, адекватно описывающая указанные выше и ряд других явлений, характерных для СПФ.

Термоупругие мартенситные фазовые превращения могут приводить к потере устойчивости тонкостенных элементов из СПФ [5]. В процессе потери устойчивости при переходе в смежную равновесную форму напряжения меняются, что может вызвать дополнительный фазовый переход. В [6, 7] предложены гипотезы фиксированного фазового состава, повсеместного дополнительного фазового перехода и фиксированной нагрузки, позволяющие описать потерю устойчивости элементов из СПФ. Согласно первой из этих гипотез при переходе в смежную равновесную форму дополнительного фазового перехода не происходит, в соответствии со второй гипотезой дополнительное фазовое превращение имеет место во всем сечении рассматриваемого элемента, третья гипотеза постулирует отсутствие возмущений нагрузки при переходе в смежную равновесную форму. При решении задачи с использованием гипотезы фиксированной нагрузки предполагается дополнительное фазовое превращение при переходе в смежную равновесную форму, причем область материала, в которой происходит это фазовое превращение, заранее неизвестна, что су-

шественно усложняет решение. При решении задачи в рамках гипотезы фиксированного фазового состава или повсеместного дополнительного фазового перехода предполагается наличие малых вариаций внешних нагрузок, которые могут быть найдены после ее решения.

В работе [7] с использованием различных подходов решена задача об устойчивости стойки Шенли на стержнях из СПФ. В [6] исследована потеря устойчивости стержня из СПФ при прямых и обратных термоупругих мартенситных превращениях, в [8, 9] решены аналогичные задачи для прямоугольных, а в [10–13] для сплошных круглых пластин из СПФ, причем в последнем случае форма потери устойчивости предполагалась осесимметричной.

В данной работе рассмотрено круговое кольцо из СПФ, нагруженное по внешнему и внутреннему контурам одинаковыми радиальными сжимающими усилиями. Для случая, когда обе кромки кольца заземлены, получены аналитические решения задачи с использованием трех перечисленных выше гипотез без предположения об осевой симметрии формы выпучивания.

1. Постановка задачи. Считается, что кольцевая пластина из СПФ нагружена по внешнему и внутреннему контурам одинаковыми и постоянными во времени, но противоположно направленными радиальными усилиями p . В каждый момент времени температура во всех точках пластины считается одинаковой. При анализе потери устойчивости в случае прямого превращения указанные нагрузки предполагаются сжимающими и приложенными к пластине в аустенитном состоянии. Рассматривается процесс охлаждения материала и его перехода в мартенситное состояние. В задаче о потере устойчивости, вызванной обратным превращением, считается, что предварительно материал кольца был переведен из аустенитного состояния в мартенситное под действием нагрузок $p^{[1]}$, которые могут являться как растягивающими, так и сжимающими, но не вызывают потери устойчивости при прямом превращении. В мартенситном состоянии кольцо нагружается, вообще говоря, другими, сжимающими нагрузками $p^{[2]}$. Рассматривается процесс нагрева и перехода материала в аустенитное состояние. В обоих случаях вычисляются минимальные значения нагрузок, при которых возможна неединственность формы квазистатического равновесия. Согласно [6] для СПФ учет малых вариаций температуры T не приводит к изменению критических значений нагрузок, поэтому ниже считается $\delta T = 0$.

Пластина отнесена к цилиндрической системе координат (r, φ, x_3) , где ось x_3 является осью вращения, а плоскость (r, φ) — срединной плоскостью пластины. Считается, что в докритическом состоянии фазовый состав во всех точках пластины одинаков. Используется гипотеза прямых нормалей, в соответствии с которой справедливы зависимости

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} = \varepsilon_{ij}^0 - x_3 \varkappa_{ij}. \quad (1.1)$$

Здесь ε_{ij} , $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$, ε_{ij}^0 — полные, упругие и фазовые деформации, а также полная деформация в срединной плоскости; \varkappa_{ij} — кривизны; $i, j = 1, 2$ (1 соответствует радиальной компоненте, 2 — кольцевой). Температурные деформации малы и поэтому не учитываются.

2. Система определяющих соотношений. В настоящей работе используются следующие определяющие соотношения для СПФ [3, 4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mm}^{(1)} &= \frac{\sigma_{mm} - \mu(q)\sigma_{nn}}{E(q)}, & \varepsilon_{12}^{(1)} &= \frac{\sigma_{12}}{2G(q)}, & \frac{1}{E(q)} &= \frac{q}{E_1} + \frac{1-q}{E_2}, \\ \frac{1}{G(q)} &= \frac{q}{G_1} + \frac{1-q}{G_2}, & \mu(q) &= \frac{E(q)}{2G(q)} - 1, & & (2.1) \\ s_{ij} &= \sigma'_{ij} + a_0 \sigma_0 \varepsilon_{ij}^{(2)}, & s_i &= \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}, & \psi(q) &= \pi \sqrt{q(1-q)}, & 0 \leq q \leq 1; \end{aligned}$$

$$dq = \frac{\psi(q)}{M_s - M_f} \left(\frac{3}{2} k \frac{s_{ij} d\sigma'_{ij}}{s_i} - dT \right), \quad d\varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{s_{ij}}{\sigma_0} dq, \quad (2.2)$$

$$dq > 0, \quad T \leq M_s^\sigma = M_s + k s_i;$$

$$dq = \frac{\psi(q)}{A_f - A_s} \left(\frac{\varepsilon_{ij}^{(2)*} d\sigma'_{ij}}{\Delta S_0 q^*} - dT \right), \quad d\varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{\varepsilon_{ij}^{(2)*}}{q^*} dq, \quad (2.3)$$

$$dq < 0, \quad T \geq A_s^\sigma = A_s + \frac{\varepsilon_{ij}^{(2)*} \sigma_{ij}}{\Delta S_0 q^*}.$$

