

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТИ РАЗРУШЕНИЯ НА ФОРМИРОВАНИЕ ОТКОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА

Исследования откольных явлений при отражении ударной волны от свободной поверхности тела [1, 2] дают уникальные сведения о прочностных свойствах материалов в субмикросекундном диапазоне. Однако в этих условиях время разрушения сравнимо с длительностью действия нагрузки и следует говорить о сопротивлении разрушению как функции скорости деформирования и других параметров состояния. Поэтому существует необходимость получения данных о кинетике разрушения непосредственно из анализа экспериментальных данных. В неявном виде такую информацию содержат профили скорости движения поверхности испытуемого образца [3].

В данной работе проведен анализ волновых процессов в разрушаемой среде при отражении импульса сжатия от свободной поверхности. Цель работы — исследование возможности получения данных о скорости разрушения непосредственно из результатов измерений профилей скорости поверхности образца.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим в акустическом приближении эволюцию треугольного импульса сжатия после его отражения от свободной поверхности образца, разрушающегося при отрицательном давлении. Предположим, что разрушение начинается при достижении растягивающими напряжениями критического значения P_k и характеризуется величиной удельного объема пор v_n . Полный удельный объем среды равен сумме v_n и удельного объема сплошной компоненты v_c : $v = v_n + v_c$. Используем простейшую кинетику разрушения: скорость изменения v_n является степенной функцией v_n . Поскольку рассматривается начальная стадия разрушения, то закон схлопывания пор при положительном давлении не имеет значения. Система уравнений гидродинамики, замкнутая уравнениями кинетики и состояния, в переменных Лагранжа имеет вид

$$(1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial h} = 0,$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{(\rho v_n)^\alpha}{\rho \tau_\mu} = 0, \quad P = \rho^2 c^2 (1/\rho - v + v_n),$$

где t — время; h — лагранжева координата; u — массовая скорость; ρ и c — начальные плотность и скорость звука; τ_μ — характерное время релаксации процесса разрушения; $\alpha < 1$ — const. В уравнении состояния давление определяется по $v_c = v - v_n$.

На рис. 1 приведена картина течения в плоскости $t-h$. В области I отсутствует взаимодействие падающей волны с отраженной и зависимость массовой скорости и давления от координат и времени соответствует треугольному импульсу сжатия:

$$(2) \quad u(h, t) = u_0 - k(ct - h), \quad P(h, t) = \rho c u(h, t).$$

Здесь u_0 — максимальное значение массовой скорости; k — константа, характеризующая длительность импульса $2h_0$:

$$h_0 = -c\tau_0 - u_0/2k.$$

В области \mathcal{Z} происходит взаимодействие падающего и отраженного от свободной поверхности $h=0$ импульсов, что приводит к возникновению растягивающих напряжений. Их абсолютное значение не превышает критической величины, поэтому среда не разрушается и решение,

удовлетворяющее условию на свободной поверхности, имеет вид

$$(3) \quad u(h, t) = 2(u_0 - kct), \quad P(h, t) = 2\rho ckh.$$

При $h = h_k$, $t = \tau_k = -h_k/c$ давление достигает порога P_k , и в области 2 происходит разрушение материала. Течение здесь определяется в результате решения системы (1) с граничными условиями при $h = h_k$ и $h \rightarrow -\infty$ и начальными на C -характеристике, на которой рассматриваемые функции, за исключением v_n , терпят скачок. Необходимо отметить, что из-за релаксации напряжений при разрушении давление вдоль C -характеристики может оказаться (при определенных значениях τ_μ) выше P_k и область разрушения будет иметь более сложную по сравнению с приведенной на рис. 1 зонную структуру. Этот случай, соответствующий множественному отколу, подробно анализируется ниже. Сейчас же предполагаем, что после достижения порога разрушения в сечении h_k среда при меньших значениях h «разупрочняется».

