

увеличения вклада конвективных членов в уравнения движения, что и обуславливает завышенные значения коэффициента теплообмена.

Автор выражает благодарность В. Е. Накорякову за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила 30 VI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Накоряков В. Е., Бурдуков А. П., Болдарев А. М., Терлеев П. Н. Тепло- и массообмен в звуковом поле. Новосибирск: изд. ИТФ СО АН СССР, 1970.
2. Галицкий Б. М., Рыжов Ю. А., Якуш Е. В. Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. М.: Машиностроение, 1977.
3. Галиуллин Р. Г., Репин В. В., Халитов Н. Х. Течение вязкой жидкости и теплообмен тел в звуковом поле. Казань: изд. Казанск. ун-та, 1978.
4. Andres J. M., Ingard U. Acoustic streaming at low Reynolds numbers. — J. Acoust. Soc. Amer., 1953, vol. 25, N 5.
5. Калашников Н. В., Черников В. И. Виброподогрев вязких нефтепродуктов. М.: Гостехиздат, 1961.
6. Бузник В. М., Везломцев К. А. Некоторые результаты обобщения экспериментальных данных по интенсификации процессов конвективного теплообмена. — Изв. высш. учеб. заведений. Энергетика, 1959, № 8.
7. Аксельруд Г. А., Фиклисов И. Н., Троцкий В. И. Массообмен между твердыми частицами и пульсирующим потоком жидкости. — ИФЖ, 1978, т. 34, № 5.

УДК 532.72

ВЛИЯНИЕ ТЕРМОДИФфуЗИИ НА СВОБОДНУЮ КОНВЕКЦИЮ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ПОЛОСТИ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ

М. И. Кислухин, А. Ю. Пинягин, А. Ф. Пшеничников
(Пермь)

Известно, что явление термодиффузии может существенно влиять на конвективную устойчивость бинарной смеси, состоящей из нереагирующих компонентов [1]. Изучению конвективной устойчивости равновесия жидкой бинарной смеси в плоском горизонтальном слое посвящены работы [2—9], в [3—7] получена петля гистерезиса в задаче Бенара для двухкомпонентной жидкости, в [3—5] проведено также экспериментальное исследование этой задачи. Влияние термодиффузии на конвективную устойчивость равновесия и конвективный тепло-массоперенос в вертикальной щели изучено в [1, 10, 11]. В [12] теоретически и экспериментально изучается влияние термодиффузии на теплопередачу через пограничный слой. Исследование свободной конвекции жидкой бинарной смеси в наклонной прямоугольной полости выполнено в работе [13].

В данной работе численно исследуется свободная конвекция бинарной смеси в квадратном горизонтальном цилиндре с учетом термодиффузии. Рассматривается подогрев сбоку. Считается, что термодиффузия является единственной причиной возникновения неоднородности концентрации. Исследование проведено для газовых смесей и водных растворов солей. Показано, что при слабой конвекции нормальная термодиффузия может привести к усилению скорости конвективного движения более чем в 2 раза, а аномальная — к ослаблению. При числах Рэлея порядка 10^3 отмечено появление вертикальной составляющей градиента концентрации в центре полости. В случае аномальной термодиффузии максимальное значение функции тока оказывается неоднозначной функцией числа Рэлея (наблюдается гистерезис). При числах Рэлея больше 10^4 влиянием термодиффузии на конвективное движение можно пренебречь.

Рассмотрим квадратный бесконечный горизонтальный цилиндр высотой a , заполненный жидкой бинарной смесью. Боковые границы непроницаемы и имеют различные температуры T_1 и T_2 . Верхняя и нижняя

границы также непроницаемы для вещества и имеют линейное распределение температуры. Если в полости отсутствует конвекция, то возникающее в результате эффекта Соре концентрационное поле близко к линейному [14, 15]. Максимальные перепады концентрации очень малы [11], поэтому будем пренебрегать потоком энергии, вызванным неоднородностью смеси. Коэффициент Соре считается постоянным. Система безразмерных уравнений, описывающих плоское движение, имеет вид [1, 16]

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \Delta \varphi + \text{Gr} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial C}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Sc}} (\Delta T + \Delta C), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T, \quad \Delta \psi &= -\varphi, \end{aligned}$$

где ψ — функция тока; φ — вихрь скорости; T — температура; C — концентрация тяжелого компонента; $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; $\text{Sc} = \nu/D$ — число Шмидта; $\text{Gr} = g\beta_1(T_2 - T_1)a^3/\nu^2$ — число Грасгофа; $\varepsilon = \alpha\beta_2/\beta_1$ — безразмерный термодиффузионный параметр; β_1, ν, χ, D — коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости, температуропроводности и диффузии соответственно; $\alpha = k_0/T_0$ — коэффициент термодиффузии; k_0 — термодиффузионное отношение; T_0 — средняя по объему полости температура; $\beta_2 = (1/\rho)(\partial\rho/\partial T)$; ρ — плотность смеси.

