

УДК 539.3

**НОВЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ГЕОМЕХАНИКИ
С УЧЕТОМ ЗАПРЕДЕЛЬНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД**

А. И. Чанышев^{1,2}, И. М. Абдулин¹

¹Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,

E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет экономики и управления,
ул. Каменская, 56, 630099, г. Новосибирск, Россия

С применением экспериментальных данных для горных пород установлены собственные тензорные базисы, где деформации вдоль собственных ортов определяются только значениями напряжений вдоль них. Полученные паспортные зависимости вдоль ортов — одна пропорциональная, другая — нелинейная, не связанные с историей и характером нагружения пород, применяются для решения задач геомеханики. Показано, что в случае плоской деформации эти соотношения при запредельном деформировании приводят к гиперболической системе дифференциальных уравнений с четырьмя вещественными характеристиками и четырьмя соотношениями на них для отыскания четырех неизвестных функций: среднее напряжение, максимальное касательное напряжение, угол поворота, угол, задающий направления главных осей тензора напряжений. Чтобы найти их граничные значения на одной и той же границе задаются одновременно вектор напряжений Коши и вектор перемещений. Предложен алгоритм нахождения этих четырех функций внутри области запредельного деформирования.

Сопротивление, деформирование, тензорный базис, собственной базис, паспортные зависимости, запредельное деформирование, гиперболическая система уравнений, характеристики, задача Коши

DOI: 10.15372/FTPRPI20220502

Механика деформируемого твердого тела как основа для изучения процессов деформирования геосред включает теорию упругости, пластичности, ползучести, механику разрушения композитных сред [1–4]. В основе этих теорий лежат экспериментальные исследования сопротивления деформированию твердых сред в зависимости от характера их нагружения [5–7].

Сопротивление деформированию горных пород при нагружении гидростатическим давлением и осевым сжатием (схема Кармана) исследовалось в [8–11]. Связи между напряжениями и деформациями для запредельного деформирования горных пород описаны в [12–14]. В [12] они сформулированы в виде зависимости “главное напряжение – главная деформация”, в [13] предлагаются экспоненциальные аппроксимации экспериментальных кривых, в [14] соотношения между напряжениями и деформациями записываются для плоскодеформированного состояния слоистой среды.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 22-17-00188), <https://rscf.ru/project/22-17-00188>.

Экспериментальные исследования проводятся на образцах цилиндрической формы и образцах в виде параллелепипедов с возможностью трехосного нагружения (мягкого и жесткого) [8, 13–16]. На образцах цилиндрической формы создается напряженное состояние с $\mu_\sigma = \mu_\epsilon = 1$, в случае трехосного нагружения образцов кубической формы его возможно изменять [11].

Другие особенности описания неупругих деформаций состоят в том, что из интуитивных соображений за основу брались всевозможные критерии наступления пластических деформаций (Треска, Мизес, Кулон–Мор) [17], затем использовался ассоциированный закон течения [18]. Полные деформации рассчитывались как сумма упругих и пластических, определенных по закону градиентальности. В результате сравнения предсказуемых деформаций с экспериментальными не наблюдалось полного соответствия [19]. Это возможно по двум причинам: либо упругие деформации не удовлетворяют закону Гука, либо пластические деформации не отвечают ассоциированному закону течения. Развитие математических моделей пластичности с неассоциированным законом течения представлено в [20–22]. Законы упругости, отличные от закона Гука, учитывающие разнсопротивляемость горных пород при растяжении и сжатии (разномодульные материалы), рассматривались в [23].

В настоящей работе полные деформации не разделяются на составляющие, рассматривается их совокупность. Для установления сопротивления горных пород деформированию используется тензорный базис с ортами в виде тензоров и скалярным произведением как свертка по повторяющимся индексам [24]. Из всех базисов выбирается собственный, обладающий свойством — направление смещения совпадает с направлением силы. При малых деформациях в случае упругости такой базис существует в силу наличия потенциала, следующего из того, что работа усилий на изменениях деформаций не зависит от пути нагружения (в пространстве напряжений, деформаций).

ПОСТРОЕНИЕ СОБСТВЕННОГО ТЕНЗОРНОГО БАЗИСА ГОРНЫХ ПОРОД

Говоря о разнсопротивляющихся при растяжении и сжатии материалах (горных породах), отметим, что их упругое деформирование изучалось в [4–8], пластическое — в [9–11], предельное — в [12–14]. Есть замечания по этим математическим моделям. Во-первых, они никак не связаны друг с другом. Во-вторых, математическая модель предельного деформирования [12] устанавливает зависимости главных напряжений от главных деформаций, которые не являются универсальными как в упругости, так и для первоначально изотропной среды, т. е. зависят от вида нагружения ($\epsilon_1 = \sigma_1 / \tilde{E}$, $\tilde{E} = E / [1 - \nu(\sigma_2 - \sigma_3) / \sigma_1]$). В-третьих, должно быть сравнение теоретических результатов с экспериментальными, потому что в расчетах НДС в каждой точке конструкции создается свое состояние, которое должно соответствовать экспериментально наблюдаемому.

Построим математическую модель упругого и неупругого деформирования первоначально изотропной среды, разнсопротивляющейся при растяжении и сжатии, исходя из понятия собственный тензорный базис. Обратимся к экспериментальным данным [13], полученным при нагружении цилиндрических образцов осевым сжатием и боковым давлением (схема Кармана). В экспериментах образцы вначале подвергались действию гидростатического сжатия, затем при постоянном значении уровня бокового давления доводились до разрушения осевым сжатием. Особенность опытов в том, что осевое сжатие проводилось в жестком режиме нагружения с постоянной скоростью смещения захватов испытательной машины. При таком испытании оказалось возможным получить ниспадающую ветвь на диаграмме “напряжение–деформация” вплоть до разделения материала на части. Эта кривая определяет падение сопротивления материала деформированию за пределом упругости.