Найдем решение в области 2. Для этого исключим из (1) v_n и v и проведем замену независимых переменных:

$$T = t + h/c, \quad x = h.$$

Зона разрушения отобразится на часть четвертого квадранта плоскости $T-x$: $T \geq 0$, $x \leq x_k$. Полученная система двух уравнений в частных производных после применения к ней преобразования Лапласа по T перейдет в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{d\hat{u}}{dx} + \frac{s}{c}\hat{u} + s\frac{\hat{P}}{\rho c^2} &= \frac{1}{\rho c^2}(P(x, 0) + \rho c u(x, 0)) + F(s), \\ \frac{d\hat{P}}{dx} + \frac{s}{c}\hat{P} + \rho s\hat{u} &= \frac{1}{c}(P(x, 0) + \rho c u(x, 0)), \end{aligned}$$

где s — переменная Лапласа; \hat{u} и \hat{P} — образы Лапласа массовой скорости и давления; $F(s)$ — образ Лапласа скорости разрушения ρv_n , зависимость которой от времени имеет вид (точкой обозначена частная производная по t или по T , так как они совпадают)

$$(5) \quad \dot{\rho v_n} = \frac{1}{\tau_\mu} \left(1 - \alpha\right) \frac{T}{\tau_\mu}^{\alpha/(1-\alpha)}.$$

В правую часть (4) перенесены начальные значения u и P при $T \rightarrow +0$, входящие в виде комбинации, являющейся J_+ -инвариантом Римана [4]. Поэтому нет необходимости определять отдельно u и P справа от скачка на C -характеристике: они будут найдены непосредственно из решения системы. Значение инварианта находится из условия непрерывности на скачке по его значению в области 1. Согласно (2), получаем

$$P(x, 0) + \rho c u(x, 0) = 2\rho c(u_0 + 2kx)\theta(x - x_0)$$

($\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда, $x_0 = h_0$).

Общее решение в области разрушения, не растущее экспоненциально при $x \rightarrow -\infty$, запишется в форме

$$(6) \quad \begin{aligned} \hat{P}(x, s) &= \frac{2k\rho c}{s} \left[x - x_0 - \frac{c}{2s} \left(1 - \exp \frac{-2s(x-x_0)}{c}\right) \right] \theta(x - x_0) - \\ &\quad - \frac{\rho c}{2} F(s) \left(x - \frac{c}{2s}\right) + b, \\ \hat{u}(x, s) &= \frac{2k}{s} \left[x - x_0 - \frac{c}{2s} \left(1 - \exp \frac{-2s(x-x_0)}{c}\right) \right] \theta(x - x_0) + \\ &\quad + \frac{\rho c}{2} F(s) \left(x + \frac{c}{2s}\right) - b \end{aligned}$$

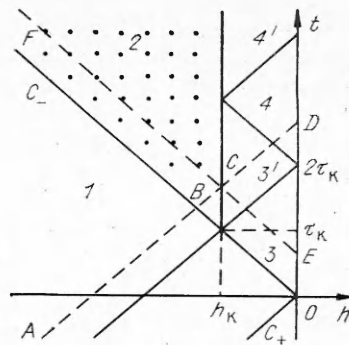


Рис. 1

(линейный рост \widehat{P} при $x \rightarrow -\infty$ обусловлен исключением из рассмотрения кинетики схлопывания пор при положительном давлении). Константа b находится из условия непрерывности J_- -инварианта Римана при $x = x_k$. В областях $3'$, $4'$ и т. д. (см. рис. 1) функциональная зависимость J_- от координат и времени различная и инвариант в каждой последующей области определяется лишь после нахождения решения в предыдущей. Найдем значение константы b в интервале $0 \leq T \leq 2\tau_k$. В области $\widehat{2}$, согласно (3), имеем

$$(7) \quad J_- = -2\rho c [u_0 - k(ct + h)] = -2\rho c(u_0 - kcT).$$

Поскольку J_- -инвариант сохраняется вдоль C_- -характеристик, то соотношение (7) дает его значение в области $3'$. Применяя к (7) преобразование Лапласа и приравнявая полученное выражение J_- -инварианту в области разрушения, следующему из (6) при $x = x_k$, найдем

$$(8) \quad b = \frac{k\rho c}{s} \left(2x_0 + \frac{c}{s} \right) + \frac{\rho c}{2} F(s) x_k.$$

Уравнения (6) и (8) дают решение в области разрушения при $0 < T \leq 2\tau_k$ в образах Лапласа. Некоторые результаты можно получить непосредственно из (6), не переходя к оригиналам. Например, используя известное свойство преобразования Лапласа [5] $\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = G(0)$,

найдем значение давления справа от скачка вдоль C_- -характеристики при $h > h_0$:

$$(9) \quad P = 2\rho ckh - \frac{\rho c}{2} (h - h_k) L$$

($L = 0$ при $0 < \alpha < 1$ и $L = 1/\tau_k$ при $\alpha = 0$), т. е. если начальная скорость разрушения равна нулю, то давление непосредственно за скачком изменяется так же, как и в отсутствие разрушения, и, в частности, при $h \leq h_k$ после достижения P_k оно продолжает уменьшаться. Поэтому область разрушения в данном случае не ограничена при $h \rightarrow -\infty$ и множественный откол невозможен. При $\alpha = 0$ ситуация иная: после начала разрушения в точке h_k , τ_k давление вдоль C_- -характеристики продолжает уменьшаться, если $\tau_k > 1/4k$, и начинает расти, если $\tau_k < 1/4k$. При $\tau_k = 1/4k$ давление остается постоянным и равно P_k . Таким образом, сделанное выше предположение о «разупрочнении» материала существенно при малых вязкостях разрушения, когда $\tau_k < 1/4k$.