Для приведения уравнений к безразмерному виду в качестве масштабов выбраны следующие величины: масштаб длины — a , времени — a^2/ν , функции тока — ν , температуры — $(T_2 - T_1)$, концентрации — $\alpha(T_2 - T_1)$.

Если все границы твердые и непроницаемые для вещества, то граничные условия имеют вид

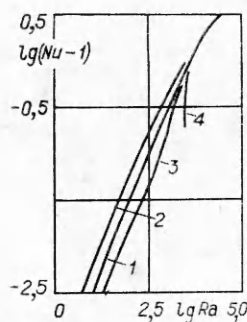
$$(2) \quad \begin{aligned} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial x} &= 0, \quad \begin{cases} T = 0 & \text{при } x = 0, \\ T = 1 & \text{при } x = 1, \end{cases} \\ \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial y} &= 0, \quad T = x \quad \text{при } y = 0, y = 1. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (1) с граничными условиями (2) находилось численными методами. Использовалась явная конечно-разностная схема [17—21]. В области $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ вводилась равномерная сетка

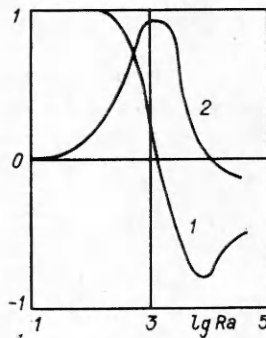
$$\begin{aligned} x_i &= ih_1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M, \quad h_1 = 1/M, \\ y_k &= kh_2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad h_2 = 1/K \end{aligned}$$

и дискретный шаг по времени $\tau = h^2(4 + \omega\psi_0)$, где h — наименьший шаг по координате; ω — параметр, определяемый экспериментально из условия устойчивости схемы; ψ_0 — максимальное значение функции тока на каждом шаге по времени. Большая часть вычислений проводилась при $M = 15, K = 15$ и $\omega = 1, 2$. Пространственные производные заменялись центральными разностями. При составлении граничных условий для вихря скорости применялись формулы Тома [20]. Решение уравнений Пуассона для функции тока проводилось методом последовательной нижней релаксации. Контроль точности вычислений осуществлялся путем сопоставления решений на различных сетках. Некоторые вычисления проведены дополнительно на сетках 11×11 и 17×17 .

В качестве начальных условий задавалось линейное поле температуры $T_{ik} = ih_1$ и нулевое поле функции тока $\psi_{ik} = 0$. Для концентрации использовались два начальных условия: либо линейное поле $C_{ik} = 1 - ih_1$, либо однородное поле $C_{ik} = 0,5$. В некоторых случаях полученное



Ф и г. 1



Ф и г. 2

в процессе вычислений стационарное состояние использовалось в качестве начального для определения нового стационарного состояния, соответствующего другим значениям параметров, например более высокому числу Рэлея. Выход на стационарное движение происходил обычно через режим затухающих колебаний. Время установления стационарного решения определяется начальным

состоянием и безразмерными параметрами: для параметров, соответствующих газовым смесям, это время составляло 0,2—1,0 единиц.

В качестве характеристики интенсивности конвективного движения используется максимальное значение функции тока, а для характеристики интенсивности теплопередачи через полость — число Нуссельта Nu , т. е. безразмерный тепловой поток:

$$Nu = \int_r \frac{\partial T}{\partial n_i} dl.$$

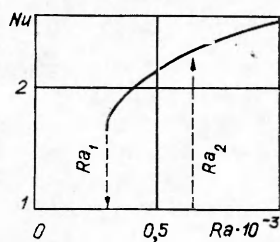
Здесь $\partial T / \partial n$ — нормальная составляющая градиента температуры на границе полости, а интегрирование ведется по участку границы, на котором плотность теплового потока имеет один и тот же знак. При отсутствии конвекции $Nu = 1,0$.