В экспериментах тензоры напряжений и деформаций имеют вид

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_z^0 + \Delta\sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi^0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r^0 \end{pmatrix}, \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_z^0 + \Delta\varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\varphi^0 + \Delta\varepsilon_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r^0 + \Delta\varepsilon_r \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\sigma_z^0 = \sigma_\varphi^0 = \sigma_r^0 = \sigma^0$; $\varepsilon_z^0 = \varepsilon_\varphi^0 = \varepsilon_r^0 = \varepsilon^0$; $\Delta\varepsilon_\varphi = \Delta\varepsilon_r$; z, φ, r — оси цилиндрической системы координат.

Для описания состояния (1) рассматривается тензорный базис, использованный в [25]:

$$\tilde{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Координаты тензоров T_σ, T_ε в нем равны

$$\begin{cases} \tilde{S}_1 = (T_\sigma, \tilde{T}_1) = \sigma_z^0 + \Delta\sigma_z, & \tilde{S}_2 = \sigma_\varphi^0, & \tilde{S}_3 = \sigma_r^0, \\ \tilde{\Omega}_1 = (T_\varepsilon, \tilde{T}_1) = \varepsilon_z^0 + \Delta\varepsilon_z, & \tilde{\Omega}_2 = \varepsilon_\varphi^0 + \Delta\varepsilon_\varphi, & \tilde{\Omega}_3 = \varepsilon_r^0 + \Delta\varepsilon_r. \end{cases}$$

На рис. 1 приведены экспериментальные зависимости для гранита $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_1(\tilde{\Omega}_1)$, $\tilde{S}_2 = \tilde{S}_2(\tilde{\Omega}_2)$, полученные в [13], которые не являются “единиными”, поскольку зависят от уровня приложенного бокового (гидростатического) давления, указанного сбоку от кривых.

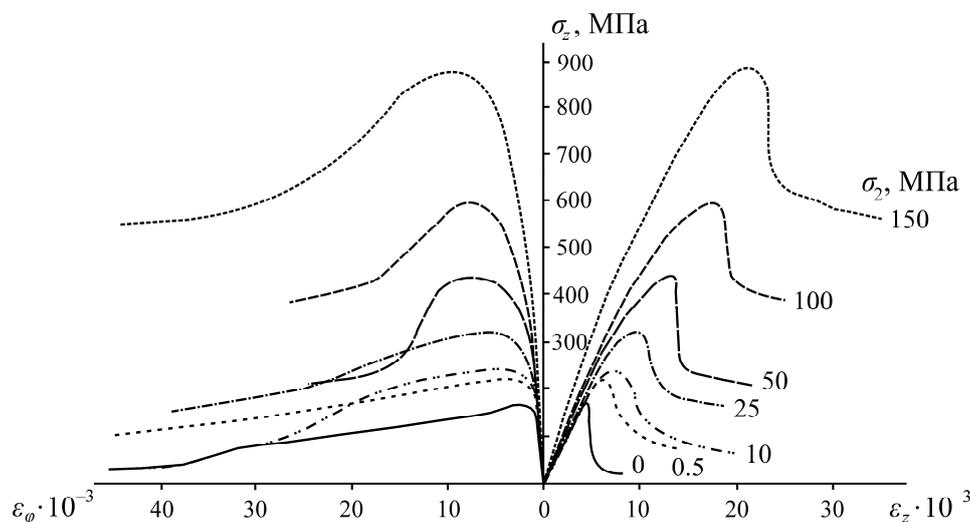


Рис. 1. Экспериментальные зависимости для гранита $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_1(\tilde{\Omega}_1)$, $\tilde{S}_2 = \tilde{S}_2(\tilde{\Omega}_2)$

Из этих зависимостей следует вывод: чем больше значение бокового давления, тем выше соответствующая кривая. Это означает, что базис (2) не является собственным ни в упругости, ни в пластичности, ни в состоянии запредельного деформирования. Ниже для примера представлены данные эксперимента для образца гранита с боковым давлением 25 МПа:

$\sigma_z, \text{ МПа}$	55	124	240	305	315	305	240	213	200	186
$\varepsilon_z \cdot 10^{-3}$	1.5	2.9	5.7	8.6	10.0	10.6	11.3	12.0	12.6	13.5
$\varepsilon_\varphi \cdot 10^{-3}$	-0.2	-0.6	-1.5	-3.9	-7.4	-10.5	-19.3	-22.5	-24.9	-27.6

Аналогичные таблицы получены для всех других оставшихся экспериментов. Далее в качестве базиса будем использовать базис вида

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Этот базис соответствует предложенному в [26]. Здесь тензор T_1 с точностью до множителя совпадает с шаровым тензором, а координаты T_σ, T_ε вдоль орта T_3 для всех экспериментов [13] равны нулю:

$$S_3 = \sigma_\varphi^0 - \sigma_r^0 = 0, \quad \Omega_3 = \varepsilon_\varphi^0 + \Delta\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r^0 - \Delta\varepsilon_r = 0, \quad (4)$$

поскольку в силу симметрии $\sigma_\varphi^0 = \sigma_r^0, \varepsilon_\varphi^0 = \varepsilon_r^0, \Delta\varepsilon_\varphi = \Delta\varepsilon_r$.

Из (3), (4) следует, что $T_\sigma = S_1 T_1 + S_2 T_2, T_\varepsilon = \Omega_1 T_1 + \Omega_2 T_2$. По этой причине тензоры $S_2 T_2, \Omega_2 T_2$ с точностью до множителей совпадают с девиаторами тензоров T_σ, T_ε . Для металлов считается, что тензоры T_1, T_2 являются собственными, т. е. кривые $S_1 = S_1(\Omega_1), S_2 = S_2(\Omega_2)$ — “единые”, паспортные, не зависящие от характера или вида нагружения. Первая зависимость отражает упругое изменение объема элемента среды, она линейная (пропорциональная). Вторая совпадает с кривой “интенсивность напряжений – интенсивность деформаций”, близка по форме к степенной функции [26].

