

УДК 532.54:51-72

DOI: 10.15372/PMTF202415501

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ПРОГНОЗ ПЛОСКОГО ВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ВИХРЕЙ РЭНКИНА

В. Н. Говорухин

Институт математики, механики и компьютерных наук
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru

Рассмотрена одна из возможных постановок обратной задачи идентификации вихревой структуры по значениям векторов скорости течения в наборе точек и предложен алгоритмический метод ее решения. Подход основан на представлении вихревой структуры в виде комбинации вихрей Рэнкина. При этом под идентификацией понимается определение количества модельных вихрей, их интенсивностей, центров и радиусов. Метод состоит в минимизации в пространстве параметров модельной системы целевого функционала, оценивающего близость известных и моделируемых векторов скорости. Алгоритм включает следующие этапы: поиск начального приближения для вихревой структуры, уточнение параметров модельных вихрей, коррекция полученной структуры. Для решения прямой задачи прогноза развития течения используется решение начально-краевой задачи для уравнений Эйлера динамики идеальной жидкости спектрально-вихревым методом. Приведены результаты тестовых расчетов с использованием предложенного подхода. Показано, что во всех рассмотренных тестах модельная система достаточно точно описывает топологию линий тока при идентификации, составлен прогноз на временах, соответствующих изменению топологии течений.

Ключевые слова: вихревые структуры, метод идентификации вихрей, вихрь Рэнкина, минимизация, идеальная жидкость, спектрально-вихревой метод

Введение. Знание структуры вихревых течений необходимо при решении таких проблем, как оптимизация характеристик летательных аппаратов, технологических установок, прогнозирование перемещений воздушных и морских масс, формирование застойных зон в трубах и каналах и др. Анализ конфигурации течения сводится к поиску вихревых пятен, которые являются своего рода каркасом потока. Задачи идентификации структуры течения являются особенно сложными, в случае если информация о течениях ограничена, вследствие чего актуально развитие методов и алгоритмов на основе ограниченных данных. Это приводит к необходимости решения обратных задач, когда имеется информация о поле скорости течения, а неизвестными являются структура потока и порождающие ее вихри.

Анализ вихревых течений должен выходить за рамки визуального контроля и основываться на количественных критериях и корректных алгоритмах автоматического обнаружения вихрей. При использовании таких подходов необходимы идентификация вихревой конфигурации, анализ ее структуры, отслеживание развития вихревого течения. На

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-21-00371).

© Говорухин В. Н., 2024

первом этапе определяются характеристики вихревой структуры в поле потока. В настоящее время наиболее известными методами идентификации вихрей являются Q -, λ_2 -, Δ - и λ_{ci} -критерии [1–4], а также использование космических снимков высокого разрешения в сочетании с экспертными оценками [5]. В последнее время для идентификации вихрей применяются также нейронные сети и методы машинного обучения [6, 7]. Еще одним подходом является использование топологических свойств потока во всей области течения или в ее подобластях [8–10]. В [11–14] проведен сравнительный анализ некоторых методов обнаружения вихрей. Для визуализации течений широко применяются различные методы идентификации структуры течения [15]. Для использования указанных методов необходима детальная информация о течениях, однако она не всегда доступна. На втором этапе детально изучаются структура поля скорости вихревой конфигурации, его особые точки, сепаратрисы и т. д., что позволяет применять методы теории динамических систем [16, 17]. Для прогноза развития вихревой конфигурации в пространстве и времени обычно используется численное решение нестационарных уравнений гидродинамики. Прямые методы решения этих задач хорошо развиты. В результате вычислений определяется динамика поля скорости и других характеристик течения, что позволяет анализировать и прогнозировать структуру потока во времени [18–21].

