

УДК 539.3:532.593

ФОКУСИРОВКА И РАССЕЙВАНИЕ ПЛОСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕД

В. И. Гуляев, Г. М. Иванченко*

Национальный транспортный университет, 01010 Киев, Украина

* Киевский национальный университет строительства и архитектуры, 01037 Киев, Украина

Рассмотрена задача о построении эволюционирующих фронтов квазипродольных и квазипоперечных ударных волн, формирующихся при падении исходной плоской ударной волны на криволинейную поверхность раздела упругих трансверсально-изотропных сред с различными физическими свойствами. Для решения нелинейных уравнений типа уравнения Снеллиуса используются метод продолжения решения по параметру и алгоритм Ньютона. Предложена методика вычисления значений разрывов полевых функций. Анализируются случаи рассеивания ударных волн и их фокусировки как частный случай бифуркации фронтов и образования каустик. Приведен численный пример.

Введение. В геометрической оптике известны явления фокусировки световых лучей (световых волн) оптическими приборами — линзами и зеркалами, широко используемыми для локального увеличения освещенности и концентрации световой (тепловой) энергии. Аналогичные явления имеют место при распространении электромагнитных волн. Для количественного описания явлений фокусировки и рассеивания лучей, а также для исследования их особенностей обычно применяются методы геометрической оптики [1–3].

Особенности перестроек фазовых фронтов и каустики, исследованные в работах [1, 4, 5], используются при анализе физических явлений не только в геометрической оптике, но и в акустике и радиофизике. Такие особенности могут проявиться даже в простейших оптических системах, состоящих из разделенных криволинейной границей однородных сред. Для их описания достаточно использовать два следствия принципа наименьшего времени Ферма: 1) при отражении света отражающей поверхностью угол падения равен углу отражения; 2) при прохождении его через границу раздела углы падения и преломления подчиняются закону преломления. При этом, поскольку на огибающей семейства световых лучей (каустике) происходит их фокусировка, интенсивность светового поля вдоль каустик неограниченно возрастает, а на фазовом фронте образуются особенности. При перемещении поверхности фронта эти особенности скользят вдоль каустик и в некоторые моменты возникновения особенностей и на каустиках перестраиваются. Структура особенностей фазовых фронтов оказывается сложнее структуры особенностей соответствующих каустик, так как коразмерность первых на единицу превышает коразмерность вторых.

Поскольку ударные волны в упругих средах имеют ту же природу, что и световые и электромагнитные волны, их взаимодействие с криволинейными поверхностями неоднородностей упругой среды также сопровождается изменением направления лучей, что приводит к их фокусировке или рассеиванию.

Как правило, при исследовании особенностей фронтов ударных волн в упругих средах наибольший интерес представляют геометрические построения движущихся поверхностей разрывов полевых функций и вычисление значений этих разрывов, так как они дают наиболее важную информацию о фронте ударной волны и интенсивности главной части переносимого волной импульса в каждой точке ее фронта. При постановке и решении таких

задач в теории упругости применяются методы геометрической оптики, в частности нулевое приближение лучевого метода, дающее удовлетворительное количественное описание широкого круга волновых явлений различной физической природы [3, 6–8]. Использование лучевого метода позволяет выделить функцию оптического пути волны (эйконал) и с помощью уравнения эйконала построить систему лучей и фронтов ударной волны. Такая задача сравнительно легко решается для изотропных упругих сред, однако и в этом случае возникают затруднения при исследовании взаимодействия волны с некоторой поверхностью раздела сред с различными механическими свойствами (линзы и др.), в результате которого образуются каустики, обусловленные фокусировкой энергии и неограниченным возрастанием интенсивности поля.

Однако исследование фокусировки ударных волн упругими анизотропными “линзами” и “зеркалами” более трудоемко, поскольку в этих случаях полевая функция является векторной; физическая картина значительно усложняется, так как для каждого направления имеется три вида волн с различной поляризацией; фазовые скорости волн зависят от направления их распространения; лучи в общем случае неортогональны поверхности волнового фронта, а лучевые скорости отличаются от фазовых скоростей и между их направлениями не всегда имеется однозначное соответствие. Принципиально усложняется также дифракция волны на поверхностях раздела сред, поскольку соответствующие соотношения Снеллиуса становятся существенно нелинейными из-за того, что фазовые скорости распространения отраженных и преломленных волн заранее неизвестны. Поэтому для определения направлений лучей, идущих от граничных поверхностей, необходимо решать системы нелинейных уравнений. Неединственность решений этих систем является еще одной причиной появления каустик при падении регулярной ударной волны даже на поверхность раздела сред малой кривизны (в отличие от однородных изотропных сред) и может приводить к значительно большему разнообразию процессов дифракции.