Здесь и далее в случае использования двойного нижнего индекса типа mm или nn суммирование по m или n не проводится ($m \neq n$; $m, n = 1, 2$); q — объемная доля мартенситной фазы; уравнения (2.2) соответствуют прямому, а (2.3) — обратному превращению; в соотношениях для обратного превращения $\varepsilon_{ij}^{(2)*}$, q^* — накопленные при предшествующем прямом превращении значения фазовых деформаций и объемной доли мартенситной фазы; σ_{ij} , σ'_{ij} — компоненты тензора и деватора напряжений; $E(q)$, E_1 , E_2 — модуль Юнга двухфазной среды и его значения для мартенситного и аустенитного состояний соответственно; $G(q)$, G_1 , G_2 — соответствующие значения модуля сдвига; $\mu(q)$ — коэффициент Пуассона двухфазной среды; M_s , M_f и A_s , A_f — температуры начала и окончания прямого и обратного мартенситных превращений в свободном от напряжений материале соответственно; ΔS_0 — разность удельных энтропий (на единицу объема) аустенитного и мартенситного состояний при отсчетном значении температуры; k , σ_0 , a_0 — физико-механические постоянные материала.

3. Докритическое состояние. В рассматриваемом случае докритические напряжения одинаковы в любой точке пластины:

$$\sigma_{11}^{[\alpha]} = \sigma_{22}^{[\alpha]} = -p^{[\alpha]}, \quad \sigma_{12}^{[\alpha]} = 0 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (3.1)$$

Сдвиговые деформации равны нулю, упругие компоненты нормальных деформаций определяются по формулам $\varepsilon_{ii}^{(1)} = \sigma_{ii}(1 - \mu(q))/E(q)$ как для прямого, так и для обратного превращения. В случае прямого превращения фазовые деформации вычисляются в соответствии с зависимостями $\varepsilon_{ii}^{(2)} = -p^{[1]}(\exp(a_0 q) - 1)/(3\sigma_0 a_0)$, а в случае обратного — по формулам

$$\varepsilon_{ii}^{(2)} = \varepsilon_{ii}^{(2)*} \frac{q}{q^*}, \quad \varepsilon_{ii}^{(2)*} = -\frac{p^{[1]}}{3\sigma_0 a_0} (\exp(a_0 q^*) - 1). \quad (3.2)$$

Выражения для фазовых докритических деформаций находятся интегрированием формул (2.2), (2.3) с учетом того, что при рассматриваемых фазовых переходах докритические значения напряжений в пластинах из СПФ не меняются.

4. Анализ отклоненного положения пластины. Сначала выполним анализ выпучивания при обратном фазовом превращении. Варьируя (1.1) с учетом (2.1)–(2.3), (3.1) и находя из полученных соотношений вариации напряжений, имеем

$$\delta\sigma_{ii}^{[2]} = \frac{(\delta\varepsilon_{ii}^0 - x_3 \varkappa_{ii})(1 + \xi^+ U_+) + (\delta\varepsilon_{jj}^0 - x_3 \varkappa_{jj})(\mu(q) - \xi^+ U_+)}{1 + \xi U_+} \frac{E(q)}{1 - \mu^2(q)}, \quad (4.1)$$

$$\delta\sigma_{12}^{[2]} = 2G(q)(\delta\varepsilon_{12}^0 - x_3 \varkappa_{12}),$$

где

$$\xi^+ = \xi^+(p^{[2]}, q) = \frac{1}{3\sigma_0} E(q)g(p^{[2]})\psi(q)k^*\eta p^{[1]}, \quad k^* = \frac{1}{\Delta S_0(A_f - A_s)},$$

$$\xi = \xi(p^{[2]}, q) = \frac{2\xi^+(p^{[2]}, q)}{1 - \mu(q)}, \quad g = g(p^{[2]}) = -p^{[2]}\left(\frac{1 - \mu_1}{E_1} - \frac{1 - \mu_2}{E_2}\right) - \frac{1}{3\sigma_0}p^{[1]},$$

$U_+ = 1$ в тех областях, где при выпучивании происходит дополнительный фазовый переход, и $U_+ = 0$ вне этих областей. Для сокращения записи в (4.1) и последующих уравнениях для возмущенного состояния опускается знак вариации у всех величин, кроме напряжений и деформаций. Согласно (2.3) в случае, если $\delta T = 0$, условием, разделяющим пластину на области, в которых имеет место дополнительное фазовое превращение, и области, в которых оно отсутствует, является обращение в нуль величины $\varepsilon_{ij}^{(2)*} \delta \sigma'_{ij}{}^{[2]}$. Полагая, что поперечная координата x_3^0 соответствует границе указанных областей, на которые разделяется пластина, в результате анализа соотношений (3.2), (4.1) находим

$$\delta \varepsilon_{11}^0 + \delta \varepsilon_{22}^0 - x_3^0(\varkappa_{11} + \varkappa_{22}) = 0. \quad (4.2)$$