Одной из возможных постановок обратной задачи идентификации вихревых структур в случае ограниченной информации о течениях является восстановление их характеристик с помощью математических моделей. Известно, что даже сложные вихревые течения жидкости достаточно точно описываются такими математическими моделями, как системы точечных вихрей и уравнения Эйлера динамики несжимаемой идеальной жидкости. В работе [22] предложен метод идентификации, основанный на использовании малого набора известных векторов скорости течения и математической модели системы точечных вихрей на плоскости. В данном случае под идентификацией понимается вычисление координат точечных вихрей на плоскости и их интенсивностей. В работах [23, 24] этот подход был развит, в частности экспериментально исследована область применимости метода как для идентификации, так и для прогноза развития вихревой структуры. Алгоритм идентификации эффективно сходится в том случае, когда вихревая структура состоит из достаточно удаленных друг от друга вихрей при выборе опорных точек (с известным вектором скорости течения) в областях, где линии тока течения и модельной системы топологически эквивалентны. Однако установлено, что в ряде случаев метод неприменим. Во многом это определяется дефектами модельной системы точечных вихрей. Основными ее недостатками являются сингулярность модельного векторного поля в точечном вихре и, как следствие, большое значение скорости в его окрестности. Это противоречит параметрам течения в реальных плоских вихрях, в центре ядра которых скорость жидкости равна нулю, а в его окрестности мала. Также в [23, 24] показано, что получаемые результаты существенно зависят от исходной информации (количества и координат известных векторов), что естественно при решении обратных задач, а также от начального приближения для модельной системы.

Для того чтобы устранить указанные выше недостатки системы точечных вихрей, можно использовать модели вихревой динамики, адекватно описывающие поле скорости во всей области течения и динамические процессы. В данной работе для оценки положения и интенсивностей вихрей в структуре плоского течения на основе информации о векторах скорости течения в конечном наборе опорных точек используется приближение вихревой структуры с помощью распределенных в пространстве вихрей Рэнкина. Для прогноза развития вихревой структуры используются нестационарные уравнения Эйлера и их численное решение. Предложен алгоритм построения начального приближения для параметров модельной вихревой конфигурации на основе скользящего сканирования по пространству.

1. Идентификация и прогноз вихревого течения. В настоящее время общепринятое определение вихря отсутствует, поэтому задача идентификации вихревой структуры допускает различные формулировки и не является математически корректной. Одним из возможных подходов является описание плоского вихревого течения с использованием таких характеристик, как количество вихрей, координаты их центров, а также оценка размеров и интенсивности вихрей на основе доступной информации. Для поиска указанных параметров вихревой структуры можно использовать различные математические модели плоской вихревой динамики [25], т. е. применять обратные методы, в случае если известны характеристики течения, а неизвестными являются количество вихрей и их параметры. Одной из возможных постановок обратной задачи является восстановление характеристик течения по векторам его поля скорости [22–24]. Такая постановка рассматривается в данной работе. Заметим, что решение подобных задач не только существенно затруднено, но и может оказаться некорректным, при этом построенные решения могут быть не единственными [26, 27].

1.1. *Идентификация вихревой структуры по векторам скорости течения.* Пусть в некоторый момент времени t_0 известны векторы скорости вихревого течения в наборе, включающем N опорных точек, в некоторой области $D \in \mathbb{R}^2$:

$$U = \{\mathbf{u}^{(j)} = (u_1^{(j)}(x^{(j)}, y^{(j)}), u_2^{(j)}(x^{(j)}, y^{(j)})), \quad j = 1, \dots, N\}. \quad (1)$$

Здесь $(x^{(j)}, y^{(j)})$ — координаты опорных точек; $\mathbf{u}^{(j)}$ — вектор скорости течения в них. Требуется определить интенсивности, размеры и координаты центров вихрей, формирующих данное течение.