На рис. 2 представлены зависимости $S_1 = S_1(\Omega_1), S_2 = S_2(\Omega_2)$ для гранита в базисе (3). Из него следует, что никакого закона упругого изменения объема как для металлов нет, есть увеличение объема при отрицательном гидростатическом давлении. Чем больше значение бокового давления, тем кривая $S_1 = S_1(\Omega_1)$ располагается ниже. Аналогичное можно сказать о кривой $S_2 = S_2(\Omega_2)$: “единой” зависимости здесь нет (максимальные значения ординат кривых для одной и той же абсциссы различаются в разы). Проявляется закономерность: чем больше боковое давление, приложенное к образцам, тем соответствующая кривая располагается выше по отношению к другим таким же кривым.

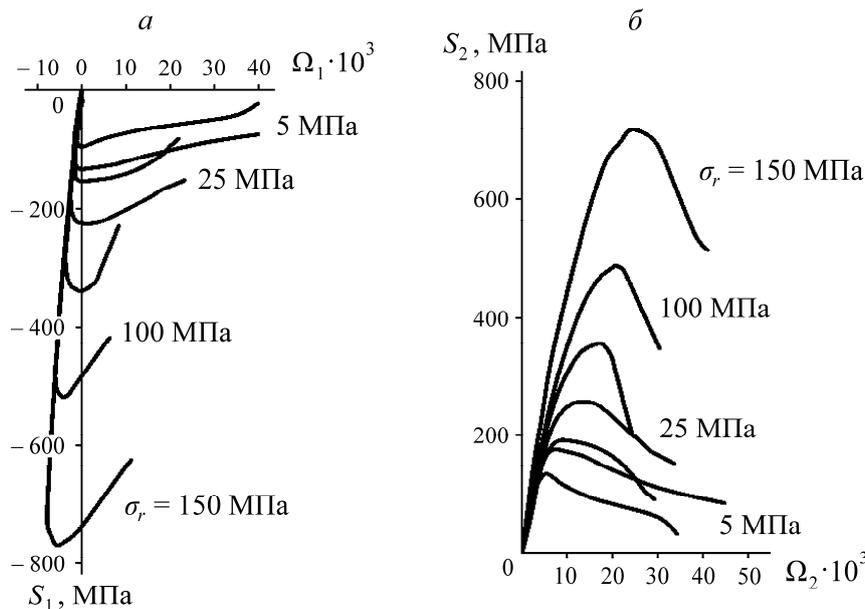


Рис. 2. Экспериментальные зависимости для гранита в базисе (3): а — $S_1 = S_1(\Omega_1)$; б — $S_2 = S_2(\Omega_2)$

Повернем базис, составленный из ортов T_1, T_2 , вокруг оси, проходящей через орт T_3 , вдоль которого проекции T_σ, T_ε равны нулю. Новые орты назовем T_m, T_l :

$$\begin{aligned} T_m &= T_1 \cos \varphi - T_2 \sin \varphi, \\ T_l &= T_1 \sin \varphi + T_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Угол φ отсчитывается от оси абсцисс в направлении по часовой стрелке (рис. 3). Для координат T_σ, T_ε в базисе (5) имеем выражения:

$$\begin{cases} S_m = S_1 \cos \varphi - S_2 \sin \varphi, & \Omega_m = \Omega_1 \cos \varphi - \Omega_2 \sin \varphi, \\ S_l = S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi, & \Omega_l = \Omega_1 \sin \varphi + \Omega_2 \cos \varphi. \end{cases} \quad (6)$$

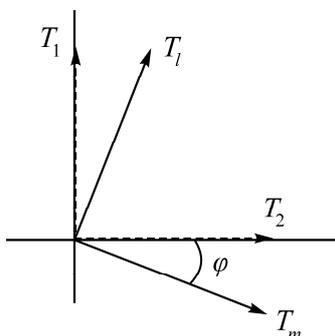


Рис. 3. Новый базис, повернутый относительно старого на угол φ

Из рис. 3 видно, что при увеличении угла φ происходит спрямление кривых, отвечающих зависимостям $S_l = S_l(\Omega_l)$. Кривые $S_l = S_l(\Omega_l)$ движутся вниз, пересекая друг друга.

На рис. 4 показаны зависимости, отвечающие углу $\varphi = \varphi_* = 39.5^\circ$. Отметим, что на этих кривых зависимости от уровня бокового давления стохастические, оцениваемые в дальнейшем методами математической статистики. Полученные кривые обладают следующими свойствами: первая диаграмма $S_m = S_m(\Omega_m)$ близка к пропорциональной зависимости, вторая диаграмма $S_l = S_l(\Omega_l)$ не зависит от уровня бокового давления и является аналогом “единой кривой” для металлов. Другая особенность второй кривой в том, что предел прочности здесь имеет значение близкое к 50 МПа. Если же ориентироваться на диаграмму $S_2 = S_2(\Omega_2)$ на рис. 2, то там средняя интенсивность напряжения на пределе прочности составляет 400 МПа (различие в этих пределах составляет 8 раз, для того чтобы разрушить среду требуется приложить напряжение в 50 МПа в определенном направлении).

Кривые на рис. 4 имеют линейную и нелинейную аппроксимации. Кривая $S_m = S_m(\Omega_m)$, ее линейная корреляция для гранита описывается уравнением $S_m = 4.6 \cdot 10^4 \Omega_m$, коэффициент корреляции $R = 0.9111$. Кривая $S_l = S_l(\Omega_l)$ описывается уравнением

$$S_l = 10^{-7} \Omega_l^6 - 2 \cdot 10^{-5} \Omega_l^5 + 6 \cdot 10^{-4} \Omega_l^4 + 0.0117 \Omega_l^3 - 0.9331 \Omega_l^2 + 13.693 \Omega_l - 1.7879,$$

коэффициент корреляции $R = 0.966$.