Для вариаций моментов M_{ij} и усилий N_{ij} в срединной плоскости из (4.1) с учетом (4.2) получаем выражения

$$M_{ii} = -D[(1 - \omega_1)\varkappa_{ii} + (\mu - \omega_1)\varkappa_{jj}], \quad M_{12} = -D(1 - \mu)\varkappa_{12}; \quad (4.3)$$

$$N_{ii} = B[\delta \varepsilon_{ii}^0(1 - \omega_2) + \delta \varepsilon_{jj}^0(\mu - \omega_2)], \quad N_{12} = 2Gh\delta \varepsilon_{12}^0. \quad (4.4)$$

Здесь $D(q) = E(q)h^3/[12(1 - \mu^2)]$; $B(q) = E(q)h/(1 - \mu^2)$,

$$\omega_1 = \omega_1(p^{[2]}, q) = \frac{\omega}{4}(2 - z)(1 + z)^2, \quad \omega_2 = \omega_2(p^{[2]}, q) = \frac{\omega}{4}\frac{(1 + z)^2}{z},$$

$$\omega = \omega(p^{[2]}, q) = \frac{1 + \mu(q)}{2} \frac{\xi(p^{[2]}, q)}{1 + \xi(p^{[2]}, q)}; \quad (4.5)$$

$$z = 2x_3^0/h. \quad (4.6)$$

Завершают постановку задачи уравнения равновесия и совместности

$$M_{11,11} + \frac{2}{r}M_{11,1} + \frac{2}{r^2}M_{12,2} + \frac{2}{r}M_{12,12} + \frac{1}{r^2}M_{22,2} - \frac{1}{r}M_{22,1} + p^{[2]}h(\varkappa_{11} + \varkappa_{22}) = 0; \quad (4.7)$$

$$N_{11,1} + \frac{1}{r}N_{12,2} + \frac{N_{11} - N_{22}}{r} + Q_{11} = 0, \quad N_{12,1} + \frac{1}{r}N_{22,2} + \frac{2}{r}N_{12} + Q_{22} = 0; \quad (4.8)$$

$$\delta \varepsilon_{22,11}^0 + \frac{1}{r^2}\delta \varepsilon_{11,22}^0 + \frac{2}{r}\delta \varepsilon_{22,1}^0 - \frac{1}{r}\delta \varepsilon_{11,1}^0 - \frac{2}{r}\delta \varepsilon_{12,12}^0 - \frac{2}{r^2}\delta \varepsilon_{12,2}^0 = 0 \quad (4.9)$$

(Q_{ii} — вариации поверхностных усилий), а также соотношения, в которых вариации кривизн выражаются через вариацию прогиба w пластины:

$$\varkappa_{11} = w_{,11}, \quad \varkappa_{22} = \frac{1}{r}w_{,1} + \frac{1}{r^2}w_{,22}, \quad \varkappa_{12} = \frac{1}{r}w_{,12} - \frac{1}{r^2}w_{,2}. \quad (4.10)$$

При анализе потери устойчивости, вызванной прямым мартенситным превращением, можно использовать все полученные выше формулы, если в них индекс 2 в квадратных скобках заменить на единицу, а величины g и ξ^+ вычислять по формулам

$$g = g(p^{[1]}, q) = p^{[1]} \left(\frac{1 - \mu_1}{E_1} - \frac{1 - \mu_2}{E_2} + \frac{1}{3\sigma_0} \exp(a_0 q) \right),$$

$$\xi^+ = \xi^+(p^{[1]}, q) = -\frac{1}{2} E(q) g(p^{[1]}, q) \psi(q) k^*, \quad k^* = \frac{k}{M_s - M_f}.$$

Сформулированная система содержит 14 уравнений (4.2), (4.3), (4.7), (4.10), (4.4), (4.8), (4.9) для 14 неизвестных M_{ij} , \varkappa_{ij} , w , N_{ij} , $\delta\varepsilon_{ij}^0$, x_3^0 . Система делится на семь “изгибных” уравнений (4.3), (4.7), (4.10), в которые входит семь переменных M_{ij} , \varkappa_{ij} , w и шесть “мембранных” уравнений (4.4), (4.8), (4.9) относительно шести неизвестных N_{ij} , $\delta\varepsilon_{ij}^0$. Однако ни одна из этих двух систем уравнений не является замкнутой, поскольку в обе системы входит одна дополнительная неизвестная x_3^0 , удовлетворяющая уравнению (4.2), связывающему “изгибные” и “мембранные” переменные. Таким образом, в рассматриваемой задаче, в отличие от задачи упругой устойчивости, для пластин из СПФ изгибное и мембранное состояния не разделяются.

