УДК 533.72

К ВОПРОСУ О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ С ОДНОРОДНЫМ ВНУТРЕННИМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Н. В. Малай, Е. Р. Щукин*, Ю. И. Яламов*

Белгородский государственный университет, 308007 Белгород
*Московский педагогический университет, 107005 Москва

В приближении Стокса дано описание стационарного движения нагретой гидрозольной частицы сфероидальной формы в вязкой несжимаемой жидкости, внутри которой действуют равномерно распределенные источники (стоки) тепла постоянной мощности. Предполагалось, что средняя температура поверхности частицы может существенно отличаться от температуры окружающей ее жидкости. При решении гидродинамических уравнений получено аналитическое выражение для гидродинамической силы, действующей на равномерно нагретую сфероидальную частицу, с учетом зависимости вязкости от температуры, представленной в виде экспоненциально-степенного ряда.

1. Постановка задачи. Движение нагретых частиц в вязких жидких и газообразных средах рассматривалось в работах [1–5]. Под нагретой частицей понимается частица, средняя температура поверхности которой значительно превышает температуру окружающей среды. Нагрев поверхности частицы может быть обусловлен протеканием объемной химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы и т. д.

Нагретая поверхность сфероида оказывает значительное влияние на теплофизические характеристики окружающей среды и тем самым может существенно повлиять на распределение полей скорости и давления в ее окрестности.

В настоящее время движение твердых сфероидальных частиц при малых относительных перепадах температуры в их окрестности исследовано достаточно подробно [6–8].

В данной работе в приближении Стокса получено аналитическое выражение для гидродинамической силы, действующей на нагретую сфероидальную частицу, с учетом зависимости вязкости от температуры, представленной в виде экспоненциально-степенного ряда, при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее.

Рассмотрим движение в вязкой несжимаемой жидкости твердой гидрозольной частицы в форме сплюснутого сфероида, внутри которого действуют равномерно распределенные источники (стоки) тепла постоянной мощности. Числа Рейнольдса малы. Частица движется вдоль оси симметрии под действием некоторой силы, например электромагнитной. При переходе в систему координат, связанную с частицей, задача сводится к задаче обтекания нагретого неподвижного сплюснутого (вытянутого) сфероида плоскопараллельным потоком жидкости со скоростью $\boldsymbol{U}_\infty$ ($\boldsymbol{U}_\infty \parallel Oz$).

Предполагается, что плотности, теплопроводности, теплоемкости жидкости и частицы постоянны, теплопроводность частицы больше теплопроводности окружающей жидкости.

Из всех параметров переноса жидкости только динамическая вязкость сильно зависит от температуры [9]. Зависимость вязкости от температуры возьмем в виде

$$\mu_l = \mu_\infty \Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \Big(\frac{T_l}{T_\infty} - 1\Big)^n\Big] \exp\Big(-A\Big(\frac{T_l}{T_\infty} - 1\Big)\Big), \tag{1.1}$$

где $A = \text{const}$; $\mu_\infty = \mu_l(T_\infty)$; T_∞ — температура жидкости вдали от частицы. Здесь и далее индексы l и p соответствуют внешней жидкости и частице. При $F_n = 0$ формулу (1.1) можно свести к соотношению Рейнольдса [9].

Известно, что вязкость жидкости уменьшается с ростом температуры по экспоненциальному закону [9]. Из анализа имеющихся в литературе полуэмпирических формул следует, что выражение (1.1) наиболее точно описывает изменение вязкости в широком диапазоне температур. Например, для воды в диапазоне температур $0 \div 90$ °C значения параметров в (1.1) следующие: $A = 5{,}779$, $F_1 = -2{,}318$, $F_2 = 9{,}118$ при $T_\infty = 273$ K (относительная погрешность не превышает 3 %).

Обтекание сфероида описывается в сферической системе координат $(\varepsilon, \eta, \varphi)$ с началом в центре гидрозольной частицы. Криволинейные координаты ε, η, φ связаны с декартовыми координатами следующими соотношениями [10]:

— в случае вытянутого сфероида ($a_0 < b_0$)

$$x = c \operatorname{sh}\varepsilon \sin\eta \cos\varphi, \quad y = c \operatorname{sh}\varepsilon \sin\eta \sin\varphi, \quad z = c \operatorname{ch}\varepsilon \cos\eta, \quad c = \sqrt{b_0^2 - a_0^2}; \tag{1.2}$$

— в случае сплюснутого сфероида ($a_0 > b_0$)

$$x = c \operatorname{ch}\varepsilon \sin\eta \cos\varphi, \quad y = c \operatorname{ch}\varepsilon \sin\eta \sin\varphi, \quad z = c \operatorname{sh}\varepsilon \cos\eta, \quad c = \sqrt{a_0^2 - b_0^2}, \tag{1.3}$$

где a_0 и b_0 — полуоси сфероида. В декартовой системе координат ось z совпадает с осью симметрии сфероида.