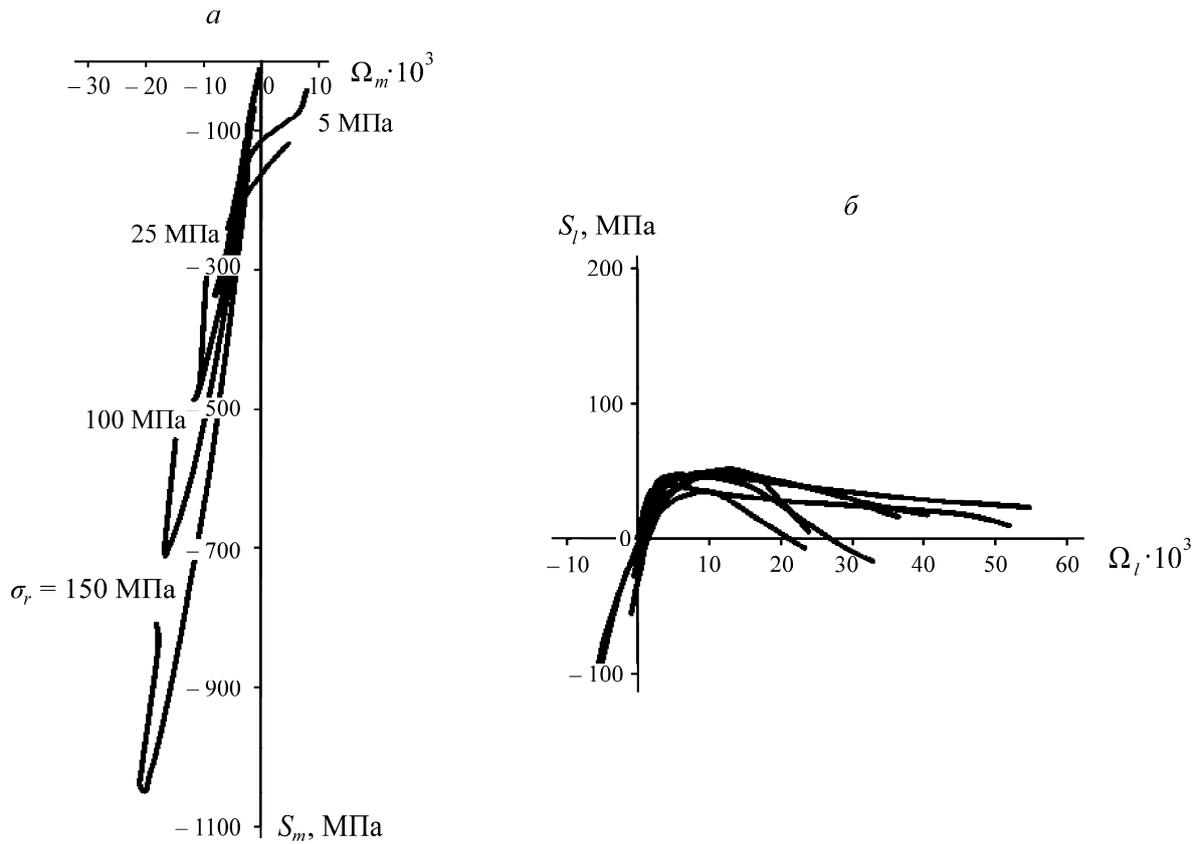


Рис. 4. Экспериментальные зависимости для гранита при угле поворота $\varphi = \varphi_* = 39.5^\circ$:
 а — $S_m = S_m(\Omega_m)$; б — $S_l = S_l(\Omega_l)$

Полученные зависимости на рис. 4 свидетельствуют о том, что базис (5) при $\phi_* = 39.5^\circ$ можно считать собственным. Это означает, что нагружение вдоль орта T_m не влияет на изменение деформации вдоль орта T_l и, наоборот, нагружение вдоль орта T_l не влияет на изменение деформации вдоль T_m . Деформация Ω_m вдоль орта T_m упругая не только в состоянии упругости, что важно, но и в состоянии запредельного деформирования, о чем свидетельствует левая диаграмма на рис. 4. Участки кривых на диаграмме $S_m = S_m(\Omega_m)$, отличные от прямолинейной зависимости

$$S_m = K\Omega_m, \quad K = \text{const}, \quad (7)$$

соответствуют такому состоянию образцов горных пород, по заключению [13], когда части разрушенного материала движутся друг относительно друга как жесткие целые при продолжающемся жестком нагружении.

Далее, то, что диаграмма $S_m = S_m(\Omega_m)$ линейная, упругая, означает, что неупругая составляющая этой деформации Ω_m^p нулевая и, как следует из (6), для неупругих составляющих деформаций Ω_1 и Ω_2 должно выполняться условие

$$\Omega_1^p = \text{tg} \varphi_* \Omega_2^p. \quad (8)$$

Отметим, что (8) — следствие (7). Зависимость (7) — новый результат, который раньше не замечался. Вместо (7), (8) в [19] предлагается компенсирующая зависимость вида

$$\Omega_1^p = \Lambda \Omega_2^p, \quad (9)$$

где Λ — экспериментально определяемый параметр, по существу, введен для компенсации (8). Если $\Lambda \neq \operatorname{tg} \varphi_*$, то не выполняется ассоциированный закон течения [19–22]. Соотношение (8) важно с точки зрения теории упругости, с его помощью определяется упругая деформация Ω_m .

Горные породы разносопротивляются при растяжении и сжатии. Этот факт отражается в зависимостях вида $S_m = S_m(\Omega_m)$, $S_l = S_l(\Omega_l)$, в которых учитывается параметр $\varphi = \varphi_*$. Рассмотрим упругие соотношения, следующие из зависимостей на рис. 4. Имеем

$$S_m = K \Omega_m, \quad S_l = 2\mu \Omega_l, \quad (K, 2\mu \text{ — константы}). \quad (10)$$

С учетом (6) находим

$$\begin{cases} \Omega_1 = a_{11} S_1 + a_{12} S_2, \\ \Omega_2 = a_{12} S_1 + a_{22} S_2, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$a_{11} = \frac{\cos^2 \varphi_*}{K} + \frac{\sin^2 \varphi_*}{2\mu}, \quad a_{12} = \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{K} \right) \sin \varphi_* \cos \varphi_*, \quad a_{22} = \frac{\cos^2 \varphi_*}{2\mu} - \frac{\sin^2 \varphi_*}{K}. \quad (12)$$

Из (11) следует, что $|\Omega_1| = a_{11} |S_1| + a_{12} |S_2|$, $|\Omega_2| = a_{12} |S_1| + a_{22} |S_2|$, т. е. зависимости $|\Omega_1|$ от $|S_1|$, $|\Omega_2|$ от $|S_2|$ будут отличаться при растяжении и сжатии из-за знаков S_1, S_2 при положительных модулях податливости a_{11}, a_{12}, a_{22} из (12).