В работах [3, 8] изложена методика исследования дифракции ударных волн на границах раздела изотропных упругих сред, в [7] рассмотрено взаимодействие ударной волны с плоской границей раздела анизотропных сред. Ниже изучены особенности трансформирования волн на криволинейных поверхностях раздела анизотропных сред.

Обычно задачи о взаимодействии падающей волны с границей раздела анизотропных сред решаются путем построения кривых векторов рефракции [2, 6] (графическим методом). В данной работе для этих целей используется метод продолжения решений по параметру [9], позволяющий наиболее просто идентифицировать бифуркационные состояния.

Постановка задачи. Движение частиц упругой среды в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) определяется системой дифференциальных уравнений

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq}/\rho$; $c_{ik,pq}$ — параметры упругости; ρ — плотность; u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора упругих смещений; t — время.

В связи с тем, что в анизотропных средах лучи в общем случае неортогональны поверхностям волновых фронтов, будем различать векторы фазовой (\mathbf{v}) и лучевой ($\boldsymbol{\xi}$) скоростей, считая, что фронт является поверхностью постоянной фазы: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt = \text{const}$, каждая элементарная площадка которой движется в направлении единичной нормали \mathbf{n} к ней со скоростью v . Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор точки фронта.

Векторы поляризации \mathbf{A} волны и ее фазовой скорости \mathbf{v} для выбранного направления \mathbf{n} можно построить как собственные числа и векторы матрицы коэффициентов однородной

системы алгебраических уравнений [2, 6]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Из условия существования нетривиальных решений этой системы следует уравнение третьей степени относительно квадрата фазовой скорости v^2

$$\left| \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0,$$

с помощью которого для каждого направления нормали \mathbf{n} можно определить и расположить в порядке убывания три скорости различно поляризованных волн: $v_1^2(\mathbf{n}) > v_2^2(\mathbf{n}) \geq v_3^2(\mathbf{n}) > 0$.

Полагая значение величины v^2 в системе (2) равным одному из найденных значений $v_r^2(\mathbf{n})$ ($r = 1, 2, 3$), получаем системы уравнений для определения компонент векторов поляризации $\mathbf{A}^{(r)}$ трех волн, движущихся в рассматриваемом направлении \mathbf{n} со своими фазовыми скоростями $\mathbf{v}_r(\mathbf{n})$:

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q^{(r)} - v_r^2 A_i^{(r)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Для всех \mathbf{n} векторы поляризации подчинены условиям ортогональности $\mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{A}^{(k)}(\mathbf{n}) = \delta_{ik}$ ($i, k = 1, 2, 3$).

Поверхность фронта ударной волны определяется соотношением

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (3)$$

в котором функция τ должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка [2]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (4)$$

обобщающему уравнение эйконала в геометрической оптике для упругих анизотропных волн.

Входящие в (4) величины p_k ($k = 1, 2, 3$) представляют собой компоненты вектора рефракции $p_k \equiv \partial\tau/\partial x_k = n_k/v_r(\mathbf{n})$ ($k = 1, 2, 3$).

Для построения волнового фронта (3) ударной волны в однородной анизотропной среде ($\rho = \text{const}$) необходимо найти решения уравнения (4), которое с использованием метода характеристик приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad \frac{dp_k}{d\tau} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Первая группа этих уравнений описывает распространение волны вдоль луча с лучевой скоростью $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{(r)}(\mathbf{n}, x_k)$. Из второй группы уравнений следует прямолинейность лучей в однородной среде.

Система лучей и фронтов, построенная с помощью уравнений (5), позволяет определить интенсивности волны в окрестности фронта. Для этого удобно воспользоваться разложением решения (1) вдоль луча в ряд

$$u_q = \sum_{m=0}^{\infty} u_q^{(m)}(x_1, x_2, x_3) f_m[t - \tau(x_1, x_2, x_3)] \quad (q = 1, 2, 3), \quad (6)$$

где предполагается, что функции f_m , удовлетворяющие соотношениям $f'_m(y) = f_{m-1}(y)$, имеют разрывы непрерывности в производных, например порядка $n + 2$ [2].