В данной работе в качестве кинематических граничных условий рассматриваются условия заделки на внешнем и внутреннем контурах

$$w(R_i, \varphi) = w_{,1}(R_i, \varphi) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.11)$$

Замкнутая формулировка задачи устойчивости включает задание всех вариаций внешних нагрузок, входящих в систему уравнений: $Q_{11}(r)$, $Q_{22}(r)$, $N_{11}(R_i)$, $N_{12}(R_i)$. В частности, если задача решается с использованием гипотезы фиксированной нагрузки, то все эти вариации должны быть заданы равными нулю.

5. Решение задачи устойчивости при постоянном значении координаты границы зоны дополнительного фазового превращения. В данном пункте рассматривается класс решений поставленной задачи, в которых зона дополнительного фазового перехода имеет толщину, не зависящую от радиальной и кольцевой координат:

$$z_{,1} = z_{,2} = 0. \quad (5.1)$$

Подставляя соотношения (4.3) в моментное уравнение равновесия (4.7) с учетом (5.1) и выражений для вариаций кривизн (4.10), получаем уравнение устойчивости для вариации прогиба

$$\Delta\Delta w + \alpha^2 \Delta w = 0, \quad (5.2)$$

где $\Delta(\cdot)$ — оператор Лапласа,

$$\alpha^2 = \alpha^2(p^{[\alpha]}, q, z) = \frac{p^{[\alpha]} h}{D} \frac{1}{1 - \omega_1(q, z)}. \quad (5.3)$$

Разыскивая решение уравнения (5.2) в виде

$$w(r, \varphi) = W(r) \cos n\varphi, \quad (5.4)$$

можно свести задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$y'' + \frac{1}{r} y' - \frac{n^2}{r^2} y + \alpha^2 y = 0, \quad y = W'' + \frac{1}{r} W' - \frac{n^2}{r^2} W. \quad (5.5)$$

Решение (5.5) задается формулами

$$W(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln(\alpha r) + c_3 J_0(\alpha r) + c_4 Y_0(\alpha r), & n = 0, \\ c_1 (\alpha r)^n + c_2 (\alpha r)^{-n} + c_3 J_n(\alpha r) + c_4 Y_n(\alpha r), & n \geq 1. \end{cases} \quad (5.6)$$

Здесь постоянные c_1, \dots, c_4 зависят от номера гармоники n ; J_n, Y_n — функции Бесселя первого и второго рода. Первое уравнение в (5.6) описывает осесимметричный случай потери устойчивости, остальные — неосесимметричный.

При заземлении обеих кромок пластины (см. (4.11)) критические нагрузки могут быть найдены из условия равенства нулю определителей систем однородных уравнений, соответствующих этим граничным условиям:

$$\begin{vmatrix} 1 & \ln \beta_1 & \gamma_{01} & \delta_{01} \\ 0 & R_1^{-1} & -\alpha\gamma_{11} & -\alpha\delta_{11} \\ 1 & \ln \beta_2 & \gamma_{02} & \delta_{02} \\ 0 & R_2^{-1} & -\alpha\gamma_{12} & -\alpha\delta_{12} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \beta_1^n & \beta_1^{-n} & \gamma_{n1} & \delta_{n1} \\ n\alpha\beta_1^{-(n+1)} & -n\alpha\beta_1^{-(n+1)} & \eta_{n1} & \zeta_{n1} \\ \beta_2^n & \beta_2^{-n} & \gamma_{n2} & \delta_{n2} \\ n\alpha\beta_2^{-(n+1)} & -n\alpha\beta_2^{-(n+1)} & \eta_{n2} & \zeta_{n2} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.7)$$

в случаях осесимметричной и неосесимметричной потери устойчивости соответственно. Здесь $\beta_i = \alpha R_i$, $\gamma_{ni} = J_n(\beta_i)$, $\delta_{ni} = Y_n(\beta_i)$, $\eta_{ni} = n\gamma_{ni}/R_i - \alpha\gamma_{n+1i}$, $\zeta_{ni} = n\delta_{ni}/R_i - \alpha\delta_{n+1i}$ ($i = 1, 2, n = 0, 1, 2, \dots$).

Коэффициенты уравнений (5.7) зависят от безразмерной координаты границы зоны дополнительного фазового перехода z (4.6), так как от этой координаты зависят величины α (5.3) и ω_1 (4.5). Величина z должна быть определена с использованием каких-либо дополнительных предположений. В частности, решая задачу в рамках гипотезы фиксированного фазового состава, необходимо считать $z = -1$, а при использовании гипотезы повсеместного дополнительного фазового перехода должно выполняться условие $z = 1$. В обоих случаях критические значения сил находятся только из “изгибных” уравнений, а соотношения для мембранных усилий можно использовать для вычисления малых вариаций внешних нагрузок, обеспечивающих существование этого решения. Полученные критические значения сил должны быть минимизированы по параметрам q и n .

6. Точное решение задачи о заземленной кольцевой пластине в рамках гипотезы фиксированной нагрузки. Представляет интерес исследование вопроса о существовании решения, принадлежащего рассмотренному выше классу (5.1), которое в рамках гипотезы фиксированной нагрузки является точным, т. е. соответствует нулевым вариациям всех силовых внешних воздействий. В этом случае нельзя ограничиться решением только “изгибного” уравнения (5.2), а необходимо рассматривать также “мембранные” соотношения для определения заранее неизвестной границы зоны дополнительного фазового перехода z .