Для идентификации вихревой структуры (описания вихревой структуры в начальный момент времени $t = t_0$) по набору векторов (1) будем использовать конфигурацию, состоящую из K вихрей Рэнкина [28], представляющих собой круглые вихри радиусом A_i с постоянной завихренностью W_i внутри круга, вращающиеся как твердое тело с постоянной угловой скоростью. Вихрь Рэнкина — наиболее простая математическая модель вихря, являющаяся решением уравнений Эйлера и более приближенная к реальности, чем модель точечного вихря. В частности, это решение лишено основного недостатка точечных вихрей — не имеет сингулярностей поля скорости. Вихри Рэнкина широко используются при разработке численных методов решения задач вихревой динамики и при математическом моделировании [25, 29, 30]. Распределение завихренности $\Omega^{(i)}$ и функция тока $\Psi^{(i)}$ вихря Рэнкина с центром в точке $(x_i, y_i) \in D$ имеют вид

$$\Omega^{(i)}(x_i, y_i, W_i, A_i, x, y) = \begin{cases} 0, & r > A_i, \\ W_i, & r \leq A_i; \end{cases} \quad (2)$$

$$\Psi^{(i)}(x_i, y_i, W_i, A_i, x, y) = \begin{cases} -(W_i/2)A_i^2 \ln r, & r > A_i, \\ -(W_i/4)(r^2 - A_i^2(1 - 2 \ln(A_i))), & r \leq A_i; \end{cases} \quad (3)$$

$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

Компоненты вектора скорости, порождаемого вихрем Рэнкина в точке с координатами (x, y) , выражаются через функцию тока (3) стандартным образом:

$$\begin{aligned} v_1^{(i)}(x_i, y_i, W_i, A_i, x, y) &= -\frac{\partial \Psi^{(i)}(x_i, y_i, W_i, A_i, x, y)}{\partial y}, \\ v_2^{(i)}(x_i, y_i, W_i, A_i, x, y) &= \frac{\partial \Psi^{(i)}(x_i, y_i, W_i, A_i, x, y)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

В качестве модельного поля будем использовать поле скорости, определяемое конфигурацией вихрей Рэнкина с множеством параметров

$$P = \{K, (x_i, y_i, W_i, A_i, i = 1, \dots, K)\} \quad (5)$$

и распределением завихренности

$$\Omega_M(P) = \sum_{i=1}^K \Omega^{(i)}(x_i, y_i, W_i, A_i, x, y). \quad (6)$$

Компоненты вектора скорости

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(P, x, y) &= (v_1(P, x, y), v_2(P, x, y)) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^K v_1^{(i)}(x_i, y_i, W_i, A_i, x, y), \sum_{i=1}^K v_2^{(i)}(x_i, y_i, W_i, A_i, x, y) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

определяются выражениями (3), (4). Модельное поле скорости $\mathbf{v}(P, x, y)$ задано в любой точке области течения и определяется параметрами P .

Под идентификацией вихревой структуры будем понимать поиск набора параметров P^* , такого что поле скорости $\mathbf{v}(P^*, x, y)$ описывает исходный набор векторов U . Рассмотрим набор векторов поля (7) в опорных точках $(x^{(j)}, y^{(j)})$, $j = 1, \dots, N$, где известны векторы скорости (1) вихревой структуры

$$V(P) = \{\mathbf{v}^{(j)} = (v_1^{(j)} = v_1(P, x^{(j)}, y^{(j)}), v_2^{(j)} = v_2(P, x^{(j)}, y^{(j)})), j = 1, \dots, N\}. \quad (8)$$

Если $U \equiv V(P^*)$, то естественно предположить, что модельная конфигурация (6), (7) полностью описывает вихревое течение.

Для двух векторов проблемы сравнения не возникает: сравниваются величина угла между ними и их длины. На основе этих величин заданы различные оценочные величины, которые рассматривались во многих работах (см., например, [31]). При сравнении векторов \mathbf{u} , \mathbf{v} будем использовать величины

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|}, \quad \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right). \quad (9)$$

Здесь $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — длина векторов; $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — угол между ними. Обе величины принимают значения в интервале $[0, 1]$, равны нулю при $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ и единице при $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$.

