ПМТФ, № 3, 1973

УДК 536.25 + 532.546

О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОСТИ В НАКЛОННОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

А. К. Колесников, Д. В. Любимов

(Пермь)

В работе исследуется устойчивость равновесия подогреваемой снизу жидкости, насыщающей плоский слой пористой среды, произвольно ориентированный относительно направления силы тяжести. Рассмотрены случаи теплопроводных и теплоизолированных границ слоя. В горизонтальном слое с теплопроводными границами равновесие нарушается возмущениями ячеистой структуры [1]. В вертикальном слое минимальный критический градиент температуры соответствует возмущениям плоскопараллельной структуры. Переход к ячеистым возмущениям в случае теплопроводных границ происходит при сколь угодно малом угле наклона слоя к вертикали. Для теплоизолированного слоя при всех углах кризис равновесия связан с плоскопараллельными возмущениями.

Плоский бесконечный слой пористой среды толщиной $2h$, ограниченный непроницаемыми для жидкости плоскостями, ориентирован под углом α к вертикали. Условия подогрева таковы, что возможно равновесие, при котором в слое создается постоянный вертикальный градиент температуры.

Уравнения тепловой конвекции в пористой среде имеют вид [2]

$$\rho_l\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\frac{1}{m}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla p+\rho_l g\beta T\boldsymbol{\gamma}-\rho_l\frac{\nu}{K}\mathbf{v}$$

$$(\rho c_p)_s\frac{\partial T}{\partial t}+(\rho c_p)_l\,\mathbf{v}\nabla T=\varkappa_s\Delta T \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0$$

где $\mathbf{v}$ — скорость фильтрации, p — конвективная добавка к давлению, T — температура, отсчитываемая от среднего значения, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, β — коэффициент объемного расширения жидкости, K — проницаемость, m — пористость, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, g — ускорение силы тяжести, $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор, направленный по вертикали вверх. Индексами l и s снабжены величины, относящиеся соответственно к жидкости и к пористой среде, насыщенной жидкостью.

В равновесии имеем

$$\mathbf{v}_0=0,\qquad \nabla T_0=-A\boldsymbol{\gamma},\qquad \nabla p_0=\rho_l g\beta T_0\boldsymbol{\gamma} \tag{2}$$

Здесь A — постоянный равновесный градиент температуры.

При достаточно больших A равновесие становится неустойчивым, малые возмущения нарастают со временем.

Оставляя для возмущений скорости, температуры и давления обозначения $\mathbf{v}$, T, p, учитывая (2) и линеаризуя, имеем

$$\rho_l\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla p+\rho_l g\beta T\boldsymbol{\gamma}-\rho_l\frac{\nu}{K}\mathbf{v}$$

$$(\rho c_p)_s\frac{\partial T}{\partial t}=\varkappa_s\Delta T+(\rho c_p)_l A(\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}) \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0$$

На границах слоя обращаются в нуль нормальная компонента скорости фильтрации (непроницаемые границы) и возмущения температуры для бесконечно теплопроводных границ либо возмущения теплового потока для теплоизолированных границ. Граничные условия для системы (3) имеют вид

$$v_x = 0, \quad T = 0 \ \text{или} \ \partial T / \partial x \quad \text{при} \ x = \pm h \tag{4}$$

Уравнения (3) имеют решения, пропорциональные $\exp(\lambda t)$ (нормальные возмущения). Аналогично тому, как это делается при рассмотрении конвекции в вязкой жидкости [3], можно показать, что при подогреве снизу ($A > 0$) декременты вещественны, возмущения меняются со временем монотонно. В изотермической системе ($A = 0$) декременты отрицательны (устойчивость). Граница устойчивости определяется из условия $\lambda = 0$, и нейтральные возмущения находятся из стационарных уравнений.