Найдем скорость свободной поверхности при $2\tau_k \leq t \leq 4\tau_k$. Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что J_+ -инвариант сохраняется вдоль C_+ -характеристик. Его значение на свободной поверхности равно $\rho c u(0, t)$, а при $h = h_k$ из полученного решения в области разрушения находим

$$\frac{\widehat{J}_+(x_k, s)}{\rho c} = \frac{4k}{s} (x_k - x_0) - \frac{2kc}{s^2} \left(1 - \exp \frac{-2s(x_k - x_0)}{c} \right) + \frac{c}{2c} F(s).$$

Используя известные формулы обращения и свойства преобразования Лапласа [5, 6], для скорости свободной поверхности при $2\tau_k \leq t \leq 4\tau_k$ имеем

$$(10) \quad \frac{u(0, t)}{2u_0} = 1 - \frac{t}{2\tau_0} + \frac{c}{4u_0} \left[(1 - \alpha) \frac{t - 2\tau_k}{\tau_k} \right]^{1/(1-\alpha)}.$$

Анализ решения.

1. $\alpha = 0$, $F(s) = 1/(s\tau_k)$. Этот случай соответствует постоянной скорости разрушения, и полученное решение имеет наиболее простой вид.

На рис. 2 приведены построенные по формуле (10) профили скорости при различных τ_k . Видно, что, как и для давления, существует критическое значение характерного времени разрушения, равное $1/4k$ (линия 2 на рис. 1), при котором скорость свободной поверхности после

выхода на нее информации о начале разрушения остается постоянной: $u(0, t) = u_c = 2u_0 - 4kc\tau_k$. При $\tau_k < 1/4k$ (линия 1) разрушение проявляется в виде откольного импульса на профиле $u(0, t)$, при $\tau_k > 1/4k$ (линия 3) после начала разрушения продолжается спад скорости. Полученный результат удобно представить в следующей формулировке, введя скорость разрушения $\dot{v}_n = 1/\rho\tau_k$ и скорость расширения удельного объема $\dot{v} = k/\rho$ в разгрузочной части падающего импульса: откольный импульс на профиле скорости свободной поверхности формируется только в том случае, когда начальная скорость разрушения более чем в 4 раза превышает скорость расширения удельного объема в разгрузочной части падающего импульса; причем крутизна фронта откольного импульса однозначно определяется скоростью разрушения:

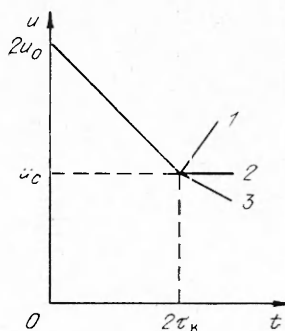


Рис. 2

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u(0, t)}{2u_0} \right) = \frac{1}{8\tau_k} \left(\frac{\dot{v}_n}{\dot{v}} - 4 \right) \text{ при } t > 2\tau_k.$$

Рассмотрим также изменение состояния вещества вдоль характеристик в координатах $P-u$. Решение в области разрушения, вытекающее из (6) после применения обратного преобразования, имеет вид

$$P(h, t) = 2\rho ck h + \rho c^2 (t - h/c - 2\tau_k)/4\tau_k, \\ u(h, t) = 2(u_0 - kct) + c(t + 3h/c + 2\tau_k)/4\tau_k.$$

Отсюда получаем связь между P и u вдоль C_+ -характеристики на отрезке BC (см. рис. 1):

$$(11) \quad P - P_+ = \frac{\rho c}{1/(2k\tau_k) - 1} (u - u_+)$$

(P_+ и u_+ — значения давления и массовой скорости в точке пересечения C_+ -характеристики с прямой $h = h_n$ (в точке C на рис. 1)). В областях 3', 4 вдоль этой характеристики

$$(12) \quad P - P_+ = -\rho c (u - u_+).$$

Из (11) видно, что траектории изменения состояния вдоль характеристик в координатах P, u отклоняются от определяемых инвариантами Римана прямых в сторону увеличения массовой скорости; причем процесс разрушения влияет не только на величину, но и на знак наклона траекторий, смена которого происходит при скорости разрушения, вдвое меньшей ($\tau_k = 1/2k$) той, что необходима для возникновения минимума на профиле скорости свободной поверхности.