Для исследования поведения ударной волны в малой окрестности фронта достаточно удерживать в разложении (6) только один член $m = 0$ и вычислять вектор интенсивности волнового поля $U^{(0)}$ из однородной системы уравнений

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p U_q^{(0)} - U_i^{(0)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

решение которой в лучевой системе координат (τ, α, β) представляется в виде [2]

$$U_q^{(0)} = c_0(\alpha, \beta) A_q^{(r)}(\tau, \alpha, \beta) f_0[t - \tau(x_1, x_2, x_3)] / \sqrt{J(\tau, \alpha, \beta)} \quad (q = 1, 2, 3),$$

где $J = \partial(x_1, x_2, x_3) / \partial(\tau, \alpha, \beta)$ — функциональный определитель преобразования лучевых координат в декартовы.

Приведенные соотношения позволяют построить семейство прямолинейных лучей и последовательности фронта ударной волны в однородной анизотропной среде, а также вычислить значения разрыва полевых функций на поверхности фронта при ее эволюции.

Методика решения. Рассмотрим две трансверсально-изотропные среды, оси симметрии упругих параметров которых совпадают с осью Ox_2 декартовой системы координат. В силу свойств симметрии компоненты $c_{ik,pq}$ тензора упругих постоянных каждой среды удобно представлять в форме квадратной (6×6) матрицы $C_{\alpha\beta}$, соответствие элементов которой устанавливается по схеме

$$\begin{aligned} (11) \leftrightarrow 1, \quad (22) \leftrightarrow 2, \quad (33) \leftrightarrow 3, \quad (23) = (32) \leftrightarrow 4, \\ (31) = (13) \leftrightarrow 5, \quad (12) = (21) \leftrightarrow 6. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку упругие свойства трансверсально-изотропной среды характеризуются пятью неприводимыми параметрами, матрицу $C_{\alpha\beta}$ можно представить в виде [9]

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu - p & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda - l & \lambda - l & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - m \end{pmatrix},$$

где λ, μ — параметры Ламе; l, m, p — параметры, характеризующие свойства трансверсально-изотропной среды.

Главные диагональные миноры матрицы (7) удовлетворяют условиям

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad |c_{\alpha\beta}| > 0,$$

обеспечивающим положительную определенность соответствующих квадратичных форм.

Пусть в одной из рассматриваемых сред (в среде I) возбуждена плоская квазипродольная ударная волна, вектор поляризации которой направлен вдоль оси Ox_2 (в силу условий симметрии волна является чисто продольной). Изучим дифракцию такой волны при ее взаимодействии с криволинейной осесимметричной границей G раздела двух сред, ось симметрии которой также совпадает с осью Ox_2 . Сформулированная задача является осесимметричной, поэтому достаточно рассмотреть явления перестройки и формирования следов ударных волн на одной из плоскостей, например на плоскости $x_3 = 0$, которая

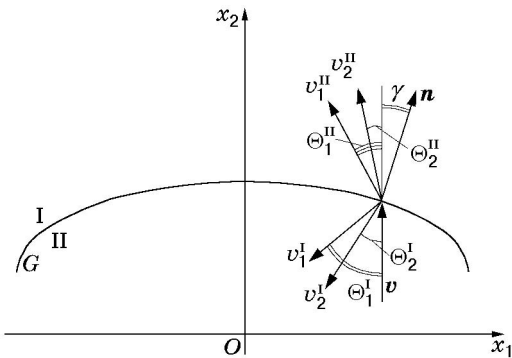


Рис. 1. Ориентация векторов фазовых скоростей фронтов ударных волн

содержит ось симметрии. Примем “локально-плоское приближение” [2], в соответствии с которым в месте падения волны на элементарную площадку, разделяющую поверхности G в плоскости падения $x_3 = 0$, все отраженные и преломленные волны будут принадлежать этой плоскости, т. е. третьи компоненты всех векторов поляризации равны нулю. Это позволяет ввести в рассмотрение углы Θ_ν^I и Θ_μ^{II} ($\mu, \nu = 1, 2$) для отраженных и преломленных волн, отходящих от границы G , и использовать обобщенный закон Снеллиуса, выражаемый равенствами [2, 6]

$$(1/v) \sin \gamma = \sin(\Theta_\nu^I + \gamma)/v_\nu(\Theta_\nu^I) = \sin(\Theta_\mu^{II} - \gamma)/v_\mu(\Theta_\mu^{II}) \quad (\nu, \mu = 1, 2), \quad (8)$$