Полученные зависимости на рис. 4 можно использовать для построения уравнений неупругого деформирования материалов. Рассмотрим уравнения пластичности. Для этого состояния

$$S_m = K \Omega_m, \quad S_l = f(\Omega_l), \quad (13)$$

где функция f не зависит от вида нагружения, а зависит от значения деформации Ω_l (“единая” кривая).

Уравнения запредельного деформирования получаются при следующих предположениях:

$$S_m = K \Omega_m, \quad 2\mu_* = \frac{S_l}{\Omega_l^p - \Omega_l}, \quad (14)$$

Ω_l^p — предельная деформация, при превышении которой происходит полное разрушение материала; $2\mu_*$ — модуль спада.

Резюмируя изложенное, отметим:

- уравнения (13), (14) соответствуют деформационной теории пластичности и запредельного деформирования горных пород, так как связывают полные напряжения и деформации (не приращения);
- соотношения (11), (12) связывают координаты тензоров напряжений и деформаций в базе (3), т. е. девиаторы и шаровые части этих тензоров;
- согласно (10)–(14), необходимо дополнить еще следующими условиями: главные оси тензоров T_σ и T_ε совпадают; виды напряженного и деформированного состояний, характеризуемые параметрами Лоде–Надаи μ_σ и μ_ε , совпадают;

- собственные тензоры для горных пород, определенные в упругости, остаются собственными в пластичности и в состоянии запредельного деформирования;
- угол $\varphi = \varphi_*$ — угол поворота базиса, к трению на площадках скольжения никакого отношения не имеет.

ЗАПРЕДЕЛЬНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Применим полученные результаты для описания напряженно-деформированного состояния горной породы при плоской деформации. Для плоской деформации введем аналоги трехмерных тензоров напряжений и деформаций в виде

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}, \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Сюда не входят напряжение σ_z , деформация ε_z равна нулю в силу исходного предположения. Отметим, что σ_z связано каким то образом с напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и таково, что обеспечивает соблюдение условия $\varepsilon_z = 0$ (x, y, z — оси декартовой системы координат $xOyz$). Это напряжение считается априори известным.

По аналогии с базисом (3) введем базис:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Тензоры T_σ, T_ε в базисе (16) имеют координаты:

$$S_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2}}, \quad S_2 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{2}}, \quad S_3 = \sqrt{2}\tau_{xy}, \quad (17)$$

$$\Omega_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{\sqrt{2}}, \quad \Omega_2 = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sqrt{2}}, \quad \Omega_3 = \sqrt{2}\varepsilon_{xy}.$$

Принимается гипотеза — главные оси тензоров T_σ и T_ε для первоначально изотропной среды совпадают. Другими словами, справедливо равенство

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}, \quad (18)$$

где θ — угол между первым направлением для тензора напряжений и осью x .

Определяющие соотношения для запредельного состояния строим в системе координат, связанной с главными осями тензоров T_σ, T_ε . Пусть ось x совпадает с первым главным направлением, ось y — со вторым. В этой системе $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2, \tau_{xy} = 0, \sigma_1 > \sigma_2$. Базис T_1, T_2 повернем вокруг орта T_3 на угол $\varphi = \varphi_*$. Как и раньше, получаем соотношения запредельного деформирования, аналогичные (14):

$$S_m = 2k\Omega_m, \quad 2\mu_* = \frac{S_l}{\Omega_l^p - \Omega_l}, \quad (19)$$

где

$$S_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2}},$$

$$S_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \dots$$

$$\Omega_1 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sqrt{2}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{\sqrt{2}}, \dots$$
(20)

Применим (19), (20) для описания плоского деформированного состояния при выполнении уравнений равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (21)$$

условий совместности деформаций, записанных в виде

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial y}, \quad (22)$$

здесь

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

u, v — смещения.

Соотношения (19), (20) перепишем в виде, разрешенном относительно $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Omega_p \sin \varphi_* + A\sigma - B\tau, \\ \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Omega_p \cos \varphi_* - B\sigma + C\tau, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$A = \frac{\cos^2 \varphi_*}{2k} - \frac{\sin^2 \varphi_*}{2\mu_*}, \quad B = \frac{\sin 2\varphi_*}{4} \left(\frac{1}{\mu_*} + \frac{1}{k} \right), \quad C = \frac{\sin^2 \varphi_*}{2k} - \frac{\cos^2 \varphi_*}{2\mu_*}. \quad (24)$$

Используем преобразования Леви:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma + \Gamma \cos 2\theta, & \sigma_y = \sigma - \Gamma \cos 2\theta, & \tau_{xy} = \Gamma \sin 2\theta, \\ \varepsilon_x = \varepsilon + \Gamma \cos 2\theta, & \varepsilon_y = \varepsilon - \Gamma \cos 2\theta, & \varepsilon_{xy} = \Gamma \sin 2\theta, \end{cases} \quad (25)$$

Γ — максимальное касательное напряжение; Γ — максимальная сдвиговая деформация; σ — среднее напряжение; ε — средняя деформация. Здесь углы, характеризующие главные оси тензоров напряжений и деформаций, совпадают и равны значению θ [3].