При малых числах Рейнольдса и Пекле распределения скорости $\boldsymbol{U}_l$, давления P_l и температуры T_l описываются системой уравнений в условиях пониженной гравитации [10]

$$\nabla P_l = \mu_l \Delta \boldsymbol{U}_l + 2(\nabla\mu_l \nabla)\boldsymbol{U}_l + [\nabla\mu_l \times \operatorname{rot} \boldsymbol{U}_l], \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{U}_l = 0; \tag{1.4}$$

$$\Delta T_l = 0, \qquad \Delta T_p = -q_p/\lambda_p. \tag{1.5}$$

Граничные условия для системы уравнений (1.4), (1.5) имеют вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \qquad \boldsymbol{U}_l = 0, \quad T_l = T_p, \quad \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial \varepsilon} = \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial \varepsilon}; \tag{1.6}$$

$$\varepsilon \to \infty, \qquad \boldsymbol{U}_l \to U_\infty \boldsymbol{e}_\varepsilon \cos\eta - U_\infty \boldsymbol{e}_\eta \sin\eta, \quad T_l \to T_\infty, \quad P_l \to P_\infty; \tag{1.7}$$

$$\varepsilon \to 0, \qquad T_p \ne \infty. \tag{1.8}$$

Здесь q_p — постоянная мощность источников (стоков) тепла в единице объема частицы; $\boldsymbol{e}_\varepsilon$, $\boldsymbol{e}_\eta$ — единичные векторы сферической системы координат; λ — теплопроводность; $U_\infty = |\boldsymbol{U}_\infty|$.

Граничные условия (1.6) соответствуют условию прилипания для скорости, равенству температур и непрерывности потоков тепла на поверхности частицы. Поверхности частицы соответствует координатная поверхность со значением $\varepsilon = \varepsilon_0$. На большом расстоянии от частицы ($\varepsilon \to \infty$) справедливы граничные условия (1.7), а конечность физических величин, характеризующих частицу при $\varepsilon \to 0$, учтена в (1.8).

Сила, действующая на частицу со стороны потока, определяется по формуле

$$F_z = \int\limits_S \Big(-P_l \cos\eta + \sigma_{\varepsilon\varepsilon} \cos\eta - \frac{\operatorname{sh}\varepsilon}{\operatorname{ch}\varepsilon}\, \sigma_{\varepsilon\eta} \sin\eta\Big)\, dS, \tag{1.9}$$

где $dS = c^2 \operatorname{ch}^2 \varepsilon \, \sin\eta \, d\eta \, d\varphi$ — дифференциальный элемент поверхности; $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}$, $\sigma_{\varepsilon\eta}$ — компоненты тензора напряжений в сферической системе координат [11].

Исходя из граничного условия (1.7) выражения для нормальной (U_ε) и касательной (U_η) компонент массовой скорости $\boldsymbol{U}_l$ будем искать в виде

$$U_\varepsilon(\varepsilon,\eta) = \frac{U_\infty}{cH_\varepsilon \operatorname{ch}\varepsilon}\, G(\varepsilon)\cos\eta, \qquad U_\eta(\varepsilon,\eta) = -\frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}\, g(\varepsilon)\sin\eta, \tag{1.10}$$

где $G(\varepsilon)$, $g(\varepsilon)$ — произвольные функции нормальной координаты ε; H_ε — коэффициент Ламе в сферической системе координат [10].

2. Поле скорости и распределение температуры. Определение силы сопротивления. Чтобы найти силу, действующую со стороны жидкости на твердую нагретую сфероидальную частицу, необходимо знать распределения температуры, массовой скорости и давления в ее окрестности. Интегрируя уравнения (1.5) с соответствующими граничными условиями, получим

$$t_l = 1 + (\gamma/c)\operatorname{arcctg}\lambda; \tag{2.1}$$

$$t_p = B + \frac{\lambda_l}{\lambda_p}\,\frac{\gamma}{c}\,\operatorname{arcctg}\lambda + \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\operatorname{arcctg}\lambda}{c}\, f\, d\lambda - \frac{\operatorname{arcctg}\lambda}{c}\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} f\, d\lambda.$$