Перепишем уравнения в безразмерном виде, выбрав в качестве единиц расстояния, температуры, скорости и давления соответственно h, Ah,

$$(Kg\beta A\chi\nu^{-1})^{1/2}, \ (g\beta\rho_l{}^2 Ah^2\chi\nu K^{-1})^{1/2}, \ \text{где} \ \chi \equiv \varkappa_s / (\rho c_p)_l$$

Тогда

$$\begin{gathered} -\nabla p - \mathbf{v} + CT\boldsymbol{\gamma} = 0 \\ \Delta T + C(\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}) = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

Граничные условия

$$v_x = 0, \quad T = 0 \quad \text{или} \quad \partial T / \partial x = 0 \quad \text{при} \ x = \pm 1 \tag{6}$$

Здесь $C^2 \equiv R = Kg\beta Ah^2/\nu\chi$, R — аналог числа Рэлея.

Далее будут рассматриваться только плоские возмущения, для которых $v_y = 0$ и все величины не зависят от y. В этом случае удобно ввести функцию тока, определяемую соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{7}$$

Исключая из (5) давление, получим

$$\begin{gathered} \Delta\Psi + C\left(\sin\alpha \frac{\partial T}{\partial z} + \cos\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0 \\ \Delta T - C\left(\sin\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \cos\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Рассмотрим периодические вдоль оси z возмущения

$$\Psi = \varphi(x) \exp(ikz), \quad T = \theta(x) \exp(ikz)$$

Уравнения для амплитуд возмущений $\varphi(x)$ и $\theta(x)$ примут вид

$$\begin{gathered} \varphi'' - k^2\varphi + C(ik \sin\alpha\theta + \cos\alpha\theta') = 0 \\ \theta'' - k^2\theta - C(ik \sin\alpha\varphi + \cos\alpha\varphi') = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

Штрихом обозначено дифференцирование по x. Граничные условия к системе (9) записываются следующим образом:

$$\varphi = 0, \quad \theta = 0 \ \text{или} \ \theta' = 0 \quad \text{при} \ x = \pm 1 \tag{10}$$

Система (9) с граничными условиями (10) представляет собой задачу на собственные значения, определяющую для заданных угла наклона слоя

α и волнового числа возмущений k критическое значение C, по достижении которого равновесие становится неустойчивым относительно возмущений с данной длиной волны.

Общее решение системы (9) имеет вид

$$\varphi = \sum_{j=1}^{4} a_j \exp(iq_j x), \qquad \theta = \sum_{j=1}^{4} b_j \exp(iq_j x)$$
$$(b_1 = ia_1,\ b_2 = ia_2,\ b_3 = -ia_3,\ b_4 = -ia_4) \tag{11}$$

где q_j — корни характеристического уравнения

$$q_1 = -L + M, \quad q_2 = -L - M, \quad q_3 = L + N, \quad q_4 = L - N$$
$$L = {}^1/_2\, C \cos\alpha, \quad M = {}^1/_2\, (C^2 \cos^2\alpha - 4kC \sin\alpha - 4k^2)^{1/2}$$
$$N = {}^1/_2\, (C^2 \cos^2\alpha + 4kC \sin\alpha - 4k^2)^{1/2}$$

Используя граничные условия, получаем систему четырех линейных однородных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_j. Приравнивая нулю детерминант этой системы, получаем уравнение, связывающее C, k и α.

Рассмотрим сначала случай идеально теплопроводных границ. Можно получить в явном виде зависимость C от k и α

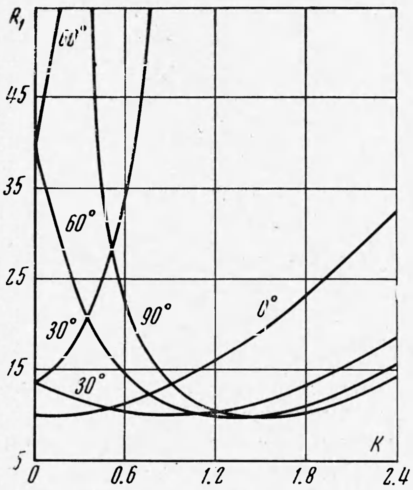
$$C = \pm (\cos\alpha)^{-2}\, [2k \sin\alpha \pm \pm (4k^2 + n^2\pi^2 \cos^2\alpha)^{1/2}] \tag{12}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Из формулы (12) следует, что минимальное критическое число Рэлея R_* не зависит от угла наклона слоя