Подставляя (25) в (21), (22), получим систему уравнений для отыскания неизвестных функций σ , T , θ , ω_z :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial T}{\partial y} \sin 2\theta - 2T \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2T \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial T}{\partial y} \cos 2\theta + 2T \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2T \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \cos 2\theta - \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \sin 2\theta + 2\Gamma \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2\Gamma \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \sin 2\theta + \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \cos 2\theta - 2\Gamma \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2\Gamma \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Функции \mathcal{E} и Γ выражаются через σ и T посредством (24), поэтому система уравнений (26) служит для определения функций σ , T , θ , ω_z . Добавим сюда выражения полных дифференциалов:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial y} dy = d\sigma, & \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy = dT, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy = d\theta, & \frac{\partial \omega_z}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega_z}{\partial y} dy = d\omega_z. \end{cases} \quad (27)$$

Система (26), (27) служит для нахождения частных производных функций $\sigma(x, y)$, $T(x, y)$, $\theta(x, y)$, $\omega_z(x, y)$. Они определяются единственным образом, если определитель системы не равен нулю. Если определитель системы нулевой, а вспомогательные определители также равны нулю, то решение (26), (27) существует, но оно не единственно. Из условия равенства нулю определителя системы находим дифференциальное уравнение кривой, вдоль которой указанные частные производные вычисляются неоднозначным образом. Это уравнение четвертого порядка общего вида:

$$A_4 \eta^4 + A_3 \eta^3 + A_2 \eta^2 + A_1 \eta + A_0 = 0, \quad (28)$$

где $\eta = dy/dx$, коэффициенты A_0, \dots, A_4 сложным образом зависят от значений параметров T , θ коэффициентов A, B, C , выражаемых (24), и здесь не приводятся.

Далее делается замена переменной:

$$\eta = \operatorname{tg}(\theta + \beta). \quad (29)$$

Подстановка (29) в (28) с учетом свойств коэффициентов A_0, \dots, A_4 приводит (28) к биквадратному уравнению для отыскания параметра

$$\lambda = \operatorname{tg} \beta, \quad (30)$$

$$B_4 \lambda^4 + B_2 \lambda^2 + B_0 = 0, \quad (31)$$

где

$$B_4 = a - b \sin 2\varphi_*, \quad B_2 = -2 \left[\frac{2\Gamma}{T} + b \cos 2\varphi_* \right], \quad B_0 = a + b \sin 2\varphi_*, \quad (32)$$

$$a = \frac{1}{2\mu_*} - \frac{1}{2k}, \quad b = \frac{1}{2\mu_*} + \frac{1}{2k}.$$

Решая биквадратное уравнение (31), находим корни (28). Если $\lambda = \operatorname{tg}\beta$ является корнем (31), то его корнем будет также выражение $\lambda = -\operatorname{tg}\beta$, т. е. характеристики системы дифференциальных уравнений (26), (27) в силу (31) располагаются симметрично относительно первого главного направления для тензоров напряжений T_σ и деформаций T_ε .

Вычисляя вспомогательные определители системы (26), (27) и приравнивая их нулю, с помощью (28)–(31) получаем выражение, являющееся соотношениями на характеристиках:

$$\left(\cos 2\beta + \frac{2B\Gamma}{\Gamma - CT} \right) d\sigma + dT + \frac{2\Gamma}{\sin 2\beta} \left(\cos 2\beta + \frac{B\Gamma}{\Gamma - CT} \right) d\theta - \frac{T}{(\Gamma - CT) \sin 2\beta} d\omega_z = 0. \quad (33)$$

Величина $\lambda = \operatorname{tg}\beta$ из (33) определяется из (31), (32) в виде

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\frac{2\Gamma}{T} + b \cos 2\varphi_*}{a - b \sin 2\varphi_*} + \sqrt{\frac{a + b \sin 2\varphi_*}{a - b \sin 2\varphi_*}}} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\frac{2\Gamma}{T} + b \cos 2\varphi_*}{a - b \sin 2\varphi_*} - \sqrt{\frac{a + b \sin 2\varphi_*}{a - b \sin 2\varphi_*}}}. \quad (34)$$

Таким образом, вместо четырех уравнений системы (26) получаем четыре уравнения вида (33), каждое из которых выполняется на характеристических линиях, определяемых (29), (34).

Приведем частные случаи, вытекающие из (34), (33). Положим $\varphi_* = 0$, тогда (34) упрощается и имеет корни:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{\Gamma_p}{\Gamma_p - \Gamma - \frac{T}{2k}}} \pm \sqrt{\frac{\Gamma_p}{\Gamma_p - \Gamma - \frac{T}{2k}} - 1}. \quad (35)$$

Здесь Γ_p — предельное значение деформации Γ на диаграмме $T = T(\Gamma)$, при котором значение T обращается в ноль. Уравнение (35) определяет четыре значения $\operatorname{tg}\beta$, поэтому (33) также определяет четыре уравнения. Укажем все уравнения характеристик и все соотношения на них. Для удобства введем обозначение:

$$r = \frac{\Gamma_p}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_*} - \frac{1}{k} \right) T} = \frac{\Gamma_p}{\Gamma_p - \Gamma - \frac{T}{2k}}. \quad (36)$$

Первая характеристика имеет уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \beta_1), \quad \operatorname{tg}\beta_1 = \sqrt{r} + \sqrt{r-1}, \quad \mu_* \leq k. \quad (37)$$

Отсюда находим $\cos 2\beta_1 = -\sqrt{(r-1)/r}$, $\sin 2\beta_1 = -1/\sqrt{r}$. Соотношение на характеристике (37) запишется как

$$d\sigma - \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} dT + 2T\sqrt{r} d\theta + \frac{T}{\Gamma_p} \frac{r}{\sqrt{r-1}} d\omega_z = 0.$$

Вторая характеристика имеет уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \beta_2), \quad \beta_2 = -\beta_1. \quad (38)$$

Тогда $\cos 2\beta_2 = \cos 2\beta_1$, $\sin 2\beta_2 = -\sin 2\beta_1$, поэтому соотношение на характеристике (38) совпадает с уравнением

$$d\sigma - \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} dT - 2T\sqrt{r}d\theta - \frac{T}{\Gamma_p} \frac{r}{\sqrt{r-1}} d\omega_z = 0.$$

Следующая характеристика:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \beta_3), \quad \operatorname{tg}\beta_3 = \sqrt{r} - \sqrt{r-1} = \frac{(\sqrt{r} - \sqrt{r-1})(\sqrt{r} + \sqrt{r-1})}{\sqrt{r} + \sqrt{r-1}} = \operatorname{ctg}\beta_1.$$

Отсюда $\beta_3 = \pi/2 + \beta_1$, поэтому

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}(\theta + \beta_1), \quad (39)$$