Пусть вариации нагрузок, приложенных на поверхностях пластины $x_3 = \pm h/2$, равны нулю: $Q_{11} = Q_{22} = 0$. В этом случае вариации усилия в срединной плоскости могут быть выражены через функцию напряжений:

$$N_{11} = \frac{1}{r} \Phi_{,1} + \frac{1}{r^2} \Phi_{,22}, \quad N_{22} = \Phi_{,11}, \quad N_{12} = -\left(\frac{1}{r} \Phi_{,2}\right)_{,1}. \quad (6.1)$$

Выражая вариации деформаций $\delta\varepsilon_{ij}^0$ через вариации погонных сил в (4.4), с помощью соотношений (4.5), (6.1) получаем выражения

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{ii}^0 &= \frac{1 + \mu}{2Eh} [(1 + \mu - 2\omega_2)^{-1}(1 - \mu)\Delta\Phi - (-1)^i(\Delta\Phi - 2\Phi_{,11})], \\ \delta\varepsilon_{12}^0 &= -\frac{1}{2Gh} \left(\frac{1}{r} \Phi_{,2}\right)_{,1}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

из которых следует зависимость $\delta\varepsilon_{11}^0 + \delta\varepsilon_{22}^0 = B^{-1}(1 + \mu - 2\omega_2)^{-1} \Delta\Phi$. С учетом этой зависимости, используя проверяемое непосредственно соотношение $\varkappa_{11} + \varkappa_{22} = \Delta w$, выражение (4.2) можно представить в виде

$$\frac{1}{B} (1 + \mu - 2\omega_2)^{-1} \Delta\Phi = \frac{h}{2} z \Delta w. \quad (6.3)$$

Подставляя (6.2) при $z = \text{const}$ в уравнение совместности деформаций (4.9), получаем уравнение $(1 - \omega_2)(1 + \mu - 2\omega_2)^{-1} \Delta\Delta\Phi = 0$, которое с учетом (6.3) записывается в виде $(1 - \omega_2)\Delta\Delta w = 0$, а с учетом (5.2) — в форме

$$(1 - \omega_2)\alpha^2 \Delta w = 0. \quad (6.4)$$

Согласно (5.3) при ненулевых нагрузках $\alpha \neq 0$. Так как в принятых предположениях величины z , T , σ_{ij} , а значит, и q не зависят от r и φ , то и первый множитель в левой части (6.4) не зависит от этих координат. Тогда из (6.4) следует, что либо функция w является гармонической во всей области, либо коэффициент в левой части (6.4) обращается в нуль. Ненулевая гармоническая функция не удовлетворяет граничному условию (4.11) на контуре области. Следовательно, ненулевое решение возможно лишь во втором из перечисленных выше вариантов, т. е. при относительной толщине зоны дополнительного фазового перехода, которая определяется по формуле

$$z = z_* = \frac{2}{\omega} \left(1 - \frac{\omega}{2} - \sqrt{1 - \omega} \right), \quad (6.5)$$

обращающей в нуль первый множитель в выражении (6.4). При $z = z_*$ (см. (6.5)) формулу (6.3) можно записать в окончательном виде:

$$\Delta\Phi = -Gh^2 z_* \Delta w. \quad (6.6)$$

Разыскивая решение Φ уравнения (6.6) в виде, аналогичном представлению решения для прогиба (5.4):

$$\Phi(r, \varphi) = \Psi(r) \cos n\varphi, \quad (6.7)$$

для $\delta\Psi(r)$ находим зависимости

$$\Psi(r) = \begin{cases} c_{10} + c_{20} \ln r - Gh^2 z_* W(r), & n = 0, \\ c_{1n} r^n + c_{2n} r^{-n} - Gh^2 z_* W(r), & n \geq 1. \end{cases} \quad (6.8)$$

Подставляя в (6.1) зависимости (6.7), (6.8), получаем выражения для погонных сил

$$\begin{aligned} N_{11} &= -\frac{\cos(n\varphi)}{r} \left[c_{1n} n(n-1)r^{n-1} + c_{2n} n(n+1)r^{-n-1} + Gh^2 z_* \left(W' - \frac{n^2}{r} W \right) \right], \\ N_{22} &= \cos(n\varphi) \left[c_{1n} n(n-1)r^{n-2} + c_{2n} n(n+1)r^{-n-2} - Gh^2 z_* W'' \right], \\ N_{12} &= \frac{n \sin(n\varphi)}{r} \left[c_{1n} (n-1)r^{n-1} - c_{2n} (n+1)r^{-n-1} - Gh^2 z_* \left(W' - \frac{1}{r} W \right) \right], \end{aligned} \quad (6.9)$$

справедливые при $n = 0, 1, 2, \dots$. При этом постоянные c_{10} , c_{20} не оказывают влияния на напряженное состояние пластины.