Для сравнения двух наборов векторов U и $V(P)$ в множестве опорных точек $\{(x^{(j)}, y^{(j)}), j = 1, \dots, N\}$ будем использовать выражение

$$\sigma(U, V(P)) = \sum_{j=1}^N [c_j(\mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)}) d(\mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)}) + C_j(\mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)}) \phi(\mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)})], \quad (10)$$

где $c_j(\mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)})$, $C_j(\mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)})$ — весовые коэффициенты, которые в работах [23, 24] полагались положительными константами, причем $c_j = 1 - C_j$. В данной работе в качестве весовых коэффициентов используются положительные функции, учитывающие длины векторов $\mathbf{v}^{(j)}$. В результате численных экспериментов эмпирически обнаружено, что сходимость описанного ниже алгоритма улучшается при использовании функций

$$c_j(\mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)}) = \frac{3}{4} \left\| \frac{\mathbf{v}^{(j)}}{U_m} \right\|^{1,8}, \quad C_j(\mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)}) = \frac{1}{4} \left\| \frac{\mathbf{v}^{(j)}}{U_m} \right\|^{1,8}, \quad U_m = \max_{j=1, \dots, N} \|\mathbf{u}^{(j)}\|. \quad (11)$$

Такой выбор весовых коэффициентов позволяет увеличить вклад в оценку (10) векторов с большей длиной.

Если $U \equiv V(P)$, то очевидно, что $\sigma(U, V(P)) = 0$. В силу идеализации математической модели и ограниченности информации о течении совпадение наборов векторов (1) и (8) маловероятно. Будем считать, что чем меньше величина $\sigma(U, V(P))$, тем ближе два набора векторов U и $V(P)$ и тем более точно модельное поле скорости описывает вихревую конфигурацию. Иными словами, наборы векторов U и $V(P)$ близки в указанном смысле, если (10) достигает минимума в пространстве параметров системы P .

В итоге идентификация вихревой структуры в предложенной постановке сводится к поиску параметров конфигурации вихрей Рэнкина, минимизирующих (10):

$$P^* = \min_P \sigma(U, V(P)). \quad (12)$$

Для численного поиска минимума (12) в данной работе используется комбинированный алгоритм на основе методов Ньютона и градиентного спуска.

Если искомым набор параметров P^* найден, то структуру линий тока и векторы скорости течения можно построить с помощью (3) при $P = P^*$.

Предложенная постановка задачи идентификации вихревой структуры имеет недостатки, характерные для обратных задач математической физики. Она не является математически корректной, не всегда разрешима, решение может быть не единственным, результат может существенно зависеть от выбора и количества опорных точек, порождающих набор U , и т. д. Например, очевидно, что для течений со сложной структурой корректная идентификация при малых N невозможна. Анализ предложенного подхода затруднен, однако результаты работ [22–24] подтвердили эффективность использования метода для идентификации ряда течений с помощью систем точечных вихрей, имеющих существенные недостатки, отсутствующие у конфигурации вихрей Рэнкина.

1.2. Прогноз развития вихревой структуры. Если минимизирующий (10) набор параметров P^* найден, то возможны прогноз и анализ развития вихревой структуры. Для этого будем решать нестационарную начально-краевую задачу для уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости. В обозначениях завихренности $\omega(t, x, y)$ и функции тока $\psi(t, x, y)$ эта задача имеет вид

$$\omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0; \quad (13)$$

$$-(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = \omega. \quad (14)$$

Здесь t — время; x, y — координаты; нижний индекс означает производную по соответствующей переменной. Функция тока ψ связана с полем скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ равенствами $v_1 = -\psi_y$, $v_2 = \psi_x$, поэтому $\omega = \text{rot } \mathbf{v} = v_{2x} - v_{1y} = -\Delta\psi$. Систему уравнений (13), (14) можно рассматривать в различных областях при разных граничных условиях. В данной работе рассматривается квадратная область D , включающая все опорные точки (1). На границе D будем использовать условия непротекания $\psi_{\partial D} = 0$. В качестве начального условия следует задать распределение завихренности полученной конфигурации вихрей Рэнкина

$$\omega(0, x, y) = \Omega_M(P^*). \quad (15)$$

Задача решается на интервале $t \in [0, T]$, где T — время прогноза.