$\cos 2\beta_3 = -\cos 2\beta_1$, $\sin 2\beta_3 = -\sin 2\beta_1$. Соотношение на характеристике (39)

$$d\sigma + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} dT - 2T\sqrt{r}d\theta + \frac{T}{\Gamma_p} \frac{r}{\sqrt{r-1}} d\omega_z = 0.$$

Последняя характеристика, для которой $\beta_4 = -\beta_3$, $\cos 2\beta_4 = \cos 2\beta_3$, $\sin 2\beta_4 = -\sin 2\beta_3$. Ее уравнение и соотношение на ней:

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}(\theta - \beta_1), \quad (40)$$

$$d\sigma + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} dT + 2T\sqrt{r}d\theta - \frac{T}{\Gamma_p} \frac{r}{\sqrt{r-1}} d\omega_z = 0.$$

Видно, что характеристики попарно ортогональны, а в случае идеальной пластичности ($r = 1$) попарно совпадают. Вопрос заключается в следующем: как решать задачи с применением этих уравнений.

Пусть контур $ABCDE$ на рис. 5 — участок границы произвольной выработки. Требуется найти область запредельного деформирования и границу, с которой начинается разрушение.

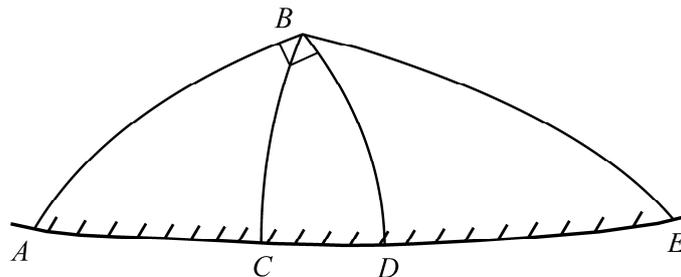


Рис. 5. Четыре характеристики AB , CB , DB , EA , сходящиеся в точке B , попарно ортогональны для случая $\varphi_* = 0$

Считаем, что на поверхности (линии) $ACDE$ заданы функции $\sigma, T, \theta, \omega_z$. При известных значениях угла θ в точках A, C, D, E строим характеристики (37), (38), (39), (40) при определенных значениях $\Gamma_p, 2\mu_*, 2k, T$ посредством (36).

Вдоль характеристик заменяем дифференциалы искомых функций приращениями, например $d\sigma$ вдоль характеристики AB заменяем разностью $\sigma_B - \sigma_A$. Получаем четыре уравнения для определения значений функций $\sigma, T, \theta, \omega_z$ в точке B . Определитель системы представленных характеристических уравнений равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{r}{r-1}} & 2T\sqrt{r} & \frac{Tr}{\Gamma_p\sqrt{r-1}} \\ 1 & -\sqrt{\frac{r}{r-1}} & -2T\sqrt{r} & -\frac{Tr}{\Gamma_p\sqrt{r-1}} \\ 1 & \sqrt{\frac{r}{r-1}} & -2T\sqrt{r} & \frac{Tr}{\Gamma_p\sqrt{r-1}} \\ 1 & \sqrt{\frac{r}{r-1}} & 2T\sqrt{r} & -\frac{Tr}{\Gamma_p\sqrt{r-1}} \end{vmatrix} = -\frac{32T^2r^2}{\Gamma_p(r-1)},$$

не обращается в ноль при $T \neq 0$ (когда материал полностью разрушится, он обратится в ноль). Следовательно, решение в точке B существует и единственно не только в случае $\varphi_* = 0$, но и в общем случае, представленном формулами (33), (34).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ ПО ЗАДАНЫМ НА ГРАНИЦЕ ВЕКТОРУ НАПРЯЖЕНИЯ КОШИ И ВЕКТОРУ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Пусть на дуге AB (рис. 6), представляющей собой границу или участок границы тела, заданы одновременно вектор напряжений Коши \vec{p}_n и вектор смещений $\vec{u}_n = (u, v)$.

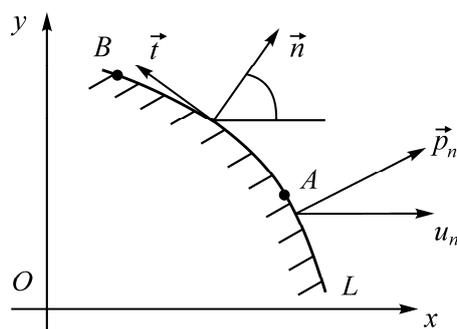


Рис. 6. На границе L заданы одновременно вектор напряжений Коши \vec{p}_n и вектор смещений \vec{u}_n

Пусть дуга L имеет параметрические уравнения

$$x = x(s), \quad y = y(s), \tag{41}$$

где s — длина дуги.

В предположении дифференцируемости функций (41) имеем соотношения:

$$\cos(n, x) = \cos(t, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\cos(t, x) = -\frac{dx}{ds}. \quad (42)$$

Найдем дифференциалы функций u, v :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \quad (43)$$

Поделим (42) на дифференциал ds , введем в (43) деформации и компоненту вектора поворота ω_z . Тогда получим

$$\begin{cases} u'_s = -\varepsilon_x \sin \varphi + (\varepsilon_{xy} - \omega_z) \cos \varphi, \\ v'_s = -(\varepsilon_{xy} + \omega_z) \sin \varphi + \varepsilon_y \cos \varphi, \end{cases} \quad (44)$$

где $\vec{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\cos \varphi = dy/ds$, $\sin \varphi = -dx/ds$.