$$R_* = \min (C^2) = n^2\pi^2$$

Ему соответствует волновое число

$$k_* = {}^1/_2\, n\pi \sin\alpha$$



Фиг. 1

Семейство нейтральных кривых $R_1(k)$ для различных углов α при $n = 1$ приведено на фиг. 1. Возмущения с $k = 0$ являются наиболее опасными лишь для вертикального слоя. Это заключение качественно отличается от результатов, полученных в задаче об устойчивости наклонного слоя вязкой жидкости, где переход к ячеистым возмущениям происходит при определенном критическом угле [4,5].

Можно также получить явное выражение для функции тока. Например, для основного уровня $n = 1$ будем иметь

$$\Psi = a \cos(\eta - Lx + kz) \cos {}^1/_2\, \pi x \tag{13}$$

где a и η — произвольные числа, соответствующие тому, что решение определяется с точностью до нормировки и трансляции. Из формулы (13) видно, что границы конвективных ячеек, на которых $\psi = 0$, представляют собой прямые линии. Их уравнения для наиболее опасных возмущений ($k = {}^1/_2\, \pi \sin\alpha$, $L = {}^1/_2\, \pi \cos\alpha$) имеют вид

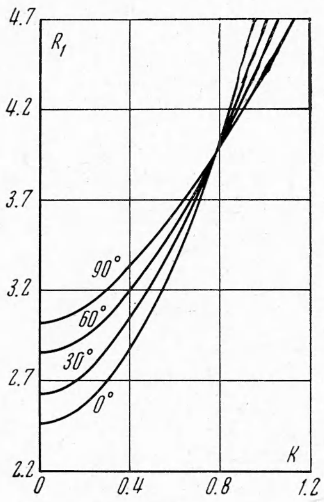
$$x \cos\alpha - z \sin\alpha = 2\eta/\pi + S \tag{14}$$
$$(S = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

т. е. ячейки отделены одна от другой прямыми вертикальными линиями, расстояние между которыми по горизонтали равно двум или одной толщине слоя. Меняя параметр η, можно смещать эту систему линий вправо — влево, что соответствует трансляции вдоль оси z. Период трансляции

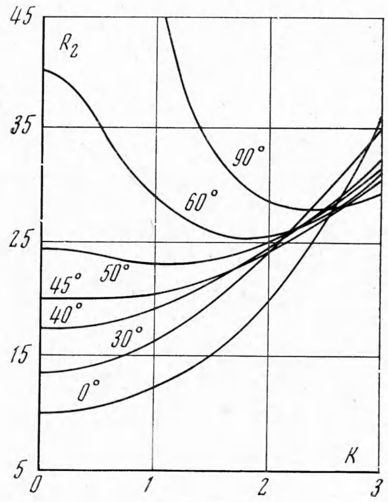
$$l = 2\Delta\eta/\pi \sin \alpha \tag{15}$$

где через $\Delta\eta$ обозначено изменение η.

В случае вертикального слоя произвольность η приводит к тому, что может иметь место решение с одной ячейкой, занимающей весь слой, или



Фиг. 2



Фиг. 3

с двумя ячейками. Граница между ними, параллельная стенкам слоя, может находиться на любом расстоянии от стенок. Таким образом, для вертикального слоя критическое число R двукратно вырождено.