Влияние термодиффузии на конвективное движение наиболее подробно исследовано для газовых смесей $Pr = 1$, $Sc = 1-2$. Численные эксперименты проведены для чисел Рэлея $10 \leq Ra \leq 10^5$ ($Ra = GrPr$). В области $Ra \leq 10^3$ наблюдается линейная зависимость максимального значения функции тока ψ_0 и чисел Нуссельта Nu от параметра $\mu = (1 + \epsilon) Ra$:

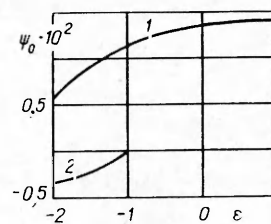
$$\psi_0 = A\mu, \quad Nu = 1 + B\mu.$$

Постоянные $A = 1,32 \cdot 10^{-3}$ и $B = 3,02 \cdot 10^{-4}$ оказываются такими же, как и в случае однокомпонентной жидкости, исследовавшейся ранее в работах [19, 21]. Таким образом, в указанной выше области чисел Рэлея интенсивность конвективного движения оказывается в $(1 + \epsilon)$ раз выше, чем в случае однокомпонентной жидкости. Структура течений, полученных при различных Ra , ϵ , но при одном и том же значении μ , одинакова.

Зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея при $Pr = 1$, $Sc = 1$ изображена на фиг. 1 ($\epsilon = 0; 1; -0,5$ и -1 — кривые 1—4 соответственно), откуда видно, что при увеличении числа Рэлея в области $Ra \geq 10^3$ влияние термодиффузионного параметра ϵ на интенсивность теплопередачи уменьшается и при $Ra \geq 10^4$ термодиффузия не влияет на теплопередачу. Температурное поле при этом имеет такой же вид, как и в случае однокомпонентной жидкости. Зависимость максимального значения функции тока ψ_0 от числа Рэлея выглядит аналогично. При $Ra \leq 10^2$ распределение температуры и концентрации в полости почти не отличается от линейного. В области $Ra \geq 10^2$ появляются заметные искажения концентрационного поля. На фиг. 2 показана зависимость вертикальной и горизонтальной составляющих градиента концентрации ($\partial C / \partial y$ и $\partial C / \partial x$ — кривые 2, 1 соответственно) в центре полости от числа Рэлея при $Pr = 1$, $Sc = 1$, $\epsilon = 0,3$. Градиент концентрации в центре полости, имевшей вначале горизонтальное направление, начинает поворачиваться в результате



Ф и г. 3



Ф и г. 4

увеличения вертикальной составляющей и уменьшения горизонтальной. При $Ra \sim 10^3$ градиент концентрации в центре полости почти вертикален. Он продолжает поворачиваться в том же направлении по мере дальнейшего увеличения числа Рэлея и может иметь направление, противоположное первоначальному.

Описанный эффект является следствием тесного взаимодействия конвективного движения, обычной и термической диффузии. Он напоминает возникновение вертикального перепада температур и температурное расслоение при конвекции однокомпонентной жидкости в замкнутой области, изученное ранее [22–24], но отличается от последнего более сложным механизмом возникновения. В отличие от концентрационного расслоения в сплавах жидких металлов, возникающего при изогradientной кристаллизации [25], рассматриваемый эффект невозможен при отсутствии термодиффузии. Напомним, что термодиффузия считается в данной работе единственной причиной появления концентрационных градиентов.

Особый интерес представляет случай аномальной термодиффузии при $\varepsilon \approx -1$. Безразмерный термодиффузионный параметр ε определяет отношение архимедовых сил, вызванных возмущением концентрации, к архимедовым силам, вызванным возмущением температуры. Отрицательный знак параметра ε показывает, что эти силы направлены в противоположные стороны. В связи с этим оказывается возможным существование механического равновесия при $\varepsilon = -1,0$. Известное условие механического равновесия бинарной смеси [1] $(\beta_1 \nabla T + \beta_2 \nabla C) \cdot \gamma$ выполняется в этом случае автоматически, так как $\beta_1 \nabla T + \beta_2 \nabla C = 0$. Градиент плотности, определяемый температурными и концентрационными полями, равен нулю. Направление градиента температуры может быть произвольным. В частности, механическое равновесие в бинарной смеси возможно при подогреве сбоку. В однокомпонентной жидкости, как известно, механическое равновесие возможно только при строго вертикальном градиенте температуры [1]. При подогреве сбоку бинарная смесь с $\varepsilon = -1,0$ может находиться в состоянии равновесия до тех пор, пока диффузия тепла и массы будет успевать сглаживать флуктуации плотности. При интенсивном подогреве механическое равновесие становится неустойчивым.