На рис. 3 показан характер изменения состояния в частицах вдоль C_+ -характеристики $ABCD$ (см. рис. 1) при $\tau_k = 1/4k$. Стрелками указано направление движения. Начальные состояния лежат на прямой ON . После встречи с головной характеристикой волны разрежения состояние скачком переходит из A в B и в области разрушения меняется вдоль BC . В неразрушенной части образца на участке CD связь между P и u дается соотношением (12). Причем при заданном значении τ_k , когда на профиле скорости свободной поверхности впервые появляется минимум (т. е. $u(0, t) = \text{const}$ при $t > 2\tau_k$), происходит слияние траекторий изменения состояний в плоскости $P-u$ на участке CD вдоль всех C_+ -характеристик, пересекающих область разрушения, т. е. зависимость (12) является для них общей. Этот факт отмечался в [7].

На рис. 1, 3 показаны также C_- -характеристика ECF и соответствующая ей траектория изменения состояния. В области разрушения, на участке CF , давление остается постоянным. В общем же случае на C_-

Отсюда следует, в частности, что представление экспериментальных данных в координатах $\sigma^* - \dot{v}$ [3] несет полезную информацию о кинетике разрушения. Впервые растягивающие напряжения достигают $-\sigma^*$ в сечении $h^* = -\sigma^*/(2k\rho c) < h_{cr}$, т. е. толщина откольной пластины, определяемая по минимуму на профиле скорости свободной поверхности, превышает в данном случае истинное значение h_{cr} .

Найдем скорость разрушения при $h = h_{cr}$ в момент времени t , отвечающий t_m : $t = t_m - \tau_{cr}$. Подставляя это значение t в (5), получим $\dot{v}_m = 4k/\rho = 4\dot{v}$, т. е., как и при постоянной скорости разрушения, минимум на профиле скорости свободной поверхности, а следовательно, и начало формирования откольного импульса наблюдаются, когда скорость разрушения в плоскости откола равна учетверенной скорости расширения удельного объема в разгрузочной части падающего импульса.

Множественный откол. Рассмотрим теперь разрушение образца при $\alpha = 0$, не предполагая, что область разрушения не ограничена при $h \rightarrow -\infty$. Пусть после начала разрушения в точке h_{cr} порог начала разрушения при $h < h_{cr}$ снижается до εP_{cr} ($\varepsilon < 1$). Тогда при $\tau_{cr} < 1/4k$ структура течения в плоскости $t - h$ имеет вид, представленный на рис. 5. Левая граница области разрушения 2 ($h = h_1$) определяется из условия равенства давления εP_{cr} .

Общее решение в образах Лапласа по-прежнему определяется решением системы (4). Две константы в данном случае находим из условия непрерывности J_+ -инварианта при $h = h_1$ и J_- -инварианта при $h = h_{cr}$. Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем некоторые конечные результаты. Так, изменение давления справа от скачка вдоль C_- -характеристики при $h_1 < h < h_{cr}$ по-прежнему описывается соотношением (9), из которого, в частности, следует, что $h_1 = -h_{cr}(1 - 4k\tau_{cr}\varepsilon)/(1 - 4k\tau_{cr})$. При $\tau_{cr} \rightarrow 0$ размер области разрушения стремится к нулю ($h_1 \rightarrow h_{cr}$), как и должно быть при мгновенном отколе. Во втором предельном случае ($\tau_{cr} \rightarrow 1/4k$) область разрушения неограниченно возрастает, т. е. переходим к решению, рассмотренному выше. Скорость движения свободной поверхности имеет вид

$$(14) \quad \frac{u(t, \dot{v})}{2u_0} = 1 - \frac{t}{2\tau_0} + \frac{c}{4u_0\tau_{cr}}(t - 2\tau_{cr}) - \frac{c}{4u_0\tau_{cr}}(t - 2\tau_1)\theta(t - 2\tau_1),$$

где $\tau_1 = -h_1/c$.