Для кольцевой пластины с заземленной внешней кромкой $W(R_2) = W'(R_2) = 0$ условия отсутствия вариаций нагрузки на этой кромке $N_{11}(R_2) = N_{12}(R_2) = 0$ приводят к системам однородных уравнений для постоянных c_{1n} , c_{2n} , $n = 1, 2, \dots$, имеющих только три-

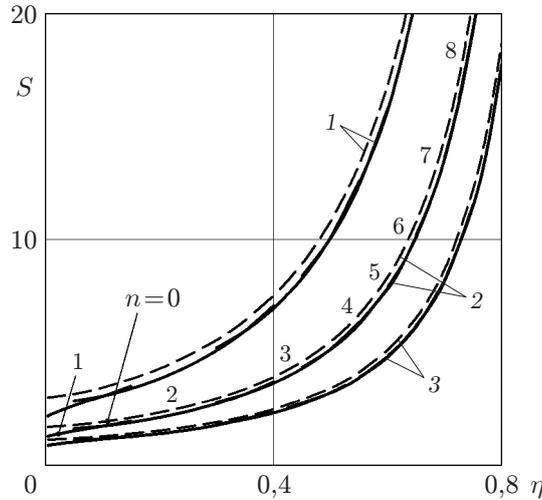


Рис. 1. Зависимость относительной критической нагрузки S от отношения внутреннего радиуса к внешнему η в случае потери устойчивости при прямом мартенситном превращении:

1 — гипотеза фиксированного фазового состава, 2 — гипотеза фиксированной нагрузки, 3 — гипотеза повсеместного дополнительного фазового перехода

виальное решение. Полагая соответствующие постоянные равными нулю, выражения (6.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 N_{11} &= -\frac{\cos(n\varphi)}{r} \left[Gh^2 z_* \left(W' - \frac{n^2}{r} W \right) \right], & N_{22} &= -\cos(n\varphi) Gh^2 z_* W'', \\
 N_{12} &= -\frac{n \sin(n\varphi)}{r} \left[Gh^2 z_* \left(W' - \frac{1}{r} W \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{6.10}$$

Вследствие (6.10) при выполнении условий защемления на внутренней кромке $W(R_1) = W'(R_1) = 0$ автоматически получаем условие равенства нулю вариаций нагрузки на ней: $N_{11}(R_1) = N_{12}(R_1) = 0$. Таким образом, в рамках гипотезы фиксированных нагрузок вариации всех нагрузок равны нулю и решение (5.7) при $z = z_*$ является точным.

7. Анализ результатов расчета. Приведенные ниже результаты расчета получены при следующих безразмерных значениях параметров материала, характерных для никелида титана, и геометрических параметров пластины: $E_1/E_2 = 1/3$, $\mu_1 = 0,48$, $\mu_2 = 0,33$, $a_0 = 0,718$, $\sigma_0/E_2 = 0,049$, $kE_2/(M_s - M_f) = 480$, $E_2/[\Delta S(A_f - A_s)] = 4,107 \cdot 10^3$, $h/R_2 = 0,05$.

На рис. 1–4 штриховые линии соответствуют осесимметричной форме потери устойчивости, сплошные — нижней границе критических значений нагрузки, найденных при различных числах полуволн по окружной координате, что соответствует неосесимметричной форме потери устойчивости. На рис. 1–4 приведены также фрагменты кривых, соответствующих различным числам полуволн n .

На рис. 1 представлены результаты решения задачи о потере устойчивости кольцевой пластины при прямом мартенситном превращении. По оси абсцисс отложено отношение внутреннего радиуса к внешнему $\eta = R_1/R_2$, по оси ординат — величина $S = p^*/p_M^*$, равная отношению найденного критического значения радиального усилия p^* для кольцевой защемленной пластины к эйлеровой нагрузке потери устойчивости p_M^* сплошной круглой защемленной пластины, материал которой находится в мартенситном состоянии: $p_M^* = U^2 D(1)/(hR^2)$ ($U \approx 3,8317$ — наименьший корень уравнения $J_1(U) = 0$). Видно, что

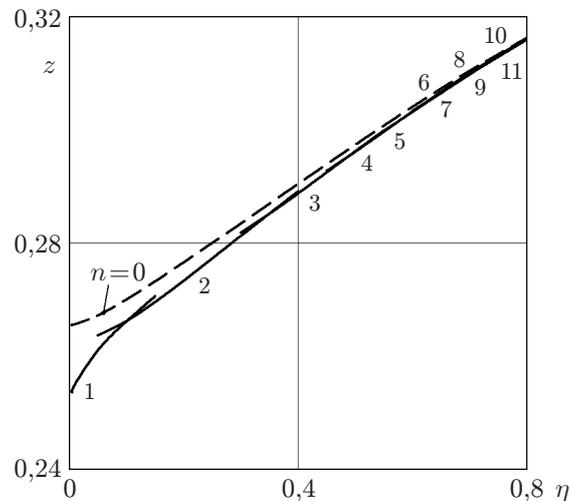


Рис. 2. Зависимость толщины зоны дополнительного фазового перехода z от отношения внутреннего радиуса к внешнему η при анализе потери устойчивости в случае прямого мартенситного превращения в рамках гипотезы фиксированной нагрузки

при любом значении η , в том числе при $\eta \rightarrow 0$, т. е. при предельном переходе к сплошной пластине, наименьшие критические значения усилий соответствуют неосесимметричной форме потери устойчивости. В то же время для сплошной круглой пластины наименьшие критические нагрузки соответствуют значению $n = 0$, т. е. осесимметричной форме потери устойчивости. Это объясняется тем, что в задаче для кольца при $\eta \rightarrow 0$ граничное условие на внутреннем контуре, стягивающемся в точку, имеет вид $W(0) = W'(0) = 0$, а в случае сплошной пластины в центральной точке выполняется только условие $W'(0) = 0$, а $W(0) \neq 0$.