Здесь $\lambda = \operatorname{sh}\varepsilon$; $t = T/T_\infty$; $\gamma = t_s - 1$ — безразмерный параметр, характеризующий нагрев поверхности частицы; $t_s = T_s/T_\infty$; T_s — средняя температура поверхности нагретого сфероида, определяемая формулой $T_s/T_\infty = 1 + a_0 b_0 q_p/(3\lambda_l T_\infty)$; $B = 1 + (1 - \lambda_l/\lambda_p)\gamma\sqrt{1+\lambda_0^2}\operatorname{arcctg}\lambda_0$; $\lambda_0 = \operatorname{sh}\varepsilon_0$; $f = -\dfrac{c^2}{2\lambda_p T_\infty}\displaystyle\int\limits_{-1}^{+1} q_p(\lambda^2 + x^2)\, dx$; $x = \cos\eta$.

В силу (2.1) выражение (1.1) принимает вид

$$\mu_l = \mu_\infty\Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n\Big(\frac{\gamma}{c}\,\operatorname{arcctg}\lambda\Big)^n\Big]\exp\left(-\gamma_0 \operatorname{arcctg}\lambda\right) \qquad \Big(\gamma_0 = \frac{A\gamma}{c}\Big).$$

Поскольку вязкость зависит только от радиальной координаты λ, с учетом (1.10) решение системы уравнений гидродинамики (1.4) находим методом разделения переменных. В частности, для компонент массовой скорости $\boldsymbol{U}_l$ получены следующие выражения, удовлетворяющие граничным условиям на бесконечности (1.7):

$$U_\varepsilon(\varepsilon,\eta) = \frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}[c^2 + A_1G_1 + A_2G_2]\cos\eta, \quad U_\eta(\varepsilon,\eta) = -\frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}[c^2 + A_1G_3 + A_2G_4]\sin\eta, \tag{2.2}$$

где

$$G_1 = -\frac{1}{\lambda^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta_n^{(1)}}{(n+3)\,\lambda^n}, \quad G_2 = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta_n^{(2)}}{(n+1)\lambda^n} - \frac{\beta}{\lambda^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta_n^{(1)}}{(n+3)\lambda^n}\Big[(n+3)\ln\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1\Big],$$

$$G_3 = G_1 + \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\, G_1^{\mathrm{I}}, \qquad G_4 = G_2 + \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\, G_2^{\mathrm{I}},$$

$$\theta_n^{(1)} = -\frac{1}{n(n+5)}\sum_{k=1}^{n}[(n+4-k)\{(n+1-k)\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(2)}\} + \alpha_k^{(3)}]\theta_{n-k}^{(1)} \qquad (n \geqslant 1),$$

$$\theta_n^{(2)} = -\frac{1}{(n-2)(n+3)}\Big[\sum_{k=1}^{n}\{(n+2-k)[(n+1-k)\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(2)}] + \alpha_k^{(3)}\}\theta_{n-k}^{(2)} + \\ + \beta\sum_{k=0}^{n}[(2n-2k+3)\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(1)}]\theta_{n-k-2}^{(1)} - 6\alpha_n^{(4)}\Big] \qquad (n \geqslant 3),$$

$$H_\varepsilon = c\sqrt{\operatorname{ch}^2\varepsilon - \sin^2\eta},$$

$$\theta_1^{(2)} = -[2(\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}) + \alpha_1^{(3)} + 6\alpha_1^{(4)}]/4, \quad \theta_2^{(2)} = 1, \quad \theta_0^{(1)} = -1, \quad \theta_0^{(2)} = -1,$$

$$\beta = -[\{3(2\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}) + \alpha_1^{(3)}\}\theta_1^{(2)} - 2(\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}) - \alpha_2^{(3)} - 6\alpha_2^{(4)}]/5,$$

$$\alpha_n^{(1)} = C_n + 12\sum_{k=0}^{n_2}(-1)^k\frac{C_{n-2k-2}}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}, \qquad \alpha_n^{(4)} = \Delta_n, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = \gamma,$$

$$\alpha_n^{(2)} = (n-2)C_n - \gamma_0 C_{n-1} + 12\sum_{k=0}^{n_2}(-1)^k\frac{(4k+5)C_{n-2k-2}}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} - \\ -3\sum_{k=0}^{n_3}(-1)^k\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}[(n-2k-2)C_{n-2k-2} - \gamma_0 C_{n-2k-3} + (n-2k-4)C_{n-2k-4}] \quad (n \geqslant 1),$$