На рис. 6 приведен характерный профиль скорости свободной поверхности, построенный по формуле (14). При $t < 2\tau_1$ решение (14) совпадает с (10), т. е. учет того обстоятельства, что зона разрушения конечна, не влияет на формирование фронта откольного импульса. При $t > 2\tau_1$ скорость начинает уменьшаться, причем с тем же градиентом, что и в исходном падающем импульсе в интервале $0 < t < 2\tau_{cr}$ (предполагается выполнение неравенства $\tau_1 < 2\tau_{cr}$, которое справедливо при $4k\tau_{cr} < 1/(2 - \varepsilon)$). В точке $2\tau_1$ откольный импульс достигает максимума $(u^m/(2u_0) - 1 - \varepsilon\tau_{cr}/\tau_0)$, который не зависит от скорости разрушения. Это является недостатком рассматриваемой модели, в которой, в частности, не введен критерий разрушения. Второй минимум на профиле скорости, отнесенный к $2u_0$ и соответствующий времени $4\tau_{cr}$, равен $1 - (\tau_{cr}/\tau_0)(1 + (\varepsilon - 4k\tau_{cr})/(1 - 4k\tau_{cr}))$, т. е. лежит ниже или выше первого минимума u_c в зависимости от знака $\varepsilon - 4k\tau_{cr}$.

Аналогичным образом можно получить решение при $h < h_1$ (рис. 5). В интервале $h'_{cr} < h < h_1$ образец не разрушается и решение находится методом характеристик. Из него, в частности, следует, что давление за скачком, справа от C_- -характеристики, возрастает по абсолютной величине с уменьшением h по закону

$$P = 2k\rho ch + \frac{\hat{c}c}{2\tau_{cr}}(h_{cr} - h_1),$$

достигая порога начала разрушения P_{cr} в точке h'_{cr} , причем толщина неразрушенной части образца $h_1 - h'_{cr} = -(1 - \varepsilon)h_{cr}$. Вторая зона разру-

шения занимает область $h'_1 < h < h'_k$. Зависимость давления от h непосредственно за скачком дается в этом случае соотношением

$$P = 2k\rho ch + \frac{\rho c}{2\tau_\mu} (h_k - h_1 + h'_k - h),$$

из которого вытекает, что размеры первой и второй зон разрушения совпадают: $h'_k - h'_1 = h_k - h_1$.

Приведенные результаты показывают, что конечность зоны разрушения существенно влияет на форму откольного импульса в целом, не отражаясь на формировании фронта. Напомним также, что, как отмечалось выше, при нулевой начальной скорости разрушения ($\alpha > 0$) область разрушения всегда бесконечна и множественный откол вообще невозможен, если не ввести критерий разрушения.

Таким образом, в рамках акустики получено аналитическое выражение для скорости свободной поверхности при постоянной и нулевой начальных скоростях разрушения материала. Найдено критическое значение скорости разрушения, при которой начинается формирование откольного импульса. Предложен способ определения начальной скорости роста удельного объема пор по крутизне фронта откольного импульса, не связанный с конкретной моделью разрушения. Показано, что откольная прочность, определяемая по спаду скорости движения свободной поверхности, в общем случае зависит от скорости расширения удельного объема в разгрузочной части падающего импульса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков С. А., Дивнов И. И., Иванов А. Г. Исследование разрушения стали, алюминия и меди при взрывном нагружении // Физ. металлов и металловедение.— 1964.— Т. 25, № 4.
2. Канель Г. И., Разоренов С. В. Ударно-волновое нагружение металлов. Движение поверхности образца.— Черноголовка, 1989.— (Препр./ОИХФ АН СССР).
3. Канель Г. И., Фортов В. Е. Механическое свойство конденсированных сред при интенсивных импульсных воздействиях // Усп. механики.— 1987.— Т. 19, № 3.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1973.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.
6. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.— М.: Наука, 1979.
7. Канель Г. И., Черных Л. Г. О процессе откольного разрушения // ПМТФ.— 1980.— № 6.

г. Черноголовка

Поступила 29/VI 1992 г.

УДК 539.375

М. А. Леган

О ВЗАИМОСВЯЗИ ГРАДИЕНТНЫХ КРИТЕРИЕВ ЛОКАЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ В ЗОНЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ С ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКОЙ РАЗРУШЕНИЯ

Вопросы, связанные с хрупким разрушением материала в зонах концентрации напряжений, неоднократно привлекали внимание исследователей. Дело в том, что применение в этом случае классических критериев прочности, как правило, дает заниженные значения расчетных предельных нагрузок по сравнению с экспериментальными данными для образцов с концентраторами, особенно если образцы изготовлены из

© М. А. Леган, 1993