Добавим к (43) соотношения, следующие из определения вектора напряжения Коши [17]:

$$\begin{cases} \vec{p}_n \cdot \vec{n} = \sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \vec{p}_n \cdot \vec{t} = \tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi. \end{cases} \quad (45)$$

С учетом (25), (23), (24) из (45), (44) получаем систему уравнений для определения граничных значений искомых функций $\sigma, T, \theta, \omega_z$:

$$\begin{cases} \sigma + T \cos 2(\theta - \varphi) = \sigma_n, \quad T \sin 2(\theta - \varphi) = \tau_n, \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \Omega_p \cos \varphi_* - B\sigma + CT \right) \sin 2(\theta - \varphi) - \omega_z \cos 2\varphi = u'_s \cos \varphi + v'_s \sin \varphi = (u_n)'_s, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \Omega_p \sin \varphi_* + A\sigma - BT - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \Omega_p \cos \varphi_* - B\sigma + CT \right) \cos 2(\theta - \varphi) = \\ = -u'_s \sin \varphi + v'_s \cos \varphi = (u_t)'_s, \end{cases} \quad (46)$$

здесь u_n, u_t — нормальная и касательная составляющие вектора \vec{u}_n .

Система (46) — система четырех уравнений для определения неизвестных функций $\sigma, T, \theta, \omega_z$ при известных $\sigma_n, \tau_n, u'_s, v'_s$ на границе и угле поворота базиса $\varphi = \varphi_*$. Из первого, второго и четвертого уравнений находим σ, T, θ , из третьего — ω_z .

ВЫВОДЫ

На основе рассмотрения экспериментальных данных зависимостей деформаций горных пород от напряжений с применением понятия “собственный тензорный базис” получено аналитическое описание с двумя паспортными функциями связи параметров упругого и неупругого деформирования с напряженным состоянием материалов с разным сопротивлением при растяжении и сжатии.

На основе полученных данных построена система дифференциальных уравнений гиперболического типа, описывающая запредельное деформирование горных пород при плоской деформации. Получены четыре характеристики и четыре соотношения, связывающие гидростатическое напряжение, максимальное касательное напряжение, угол поворота, угол, задающий направление главных осей тензоров напряжений и деформаций. Показано, что задание на границе области вектора напряжений Коши и вектора перемещений позволяет найти на ней значение всех искомых функций. Предложен алгоритм нахождения этих четырех функций внутри области запредельного деформирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Работнов Ю. Н.** Соппротивление материалов. — М.: Физматгиз, 1962. — 455 с.
2. **Вольмир А. С., Григорьев Ю. П., Станкевич А. И.** Соппротивление материалов. — М.: Дрофа, 2006. — 352 с.
3. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. — М.: Физматлит, 1960. — 455 с.
4. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. — М.: Наука, 1974. — 12 с.
5. **Стружанов В. В., Миронов В. И.** Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. — Екатеринбург: УрО РАН, 1995. — 192 с.
6. **Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г.** Экспериментальная физика и механика горных пород. — СПб.: Наука, 2001. — 343 с.
7. **Tarasov B. G.** The fan mechanism as an initiator of deep-level earthquakes and rock bursts, *J. Min. Sci.*, 2020, No. 3. — P. 18–23.
8. **Mogi K.** *Experimental rock mechanics*, CRC Press, 2006.
9. **Haimson B. and Chang C.** A new true triaxial cell for testing mechanical properties of rock, and its use to determine rock strength and deformability of Westerly granite, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2000, Vol. 37, No. 1–2. — P. 285–296.
10. **Kwaśniewski M. A. and Mogi K.** Faulting in an anisotropic, schistose rock under general triaxial compression, *Pacific Rocks 2000, Proc. 4th North Am. Rock Mech. Symp.*, Seattle, J. Girard, M. Liebman, C. Breeds, T. Doe (eds.), Balkema, Rotterdam, 2000. — P. 737–746.
11. **Chemenda A. I. and Mas D.** Dependence of rock properties on the Lode angle: Experimental data, constitutive model, and bifurcation analysis, *J. Mech. Phys. Solids*, 2016, Vol. 96. — P. 477–496.
12. **Петухов И. М., Линьков А. М.** Механика горных ударов и выбросов. — М.: Недра, 1983. — 279 с.
13. **Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г.** Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах. — М.: Недра, 1985. — 271 с.
14. **Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** Математическое моделирование неустойчивого режима деформирования породного массива с учетом внутренних самоуравновешенных напряжений // ФТПРПИ. — 2020. — № 6. — С. 12–29.
15. **Алексеев А. Д., Ревва В. Н., Рязанцев Н. А.** Разрушение горных пород в объемном поле сжимающих напряжений. — Киев: Наук. думка, 1989. — 168 с.
16. **Карев В. И., Коваленко Ю. Ф., Химуля В. В., Шевцов Н. И.** Физическое моделирование метода направленной разгрузки пласта // Газ. пром-сть. — 2021. — № 7. — С. 66–73.
17. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 712 с.

18. **Новожилов В. В.** О пластическом разрыхлении // ПММ. — 1965. — Т. 29. — Вып. 4. — С. 681–689.
19. **Гарагаш И. А., Николаевский В. Н.** Неассоциированные законы течения и локализации пластической деформации // Успехи механики. — 1989. — Т. 12. — № 1. — С. 131–183.
20. **Rudnicki J. W. and Rice J. R.** Condition for localization of plastic deformation in pressure sensitive dilatant materials, *J. Mech. and Phys. Solids*, 1975, Vol. 23, No. 6. — P. 371–390.
21. **Стефанов Ю. П.** Численное моделирование деформирования и разрушения образцов песчаника // ФТПРПИ. — 2008. — № 1. — С. 69–79.
22. **Коврижных А. М.** К теории пластичности, учитывающей вид напряженного состояния при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. — 1987. — № 6. — С. 98–106.
23. **Бессонов Д. Е., Зезин Ю. П., Ломакин Е. В.** Разносопротивляемость зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2009. — Т. 4. — Вып. 2. — С. 9–13.
24. **Новожилов В. В.** О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // ПММ. — 1963. — Т. 27. — Вып. 5. — С. 794–812.
25. **Черных К. Ф.** О функциональных связях между соосными симметричными тензорами второго ранга // Проблемы механики твердого деформированного тела: сб. к 60-летию акад. В. В. Новожилова. — М.: Судпромгиз, 1970.
26. **Ильюшин А. А.** Пластичность. Основы общей математической теории. — М.: АН СССР, 1963. — 270 с.

*Поступила в редакцию 07/VII 2022
После доработки 18/VII 2022
Принята к публикации 21/IX 2022*