где γ — угол между направлением оси Ox_2 и нормалью к границе G в точке падения луча; Θ_ν^I , Θ_μ^{II} ($\nu, \mu = 1, 2$) — углы между направлением волновой нормали и осью Ox_2 отраженных в среду I и проникших в среду II волн соответственно (рис. 1). Индексы $\nu = \mu = 1$ соответствуют квазипродольным волнам qP , $\nu = \mu = 2$ — квазипоперечным волнам qS , знаки “–” и “+” в нижнем индексе — параметрам волн до и после перестройки на поверхности G , верхние индексы I и II — параметрам отраженных и преломленных волн. После взаимодействия фронта P_- волны с осесимметричной поверхностью G лучи отраженных qP_+^I , qS_+^I и преломленных qP_+^{II} , qS_+^{II} волн оказываются наклоненными к оси Ox_2 под определенными углами, так как начинают оказывать влияние свойства трансверсальной изотропии сред I и II, проявляющиеся в нарушении продольной ориентации векторов поляризации ударных волн qP_+^I и qP_+^{II} .

Отличие соотношений (8) от соотношений закона Снеллиуса для изотропных сред обусловлено зависимостью v_ν , v_μ от соответствующих углов Θ_ν^I , Θ_μ^{II} и неявной зависимостью от угла γ . Углы Θ_ν^I , Θ_μ^{II} ($\nu, \mu = 1, 2$) отражения и преломления луча в некоторой точке границы G определяются решением нелинейной системы уравнений (8) методом Ньютона совместно с методом продолжения решения по параметру [9]. В качестве параметра удобно выбрать угол γ . Например, для первого уравнения в (8) при некотором известном состоянии $\gamma = \gamma^i$, $(\Theta_\nu^I)^i$ малому приращению параметра $\Delta\gamma^i$ соответствуют приращения направляющих углов фазовых скоростей отраженных волн

$$(\Delta\Theta_\nu^I)^i = \frac{v_\nu^i(\Theta_\nu^I) \cos \gamma^i - v \cos(\Theta_\nu^I + \gamma)^i}{v \cos(\Theta_\nu^I + \gamma)^i - \partial v_\nu^i(\Theta_\nu^I)/\partial \Theta_\nu \sin \gamma^i} \Delta\gamma^i + \delta^i, \quad (9)$$

где $\delta^i = v \sin(\Theta_\nu^I + \gamma)^i - v_\nu^i(\Theta_\nu^I) \sin \gamma^i$ — невязки на данном шаге построения решения.

Реализация вычислений по схеме (9) возможна при наличии некоторого начального состояния γ^0 , v^0 , $(\Theta_\nu + \gamma)^0$, $v_\nu^0(\Theta_\nu)$. В случае осесимметричной границы раздела сред удобно выбрать $\gamma^0 = 0$, т. е. построение семейства падающих, отраженных и преломленных лучей начать с луча, ориентированного вдоль оси Ox_2 . Формула (9) позволяет находить единственное приращение $\Delta\Theta_\nu^I$ для угла падения γ^i , при котором знаменатель в правой

части (9) отличен от нуля. Поэтому равенства

$$v \cos (\Theta_{\nu}^I + \gamma)^i - \frac{\partial v_{\nu}^i(\Theta_{\nu}^I)}{\partial \Theta_{\nu}^I} \sin \gamma^i = 0 \quad (\nu = 1, 2) \quad (10)$$

представляют собой условия бифуркации решений. Для продолжения решения через это состояние следует в (9) добавить члены второго (а в случае необходимости третьего и т. д.) порядка [10].

Условие (10) возможной неединственности решений системы (8) соответствует сходимости (касанию) и пересечению отраженных и преломленных лучей после взаимодействия падающих лучей с границей раздела G , а множество таких критических ситуаций обусловлено образованием огибающей семейства лучей — каустики. В данном случае каустики могут приводить к формированию геометрических особенностей на поверхностях отраженных и преломленных волновых фронтов в результате взаимодействия регулярного падающего волнового фронта даже с плоской границей G раздела анизотропных сред.

Поскольку особенности волнового фронта порождаются на каустиках, то на них происходит и его фокусировка, сопровождаемая неограниченным возрастанием интенсивности поля в местах, где имеются геометрические особенности.