2. Алгоритмы метода. Предлагаемый метод идентификации и прогноза вихревого течения включает алгоритмы поиска значений параметров приближающей течение модельной вихревой структуры; построения начального приближения для алгоритма поиска значений параметров; решения начально-краевой задачи для уравнений динамики жидкости. Ниже приведено описание этапов алгоритма. Исходной информацией для метода является набор (1), т. е. координаты опорных точек $(x^{(j)}, y^{(j)})$ и векторы $\mathbf{u}^{(j)}$ поля скорости течения в них. Далее будем считать, что областью течения является прямоугольник $D = [0, a] \times [0, b]$, включающий все опорные точки и векторы (1).

2.1. *Алгоритм IDVS (identification of vortex system (идентификация системы вихрей)) минимизации величины $\sigma(U, V(P))$.* На данном этапе необходимо задать исходную информацию. В частности, требуется указать набор \tilde{U} опорных векторов вида (1), которым может быть весь набор (1) или его подмножество, а также задать начальное приближение параметров модельной конфигурации (6), (7): количество вихрей Рэнкина K и начальное приближение

$$P^{(0)} = \{K(x_i^{(0)}, y_i^{(0)}, W_i^{(0)}, A_i^{(0)}, i = 1, \dots, K)\} \quad (16)$$

для параметров модельного векторного поля (7). Кроме того, необходимо указать параметры метода безусловной минимизации: начальный шаг h и точность ϵ метода, размер шага δ для численного дифференцирования по параметрам модельной системы с помощью конечных разностей, число шагов метода градиентного спуска M , максимальное число шагов алгоритма M_{\max} , минимальный размер шага h_{\min} . В качестве набора опорных точек и векторов используется набор $\tilde{U} \subseteq U$, который может совпадать с (1).

Алгоритм $P^* = \text{IDVS}(\tilde{U}, P^{(0)}, h, \epsilon, \delta, M, M_{\max}, h_{\min})$ поиска параметров модельной системы (12) включает следующие шаги:

1. Шаг метода поиска минимума:

$$P^{(m+1)} = \begin{cases} P^{(m)} - h \nabla \sigma(\tilde{U}, V(P^{(m)})), & m \leq M, \\ P^{(m)} - h[\nabla^2 \sigma(\tilde{U}, V(P^{(m)}))]^{(-1)} \nabla \sigma(\tilde{U}, V(P^{(m)})), & m > M \end{cases}$$

($\nabla \sigma$, $\nabla^2 \sigma$ — градиент и матрица Гессе выражения (10) по параметрам модельной конфигурации P соответственно). Для вычисления производных используется аппроксимация центральными разностями.

2. Проверка условия

$$\|\nabla \sigma(\tilde{U}, V(P^{(m+1)}))\| < \epsilon. \quad (17)$$

Если условие (17) выполнено, то найдено приближение вихревой конфигурации $P^* = P^{(m+1)}$ и работа алгоритма прекращается. В противном случае выполняется переход к следующему шагу алгоритма.

3. Проверка условия $\|\nabla \sigma(\tilde{U}, V(P^{(m+1)}))\| < \|\nabla \sigma(\tilde{U}, V(P^{(m)}))\|$. При выполнении условия $h = 1,01h$, в противном случае $h = 0,5h$, $P^{(m+1)} = P^{(m)}$.

4. Проверка условий $m < M_{\max}$ и $h > h_{\min}$ при $m = m + 1$. При выполнении обоих условий осуществляется переход к п. 1 алгоритма, в противном случае — “аварийное” окончание работы.

Для достижения корректной сходимости алгоритма необходимо указать хорошее начальное приближение $P^{(0)}$. Ниже описан алгоритм его построения. Результатом применения алгоритма IDVS являются параметры P^* : $\{(x_j^*, y_j^*), W_j^*, A_j^*, j = 1, \dots, K\}$, минимизирующие величину (12), т. е. параметры модельного поля (7).