На рис. 2 для критических значений усилий, найденных в соответствии с гипотезой фиксированной нагрузки, представлены зависимости координаты z границы зоны дополнительного фазового превращения, обусловленного выпучиванием, от величины η . Видно, что зона дополнительного фазового перехода занимает бóльшую часть сечения пластины ($z > 0$), причем чем уже кольцо, тем больше толщина этой зоны.

На рис. 3 представлена зависимость объемной доли мартенситной фазы q , при которой происходит потеря устойчивости, от величины η . Кривые 1 получены с использованием гипотезы повсеместного дополнительного фазового перехода, кривые 2 — с использованием гипотезы фиксированной нагрузки, горизонтальная линия 3 ($q = 1$) соответствует потере устойчивости в мартенситном состоянии. Таким образом, в соответствии с первыми двумя гипотезами потеря устойчивости происходит не в конечной точке прямого превращения, где значения упругих модулей минимальны, а в некотором промежуточном положении. Чем шире пластина, тем меньшее значение объемной доли мартенситной фазы соответствует моменту потери устойчивости.

Также в рамках гипотезы повсеместного дополнительного фазового перехода рассматривалась потеря устойчивости при обратном превращении. На рис. 4 представлена зависимость безразмерного параметра критической нагрузки S от отношения η при условии, что на этапе предшествующего прямого мартенситного перехода имело место растяжение (кривые 1) или сжатие (кривые 2). Уровень нагрузки при предшествующем прямом превращении считался равным удвоенной эйлеровой нагрузке потери устойчивости сплошной пластины в мартенситном состоянии. Для сравнения на рис. 4 представлены критические

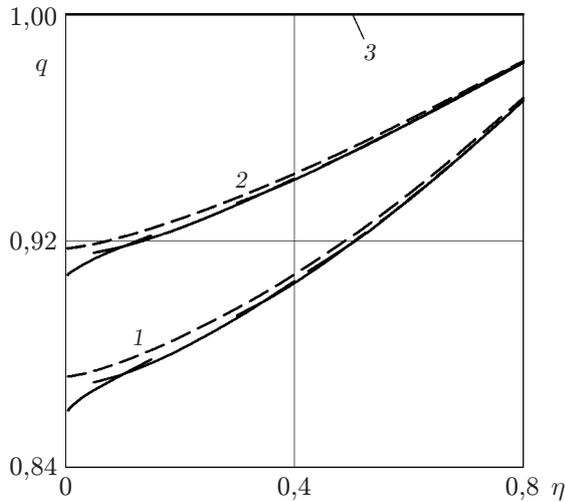


Рис. 3

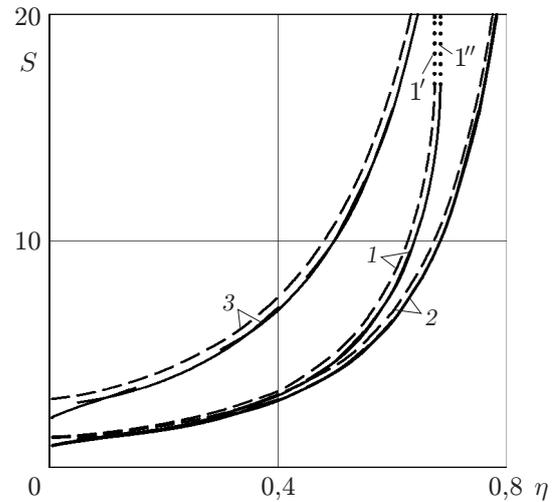


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость объемной доли мартенситной фазы q от отношения внутреннего радиуса к внешнему η в момент потери устойчивости при прямом мартенситном превращении:

1 — гипотеза повсеместного дополнительного фазового перехода, 2 — гипотеза фиксированной нагрузки, 3 — гипотеза фиксированного фазового состава

Рис. 4. Зависимость относительной величины критической нагрузки потери устойчивости S от отношения внутреннего радиуса к внешнему η при обратном мартенситном превращении:

1, 2 — гипотеза повсеместного дополнительного фазового перехода (1 — растяжение на этапе предшествующего прямого превращения, 2 — сжатие на этапе предшествующего прямого превращения), 3 — гипотеза фиксированного фазового состава