Численная реализация и анализ результатов. С помощью разработанного алгоритма решена задача о дифракции на параболической границе раздела G двух трансверсально-изотропных упругих сред фронта плоской продольной ударной волны, порожденной в среде I и поляризованной вдоль оси симметрии упругих свойств обеих сред, совпадающей с осью вращения поверхности G .

Так как задача осесимметричная, то после взаимодействия падающего фронта с поверхностью G интенсивность преломленных и отраженных квазипоперечных волн, поляризованных ортогонально плоскости, содержащей ось симметрии, равна нулю. Поэтому плоский падающий фронт на поверхности раздела G будет порождать только по два вида осесимметричных отраженных и преломленных волн, поляризованных в плоскости осевого сечения.

Значения механических констант принимались близкими к значениям констант, характеризующих свойства доломита для первой среды ($\lambda_1 = 4,971 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu_1 = 3,912 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho_1 = 2,650 \cdot 10^3$ кг/м³) и песчаника для второй ($\lambda_2 = 3,413 \cdot 10^9$ Па, $\mu_2 = 1,361 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho_2 = 2,760 \cdot 10^3$ кг/м³). Величины l , m , p , нарушающие свойства изотропии, варьировались, расчеты проводились для различных комбинаций их значений. Форма границы раздела двух трансверсально-изотропных упругих сред принята параболической. Эта граница пересекается с осевой плоскостью по кривой $x_1 = 5 - 0,055x_2^2$. На рис. 2 показана фокусировка плоской ударной волны вогнутой границей раздела сред, характеризуемых параметрами анизотропии $l_i = 0,1\lambda_i$, $m_i = 0,2\mu_i$, $p_i = 0,1(\lambda_i + 2\mu_i)$ ($i = 1, 2$). Здесь представлена система лучей падающей продольной волны P_- (линии 1), а также отраженной qP_+^I в среду I (линии 2) и преломленной qP_+^{II} в среду II (линии 3) квазипродольных волн (квазипоперечные волны qS_+^I и qS_+^{II} , имеющие место при такой дифракции, менее интенсивны и на рис. 2 не приводятся). На рис. 2 показаны также осесимметричные фронты падающей продольной, а также отраженной и преломленной квазипродольных ударных волн на плоскости, содержащей ось симметрии рассматриваемой системы. В местах сгущения лучей интенсивность напряжений оказывается повышенной. Очевидно, в рамках принятой модели интенсивность волнового поля в местах фокусировки отраженных и преломленных лучей неограниченно возрастает. Наличие зон фокусировки на оси симметрии задачи для отраженных и преломленных лучей, а также фокусное расстояние определяются геометрией поверхности G , разделяющей среды, и соотношением упругих характеристик сред. Здесь термин “фокусное расстояние” используется условно, поскольку точная фокусировка лучей в общем случае отсутствует.

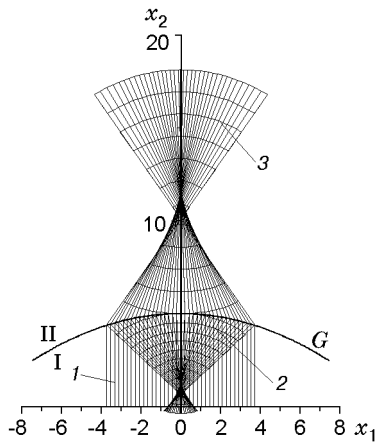


Рис. 2

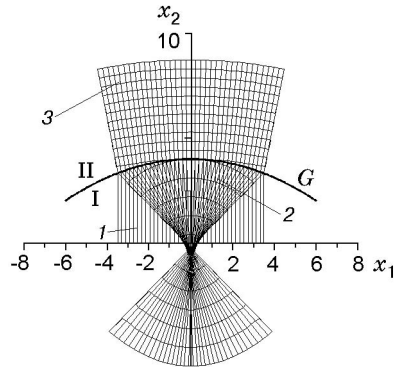


Рис. 3

Рис. 2. Фокусировка отраженной и преломленной квазипродольных ударных волн:

1 — P_- ; 2 — qP_+^I ; 3 — qP_+^{II}

Рис. 3. Фокусировка отраженной квазипродольной ударной волны (обозначения те же, что на рис. 2)

При падении плоской ударной волны из менее “оптически плотной” среды (песчаника) на вогнутую поверхность раздела той же геометрии, отделяющую ее от более “оптически плотной” среды (доломита), преломленные лучи квазипродольной волны qP_+^{II} рассеиваются, а отраженные лучи квазипродольной волны qP_+^I фокусируются. Эта особенность показана на рис. 3 для упругих сред с указанными выше параметрами.