На фиг. 3 приведена зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея для газовых смесей с $Pr = 1$, $Sc = 1$, $\varepsilon = -1,0$. При $Ra < Ra_1$ механическое равновесие устойчиво по отношению как к малым, так и к конечно-амплитудным возмущениям. (Устойчивость равновесия проверялась путем ввода в центр полости вихря скорости с амплитудой, соответствующей развитому конвективному движению.) При достижении чисел Рэлея $Ra \geq Ra_2 \approx 7500$ равновесие становится неустойчивым относительно малых возмущений, и скачком возникает конвекция конечной амплитуды. Уменьшение числа Рэлея приводит к уменьшению теплообмена. При $Ra_1 \approx 2700$ теплообмен резко уменьшается до нуля. Таким образом, имеет место гистерезис, связанный с возможностью возбуждения стационарного конвективного движения в подкритической области ($Ra_1 < Ra < Ra_2$) путем ввода конечно-амплитудных возмущений. Численные экс-

перименты, проведенные для газовых смесей с $Sc = 2$, $\epsilon = -1,0$, дали аналогичные результаты. Заметим, что в подогреваемом снизу плоском горизонтальном слое бинарной смеси зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея также обнаруживает петлю гистерезиса [3—7].

Термодиффузионная конвекция исследовалась также на примере водных растворов солей с $Pr = 5$, $Sc = 500$. Большие значения Pr и Sc , характерные для жидкостей, приводят к значительному увеличению машинного времени, необходимого для получения стационарного решения. Поэтому для экономии машинного времени проводилось изменение масштаба времени при решении уравнений теплопроводности и диффузии. Контрольные эксперименты показали, что изменение масштаба времени позволяет быстро получить стационарное решение и не влияет на конечные результаты. Однако при изучении устойчивости движения этот метод приводит к существенным искажениям результатов. По этой причине устойчивость полученных решений не изучалась.

В случае аномальной термодиффузии в жидких смесях также возможно существование двух стационарных решений, отличающихся интенсивностью и направлением конвективного движения и полями концентрации. В качестве примера на фиг. 4 показана зависимость амплитудного значения функции тока от безразмерного термодиффузионного параметра ϵ ($Gr = 10$). При таком числе Грасгофа интенсивность движения настолько мала, что температурное поле остается практически не искаженным. Кривая 1 соответствует конвективному движению с обычным направлением циркуляции. Жидкость поднимается у нагретой стенки и опускается у холодной. Интенсивность этого движения уменьшается с уменьшением ϵ . Градиент концентрации в центральной части полости уменьшается на порядок. Кривая 2 соответствует движению с противоположным направлением циркуляции. Жидкость поднимается у холодной стенки и опускается у горячей. Градиент концентрации в центральной части полости поворачивается на некоторый угол (до $40-60^\circ$). Величина градиента концентрации меняется незначительно. Существование такого движения было обнаружено, по крайней мере, при $\epsilon \leq -1$.

Как для положительных, так и для отрицательных значений термодиффузионного параметра ϵ конвективное движение имело структуру, аналогичную структуре движения однокомпонентной жидкости при соответствующих числах Рэлея. Так как в данной работе исследования проводились в области $Ra < 10^5$, то двухвихревые движения, обнаруженные ранее [19], не наблюдались. Максимальное значение функции тока всегда находилось в центре полости. Существенного влияния термодиффузии на структуру движения не обнаружено.

Поступила 17 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
2. Hurle D. T. G., Jakeman E. Significance of the Soret effect in the Rayleigh — Jeffreys problem. — Phys. Fluids, 1969, vol. 12, N 12, pt 1.
3. Hurle D. T. J., Jakeman E. Soret-driven thermosolutal convection. — J. Fluid Mech., 1971, vol. 47, N 4.
4. Caldwell D. R. Non-linear effects in a Rayleigh Benard experiment. — J. Fluid Mech., 1970, vol. 42, N 1.
5. Caldwell D. R. Thermosolutal convection in a solution with large negative Soret coefficient. — J. Fluid Mech., 1976, vol. 74, N 1.
6. Platten J. K., Chavapeyer G. An hysteresis loop in the two component Benard problem. — Int. J. Heat and Mass Transfer, 1975, vol. 18, N 9.
7. Platten J. K., Chavapeyer G. Nonlinear two dimensional Benard convection with Soret effect free boundaries. — Int. J. Heat and Mass Transfer, 1977, vol. 20, N 2.
8. Schechter R. S., Prigogine J., Hamm J. R. Thermal diffusion and convective stability. — Phys. Fluids, 1972, vol. 15, N 3.