Рассмотрим случай теплоизолированных границ. Накладывая на общее решение системы (9) соответствующие граничные условия, получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} \exp(iq_1) & \exp(iq_2) & \exp(iq_3) & \exp(iq_4) \\ \exp(-iq_1) & \exp(-iq_2) & \exp(-iq_3) & \exp(-iq_4) \\ -q_1\exp(iq_1) & -q_2\exp(iq_2) & q_3\exp(iq_3) & q_4\exp(iq_4) \\ -q_1\exp(-iq_1) & -q_2\exp(-iq_2) & q_3\exp(-iq_3) & q_4\exp(-iq_4) \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

Уравнение (16) определяет неявную функцию $C\ (k,\ \alpha)$. При малых волновых числах (длинноволновые возмущения) представим C в виде разложения в ряд по степеням k

$$C = C_0 + C_1k^2 + C_2k^4 + \ldots \tag{17}$$

Разложение должно содержать лишь четные степени волнового числа, так как из системы (9) видно, что C не зависит от знака k. Система уровней распадается на две группы: для одной («четные» уровни) $C_0 = n\pi/$ $/\cos\alpha$, для другой («нечетные» уровни) C_0 определяется из уравнения

$$\operatorname{tg}\,(C_0\cos\alpha)/C_0\cos\alpha = 1/\sin^2\alpha \tag{18}$$

Вычисления показывают, что для первого нечетного уровня (который является основным) $C_1 > 0$. (Выражение для C_1 громоздко и здесь не приводится.)

Таким образом, наиболее «опасными» являются возмущения с $k = 0$.

Для второго уровня (первый четный)

$$C_1 = (1 - 4 \sin^4 \alpha) / \pi \cos^3 \alpha \tag{19}$$

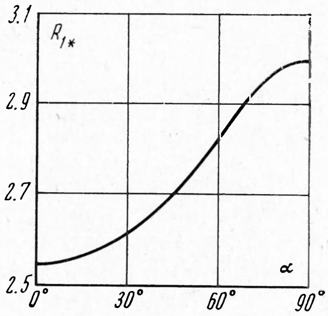
откуда следует, что $C_1 > 0$ при $\alpha < 45°$, а при $\alpha > 45°$ $C_1 < 0$ и к неустойчивости приводят возмущения с конечными k. В окрестности критического значения угла $\alpha_0 = 45°$ $C_1 = -4\pi^{-1} \cdot (\alpha - \alpha_0)$ и волновое число наиболее опасных возмущений зависит от α по закону

$$k_* = \sqrt{2 / \pi C_2}\, (\alpha - \alpha_0)^{1/2} \tag{20}$$

где C_2 берется при $\alpha = \alpha_0$.

Для исследования поведения нейтральных кривых при конечных k уравнение (16) решалось численно.

На фиг. 2 изображены нейтральные кривые $R_1(k)$ основного уровня неустойчивости для различных ориентаций слоя. При $k = 0$ они имеют минимум при всех α и с увеличением k монотонно возрастают. Нейтральные кривые второго уровня $R_2(k)$ представлены на фиг. 3. При $\alpha < 45°$ они имеют минимум, соответствующий $k = 0$. При $\alpha = 45°$ происходит смена формы неустойчивости и при дальнейшем увеличении угла наклона к кризису равновесия приводят ячеистые возмущения.



Фиг. 4

В отличие от случая теплопроводных границ значения минимальных критических чисел R_* зависят от ориентации слоя. Эта зависимость, довольно слабая для основного уровня (фиг. 4), на высших уровнях становится значительной. Число экстремумов на нейтральных кривых $R(k)$ для высших уровней увеличивается и зависит от ориентации слоя.

Авторы благодарят Г. З. Гершуни за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 22 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Lapwood E. R. Convection of a fluid in a porous medium. Proc. Cambr. Philos. Soc., 1948, vol. 44, No. 3, pp. 508—521.
2. Katto Y., Masuoka T. Criterion for the onset of convective flow in a fluid in a porous medium. Internat. J. Heat and Mass. Transfer, 1967, vol. 10, No. 3, pp. 297—309.
3. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. К теории релеевской неустойчивости. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О релеевской неустойчивости плоского слоя жидкости со свободными границами. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1968, № 184.