нагрузки, полученные в рамках гипотезы фиксированного фазового состава (кривые 3). Эти кривые совпадают с кривыми 1 на рис. 1. Заметим, что при малых значениях η сплошные и штриховые кривые 1, 2 практически совпадают. По мере увеличения η различие становится более существенным. Более того, при некотором значении η кривые 1 на рис. 4 переходят в вертикальные прямые (пунктирные линии), что свидетельствует о наличии скачка у кривых 1. Пунктирная линия $1'$ соответствует осесимметричной форме потери устойчивости, линия $1''$ — неосесимметричной форме с числом полуволи в окружном направлении $n = 7$. На рис. 5 приведена зависимость величины разрешающего определителя Δ от параметра нагрузки S . Корни уравнения $\Delta = 0$ являются искомыми собственными значениями. Кривые 1–3 получены путем минимизации по q наименьшего корня определителя при $n = 0$ для $\eta = 0,6000; 0,6500; 0,6733$ соответственно. Видно, что с увеличением отношения η два наименьших соседних соответствующих определителей сближаются. При некотором значении η , в данном случае при $\eta = 0,6733$, два корня превращаются в один двукратный (график зависимости $\Delta(\eta)$ касается оси абсцисс в точке минимума, равного нулю). Дальнейшее увеличение η приводит к тому, что значение локального минимума определителя становится положительным и соответствующий корень исчезает (ср. кривые 4 и 3, построенные при одном и том же значении q). При $\eta > 0,6733$ определитель имеет другие корни, но их значения существенно больше, что обуславливает наблюдаемый скачок критического усилия.

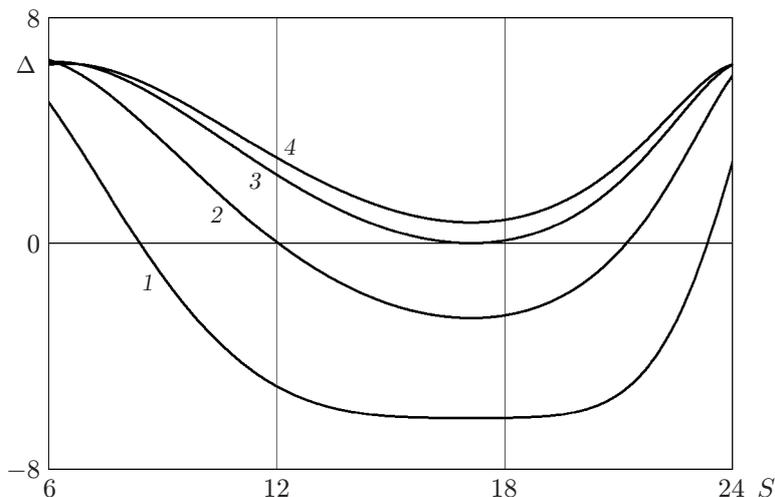


Рис. 5. Зависимость разрешающего определителя Δ от относительной величины нагрузки S при различных значениях отношения внутреннего радиуса к внешнему η :
 1 — $\eta = 0,6$; 2 — $\eta = 0,65$; 3 — $\eta = 0,6733$; 4 — $\eta = 0,68$

Полученные решения свидетельствуют о том, что в отличие от сплошной круговой пластины кольцевая, защемленная по обоим контурам пластина из СПФ, находящаяся под действием равномерного радиального сжатия, как при прямом, так и при обратном мартенситном превращении теряет устойчивость по неосесимметричной форме. Критические нагрузки для кольцевой пластины выше, чем для сплошной круговой с таким же внешним радиусом, и монотонно возрастают с увеличением отношения внутреннего радиуса к внешнему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курдюмов Г. В., Хандрос Л. Г. О термоупругом равновесии при мартенситном превращении // Докл. АН СССР. 1949. Т. 66, вып. 2. С. 211–215.
2. Лихачев В. А. Эффект памяти формы / В. А. Лихачев, С. Л. Кузьмин, З. П. Каменцева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987.
3. Мовчан А. А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 1. С. 197–205.
4. Мовчан А. А. Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 173–181.
5. Мовчан А. А., Казарина С. А. Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2002. № 6. С. 82–89.
6. Мовчан А. А., Сильченко Л. Г. Устойчивость стержня, претерпевающего прямое или обратное мартенситное превращение под действием сжимающих напряжений // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 3. С. 169–178.
7. Мовчан А. А., Сильченко Л. Г. Анализ устойчивости при прямом термоупругом превращении под действием сжимающих напряжений // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 2. С. 132–144.

8. **Мовчан А. А., Сильченко Л. Г.** Аналитическое решение связанной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, вып. 1. С. 60–72.
9. **Мовчан А. А., Сильченко Л. Г.** Аналитическое решение связанной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при обратном мартенситном превращении // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 5. С. 153–167.
10. **Мовчан А. А., Сильченко Л. Г.** Устойчивость круглой пластины из сплава с памятью формы при прямом мартенситном превращении // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 5. С. 869–881.
11. **Мовчан А. А., Сильченко Л. Г.** Потеря устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы, вызванная обратным термоупругим мартенситным превращением // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 1. С. 117–130.
12. **Шкутин Л. И.** Анализ осесимметричных фазовых деформаций в пластинах и оболочках // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 2. С. 163–171.
13. **Шкутин Л. И.** Анализ осесимметричных деформаций пластин и оболочек в термоцикле фазовых превращений // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 2. С. 204–210.

*Поступила в редакцию 3/XI 2009 г.,
в окончательном варианте — 16/II 2010 г.*