9. Chock David P., Li Chin-Hsin. Direct integration method applied to Soret-driven instability.— *Phys. Fluids*, 1975, vol. 18, N 11.
10. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О конвективной неустойчивости двухкомпонентной смеси в поле тяжести.— *ПММ*, 1963, т. 27, № 2.
11. Рабинович Г. Д. Термодиффузионное разделение жидких смесей. Минск: Наука и техника, 1971.
12. Baron Indson R. Thermodynamic coupling in boundary layers.— *ARS Journal*, 1962, vol. 32, N 7.
13. Пинягин А. Ю., Пшеничников А. Ф. Свободная конвекция жидкой бинарной смеси в наклонной прямоугольной полости.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1979, № 4.
14. Замалеев З. Х., Нарбеков А. И. Распределение концентрации в горизонтальном слое смеси, подверженной действию температурного градиента. Тепло- и массообмен в химической технологии. Вып. 6. Казань, 1978.
15. Longworth L. G. The temperature dependence of the Soret coefficient of aqueous potassium chloride.— *J. Phys. Chem.*, 1957, vol. 61, N 11.
16. Шапошников И. Г. К теории конвективных явлений в бинарной смеси.— *ПММ*, 1953, т. 17, № 5.
17. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1966, № 6.
18. Полежаев В. И. Течение и теплообмен при естественной конвекции.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1968, № 5.
19. Тарунин Е. Л. Численное исследование свободной конвекции.— *Учен. зап. Пермского ун-та. Гидродинамика*, 1968, № 184, вып. 1.
20. Том А., Эйплт К. Числовые расчеты полей в физике и технике. М.: Энергия, 1964.
21. Тарунин Е. Л. Тепловая конвекция в прямоугольной полости, подогреваемой сбоку.— *Учен. зап. Пермского ун-та. Гидродинамика*, 1970, № 216, вып. 2.
22. Вальциферров Ю. В., Полежаев В. И. Конвективное тепловое и температурное расслоение в сфере, полностью заполненной жидкостью при заданном потоке тепла.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1975, № 5.
23. Полежаев В. И. Эффект максимума температурного расслоения и его приложение.— *ДАН СССР*, 1974, т. 218, № 4.
24. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1966, № 5.
25. Загородний П. Ф., Колесник В. И. и др. Концентрационная конвекция в затвердевающем расплаве.— *ПМТФ*, 1977, № 6.

УДК 669.18—412 : 620.18 : 536.421.4

МОДЕЛЬ НЕРАВНОВЕСНОЙ ДВУХФАЗНОЙ ЗОНЫ С УЧЕТОМ КОНВЕКЦИИ БИНАРНОГО РАСПЛАВА

А. Н. Черепанов
(Новосибирск)

В работах [1, 2] построены математические модели двухфазной дендритной зоны для случая неравновесной кристаллизации бинарного сплава. При этом изменением плотности сплава в процессе фазового превращения пренебрегалось и расплав считался неподвижным. Очевидно, что при росте кристалла в расплаве в результате усадочных явлений должен существовать поток жидкой фазы, направленный к кристаллу. В случае кристаллизации чистых металлов этот эффект исследован в работах [3, 4], где показано, что возникающие потоки расплава оказывают влияние на поля температуры и давления в жидкой фазе. В процессе неравновесной кристаллизации бинарного сплава эти потоки будут влиять также на распределение примеси в жидкой фазе, а следовательно, и на структуру диффузионного переохлаждения. Поскольку кинетика роста и морфология дендритов в двухфазной зоне определяются переохлаждением расплава, то это влияние будет сказываться на развитии двухфазной зоны в целом, а также на характере химической неоднородности и образовании пористости в слитке.

Ниже на основе феноменологических предпосылок формулируется математическая модель процессов тепло- и массопереноса в двухфазной зоне затвердевающего бинарного сплава с учетом кинетики роста дендритов и скачка плотности на поверхности раздела фаз.