Интенсивности ударных волн, вызванных взаимодействием плоской ударной волны единичной интенсивности с вогнутой параболической границей раздела G трансверсально-изотропных упругих сред (все параметры сред соответствуют случаю, показанному на рис. 2), представлены на рис. 4 в виде эпюр на соответствующих фронтах, зафиксированных в один момент времени. Видно, что падение плоской волны P_- (линии 1) инициирует отраженные квазипродольную qP_+^I (линии 2) и квазипоперечную qS_+^I (линии 3), а также преломленные квазипродольную qP_+^{II} (линии 4) и квазипоперечную qS_+^{II} (линии 5) волны, имеющие криволинейные осесимметричные поверхности фронтов с неравномерным распределением интенсивностей. При этом фронты квазипоперечных волн всегда отстают от фронтов квазипродольных, и на них эпюры интенсивности волн приобретают кососимметричную форму. В местах фокусировки лучей, а также на каустиках интенсивности волнового поля могут значительно превышать интенсивность падающей волны.

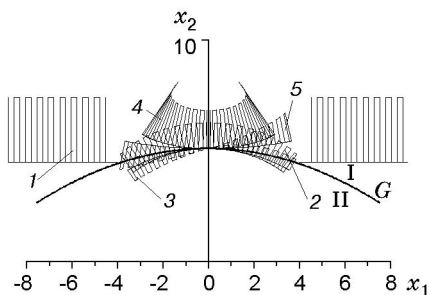


Рис. 4. Эпюры распределения скоростей смещения на фронтах отраженных и преломленных квазипродольных и квазипоперечных ударных волн:

1 — P_- ; 2 — qP_+^I ; 3 — qS_+^I ; 4 — qP_+^{II} ; 5 — qS_+^{II}

Процесс отражения-преломления претерпевает качественное изменение при падении плоской ударной волны на выпуклую параболическую поверхность раздела упругих трансверсально-изотропных сред I и II. В отличие от фокусировки и рассеивания лучей на вогнутой поверхности в случае выпуклой границы сред происходят соответственно рассеивание и фокусировка. Также следует отметить, что для выпуклых границ лучи отраженных квазипродольных волн qP_+^I оказываются всегда расходящимися.

Заключение. Рассмотрена задача о распространении ударных волн в трансверсально-изотропных упругих средах. Наиболее сложные трансформации этих волн происходят на границах раздела упругих сред, обладающих различными механическими свойствами, где одна падающая волна порождает две тройки (для осесимметричных задач две пары) различным образом поляризованных отраженных и преломленных волн. Разрывной характер функций, описывающих эти волны, и большой показатель их изменчивости по времени и пространству усложняют их описание как аналитически (в классе специальных функций), так и численными методами.

С использованием аналогии с геометрической оптикой, нулевого приближения лучевого метода и подхода, основанного на применении метода продолжения решения по параметру и алгоритма Ньютона, решена частная задача об определении перестройки фронта плоской ударной волны на параболической границе раздела двух различных трансверсально-изотропных сред. Исследованы особенности образования каустик и фокусировки отраженных и преломленных лучей. Численно подтверждено резкое возрастание интенсивностей ударных волн в местах фокусировки лучей и образования каустик.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.** Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
2. **Петрашень Г. И.** Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1980.
3. **Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К.** Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. Киев: Наук. думка, 1988.
4. **Арнольд В. И.** Критические точки функций и классификация каустик // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, вып. 3. С. 243, 244.
5. **Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гуссейн-Заде С. М.** Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982.
6. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
7. **Гуляев В. И., Луговой П. З., Иванченко Г. М., Яковенко Е. В.** Взаимодействие фронтов ударных волн с плоскостью раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. механика. 1999. Т. 35, № 4. С. 30–36.
8. **Аникьев И. И., Гуляев В. И., Иванченко Г. М. и др.** Об эффекте квазиполного внутреннего отражения ударных волн на границах раздела упругих сред // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 1. С. 21–27.
9. **Гуляев В. И., Баженов В. А., Гоцуляк Е. А.** Устойчивость нелинейных механических систем. Львов: Вища шк., 1982.
10. **Вайнберг М. М., Треногин В. А.** Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.