$$\alpha_n^{(3)} = -2(n+2)C_n + 2\gamma_0 C_{n-1} - 2(n-2)C_{n-2} + 12\sum_{k=0}^{n_2}(-1)^k\frac{C_{n-2k-2}}{2k+5} + \\ +6\sum_{k=0}^{n_3}(-1)^k\frac{(k+2)(4k+5)}{(2k+3)(2k+5)}[(n-2k-2)C_{n-2k-2} - \gamma_0 C_{n-2k-3} + (n-2k-4)C_{n-2k-4}] \quad (n \geqslant 1),$$

$$\Delta_{n+2} = \frac{1}{n+2}[\gamma_0\Delta_{n+1} - n\Delta_n] \qquad (n \geqslant 0),$$

$$C_k = \sum_{l_1+3l_3+5l_5+\ldots+sl_s=k}\frac{l!}{l_1!l_3!l_5!\cdots l_s!}F_l f_1^{l_1} f_3^{l_3} f_5^{l_5}\cdots f_s^{l_s}, \quad C_0 = 1, \quad s = k - \frac{1+(-1)^k}{2},$$

$$l = l_1 + l_3 + l_5 + \ldots + l_s, \quad f_{2k-1} = (-1)^{k-1}\frac{\gamma}{c(2k-1)} \quad (k \geqslant 1), \quad n_x = \Big[\frac{n+x}{2}\Big].$$

В частности, $C_1 = F_1\gamma/c$, $C_2 = F_2\gamma^2/c^2$, $C_3 = F_3\gamma^3/c^3 - F_1\gamma/(3c)$, $C_4 = F_4\gamma^4/c^4 - 2F_2\gamma^2/(3c^2)$. Через $[k/2]$ обозначена целая часть числа $k/2$.

Постоянные интегрирования A_1, A_2 определяются из граничных условий на поверхности сфероида

$$A_1 = -c^2\,\frac{G_2^{\rm I}}{G_1G_2^{\rm I} - G_2G_1^{\rm I}}, \qquad A_2 = c^2\,\frac{G_1^{\rm I}}{G_1G_2^{\rm I} - G_2G_1^{\rm I}}, \tag{2.3}$$

где $G_1^{\rm I} = dG_1/d\lambda$ и $G_2^{\rm I} = dG_2/d\lambda$ — первые производные по λ от соответствующих функций.

Интегрируя выражения (1.9) по поверхности сфероида, с учетом (2.2) находим действующую на сфероид силу, обусловленную вязкими напряжениями:

$$\boldsymbol{F}_z = -4\pi\,\frac{\mu_\infty U_\infty}{c}\,A_2\exp\Big(-\frac{A\gamma}{c}\,\operatorname{arcctg}\lambda_0\Big)\boldsymbol{n}_z, \tag{2.4}$$

где $\boldsymbol{n}_z$ — единичный вектор в направлении оси z.

Таблица 1

a_0/b_0	K при температуре T_s						
	273 K	283 K	303 K	333 K	343 K	353 K	363 K
0,73	0,947	0,705	0,393	0,163	0,121	0,089	0,065
0,90	0,980	0,727	0,397	0,158	0,116	0,086	0,062

Таблица 2

a_0/b_0	K	
	$T_s = 283$ K	$T_s = 333$ K
0,71	0,5822	0,1451
0,75	0,7076	0,1614
0,80	0,7137	0,1594
0,85	0,7201	0,1585
0,90	0,7266	0,1581
0,95	0,7332	0,1582
0,99	0,7386	0,1585

Выражение (2.4) вычислено при предположении о равномерном движении частицы, что возможно только в том случае, если полная сила, действующая на частицу, равна нулю. Поскольку сила (2.4) пропорциональна скорости и обращается в нуль вместе с ней, для реализации случая равномерного движения нагретого сплюснутого сфероида следует предположить наличие сторонней силы, уравновешивающей силу (2.4), например электромагнитной.

С учетом (2.3) выражение (2.4) можно представить в виде

$$\boldsymbol{F}_z = 6\pi a_0 \mu_\infty K U_\infty \boldsymbol{n}_z, \tag{2.5}$$

где $K = [2G_1^{\mathrm{I}}/(3\sqrt{1+\lambda_0^2}[G_2 G_1^{\mathrm{I}} - G_1 G_2^{\mathrm{I}}])] \exp\left(-(A\gamma/c)\operatorname{arcctg}\lambda_0\right)$. В выражениях для G_1, G_2, G_1^{I}, G_2^{I} $\lambda = \lambda_0$. Чтобы получить выражение для гидродинамического сопротивления вытянутого сфероида, необходимо заменить в (2.5) λ на $i\lambda$ и c на $-ic$ (i — мнимая единица).