Приведем результаты применения алгоритма для исходной конфигурации, состоящей из трех вихрей Рэнкина:

$$\Omega^{(1)}(0,25, 0,35, 3, 0,2, x, y), \quad \Omega^{(2)}(1,2, 0,3, 2, 0,3, x, y), \quad \Omega^{(3)}(0,75, 1,2, 2,5, 0,5, x, y).$$

Для набора U использовались 100 опорных векторов в узлах равномерной сетки в прямоугольнике $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Начальные приближения: координаты $(x_i^{(0)}, y_i^{(0)})$ в D , интенсивности $W_i^{(0)} \in [-3, 3]$, радиусы вихрей $A_i^{(0)} \in [0,05, 0,20]$ задавались случайным образом. Проведено несколько сотен расчетов, в том числе для поиска вида функций (11). В 97 % случаев метод сходился к тестовой конфигурации. Одной из найденных численно

конфигураций является следующая: $x_1 = 0,2499$, $y_1 = 0,3500$, $W_1 = 2,9295$, $A_1 = 0,20234$; $x_2 = 1,1999$, $y_2 = 0,3000$, $W_2 = 1,9999$, $A_2 = 0,3000$; $x_3 = 0,7500$, $y_3 = 1,2000$, $W_3 = 2,4991$, $A_4 = 0,2500$. Таким образом, метод сошелся практически к значениям исходной конфигурации, а имеющаяся погрешность может быть обусловлена используемым набором U .

2.2. Алгоритм INITAP (*init approximation* (начальное приближение)) построения начального приближения для идентификации вихревой структуры. В работах [23, 24] алгоритм, описанный в подп. 2.1, применялся для поиска параметров системы точечных вихрей, которые использовались для построения модельного векторного поля. В результате исследования установлено, что сходимость метода существенно зависит от начального приближения и наличия априорной оценки количества вихрей в структуре. Кроме того, показано, что наилучшие результаты работы алгоритма получены при идентификации одного вихря, причем даже при малом числе опорных векторов набора (1). С учетом этого ниже предложен алгоритм построения начального приближения для идентификации вихревой структуры с использованием скользящего сканирования области течения D .

При построении применяется алгоритм IDVS (см. подп. 2.1) в прямоугольном сканирующем окне D_s для поиска в нем одного вихря ($K = 1$) с использованием опорных точек и векторов, расположенных в D_s . Последовательно используются несколько размеров сканирующих окон, которые перемещаются в D с некоторым шагом h_s . Найденные в результате сходимости вихри генерируют их распределение в D . На основе этого распределения определяются количество вихрей во всей области течения и их оценочные характеристики.

Алгоритм $P^{(0)} = \text{INITAP}(U, l_x, l_y, \{D_s^{(j)}, j = 1, \dots, k_s\}, h_s)$. Для построения начального приближения введем в D разбиение $S: \{S^{(j)}, j = 1, \dots, l_x \times l_y\}$ на прямоугольные ячейки размером $h_a = a/l_x$, $h_b = b/l_y$, где l_x, l_y — число ячеек по осям координат. Каждой ячейке $S^{(j)}$ с номером j поставим в соответствие счетчик попавших в нее вихрей $N_S^{(j)}$, их суммарные интенсивность $W_S^{(j)}$ и радиус $A_S^{(j)}$. Определим несколько размеров прямоугольных сканирующих окон $D_s^{(j)} = a_s^{(j)} \times b_s^{(j)}$, $j = 1, \dots, k_s$, $a_s^{(j)} < a/2$, $b_s^{(j)} < b/2$. Алгоритм INITAP включает задание параметров алгоритма IDVS. Далее для $D_s = D_s^{(j)}$, $j = 1, \dots, k_s$ выполняются следующие шаги:

1. Задание начального положения окна D_s в левом нижнем углу D и величин $\tilde{W}^{(0)} = w_s$, $\tilde{A}^{(0)} = A_s$, определяющих начальное приближение значений интенсивности и радиуса искомого вихря в D_s .