Формула (2.5) имеет общий характер и позволяет оценить гидродинамическую силу, действующую на высокотеплопроводную сфероидальную частицу, внутри которой действуют источники (стоки) тепла, с учетом произвольной зависимости вязкости от температуры.

Влияние формфактора частицы и температуры ее поверхности на силу сопротивления определяется коэффициентом K. В качестве примера в табл. 1, 2 приведены результаты численных расчетов коэффициента K в зависимости от средней температуры поверхности сфероида и отношения полуосей для твердых частиц, взвешенных в воде при $T_\infty = 273$ K ($A = 5{,}779$, $F_n = 0$, $n \geqslant 1$). Из анализа численных результатов следует, что нагрев поверхности сфероида существенно влияет на силу сопротивления.

При $\gamma \to 0$ (малые перепады температуры в окрестности сфероида) $G_1 = 1/(3\lambda^3)$, $G_1^{\mathrm{I}} = -1/\lambda^4$, $G_2 = 1/\lambda$, $G_2^{\mathrm{I}} = -1/\lambda^2$, $a_0 = b_0 = R$, $K = 1$, формула (2.5) переходит в формулу Стокса для твердой сферической частицы радиуса R [11].

Рассмотрим движение равномерно нагретой сфероидальной частицы, средняя температура поверхности которой равна T_s. Решение этой задачи может быть получено из приведенных выше результатов. В частности, если на сфероид падает поток электромагнитного излучения с интенсивностью I_0 и длиной волны $\tilde{\lambda}_0$, то поглощаемая частицей энергия равна $\pi R^2 I_0 K_n$ (R — наибольшая полуось сфероида, K_n — коэффициент поглощения) [12]. Предположим, что $\tilde{\lambda}_0 \gg R$. Тогда поглощенная энергия распределяется по поверхности частицы равномерно, т. е. ее можно считать равномерно нагретой. В этом случае необходимо положить $q_p = 0$ и в граничных условиях (1.6) считать $T_l = T_s$. Параметр γ, характеризующий относительный перепад температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее, имеет вид $\gamma = c(t_s - 1)/\operatorname{arcctg}\lambda_0$, где $t_s = T_s/T_\infty$.

Таким образом, получено выражение, позволяющее оценивать силу сопротивления сфероидальной частицы при произвольных перепадах температуры в ее окрестности с учетом зависимости вязкости от температуры, представленной в виде экспоненциально-степенного ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kassoy D. R., Adamson T. C., Messiter A. F.** Compressible low Reynolds number around a sphere // Phys. Fluids. 1966. V. 9, N 4. P. 671–681.
2. **Найденов В. И.** Установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости с учетом зависимости вязкости от температуры // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 38, вып. 1. С. 162–166.
3. **Щукин Е. Р., Малай Н. В.** Фотофоретическое и термодиффузиофоретическое движение нагретых нелетучих аэрозольных частиц // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 54, № 4. С. 630–635.
4. **Щукин Е. Р., Малай Н. В., Яламов Ю. И.** Движение нагреваемых внутренними источниками тепла капель в бинарных газовых смесях // Теплофизика высоких температур. 1988. Т. 25, № 5. С. 1020–1024.
5. **Малай Н. В.** Гидродинамическое сопротивление гидрозольной частицы сфероидальной формы, нагреваемой внутренними источниками тепла при малых числах Рейнольдса // Инж.-физ. журн. 1999. Т. 72, № 4. С. 651–655.
6. **Payne L. E., Pell W. H.** The Stokes flow problem for a class of axially symmetric bodies // J. Fluid Mech. 1960. V. 7. P. 529–549.
7. **Берковский Б. М., Краков М. С., Никифоров И. В., Полевиков В. К.** Гидродинамическое сопротивление эллипсоидальной капли при малых числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1987. № 3. С. 4–8.
8. **Головин А. М., Потапов И. В.** Магнитогидродинамическое осесимметричное обтекание сфероидальной частицы и диффузионный поток к ее поверхности // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1995. № 3. С. 99–101.
9. **Брейтшгайдер С.** Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия, 1966.
10. **Хаппель Дж., Бреннер Г.** Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
11. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидромеханика. М.: Наука, 1986.
12. **Борен К., Хафмен Д.** Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию 13/XI 2000 г.,
в окончательном варианте — 3/V 2001 г.