2. При $D_s \in D$ выполнение следующих операций:

а) $\tilde{P} = \text{IDVS}(\tilde{U}, \tilde{P}^{(0)}, h, \epsilon, \delta, M, M_{\max}, h_{\min})$. Здесь $\tilde{U}: \tilde{U} \in U$ и $\tilde{U} \in D_s^{(j)}$. Начальное приближение $\tilde{P}^{(0)}: \{K = 1, \tilde{x}^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}, \tilde{W}^{(0)}, \tilde{A}^{(0)}\}$, где $(\tilde{x}^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$ — координаты центра текущего окна D_s ;

б) если $\tilde{P} \neq \emptyset$ и $\tilde{P} \in D_s$, то $N_S^{(j)} = N_S^{(j)} + 1$, $W_S^{(j)} = W_S^{(j)} + \tilde{W}$, $A_S^{(j)} = A_S^{(j)} + \tilde{A}$. Здесь j — номер ячейки, содержащей найденный вихрь с координатами (\tilde{x}, \tilde{y}) ; \tilde{W}, \tilde{A} — его интенсивность и радиус соответственно;

в) смещение сканирующего окна на шаг h_s , $w_s = -w_s$. Возврат к шагу 2.

В результате реализации данных этапов алгоритма будет построено распределение $N_S: \{N_S^{(j)}, j = 1, \dots, l_x \times l_y\}$ найденных вихрей в D . В силу ограниченности информации о поле скорости в сканирующем окне D_s возможна сходимость алгоритма к ложным вихрям. По-видимому, вероятность того, что в ячейке $S^{(j)}$ находится центр истинного идентифицируемого вихря, тем выше, чем больше $N_S^{(j)}$ (количество вычисленных вихрей с центром в ячейке с номером j). Зададим константу N_{\min} и далее будем рассматривать ячейки только с $N_S^{(j)} > N_{\min}$. Затем определим изолированные “пятна”

завихренности в полученном распределении \tilde{N} : $\{N_S^{(j)} > N_{\min}, j = 1, \dots, l_x \times l_y\}$. “Пятном” будем считать подмножество ячеек, граничащих с $N_S^{(j)} > N_{\min}$, которые окружены ячейками с $N_S^{(j)} \leq N_{\min}$. В каждом “пятне” определим ячейку с максимальным значением $N_S^{(im)}$. В результате будет получено начальное приближение $P^{(0)}$ к вихревой структуре вида (16). Количество вихрей $K^{(0)}$ в $P^{(0)}$ определяется числом “пятен” в распределении \tilde{N} . Для каждого вихря с номером $i = 1, \dots, K^{(0)}$ приближения к координатам его центра $x_i^{(0)}, y_i^{(0)}$ определяются координатами центра ячейки с $N_S^{(im)}$, а значения завихренности и радиуса — величинами $W_i^{(0)} = W_S^{(im)}/N_S^{(im)}$ и $A_i^{(0)} = A_S^{(im)}/N_S^{(im)}$ соответственно.

2.3. Алгоритм VID (*vortex identification* (идентификация вихря)) идентификации вихревой структуры. Алгоритмы, представленные в подп. 2.1, 2.2, позволяют реализовать многопроходный метод идентификации VID вихревой структуры, включающий следующие шаги:

1. Задание количества проходов алгоритма M_n , $m = 1$. В начальный момент $\tilde{U} = U$ (U — исходный набор векторов (1)), $P^* = \emptyset$. Задание параметров алгоритмов INITAP и IDVS (см. подп. 2.1, 2.2).

2. $P^{(0)} = \text{INITAP}(\tilde{U}, l_x, l_y, \{D_s^{(j)}, j = 1, \dots, k_s\}, h_s)$.

3. $P^{(m)} = \text{IDVS}(\tilde{U}, P^{(0)} \cup P^*, h, \epsilon, \delta, M, M_{\max}, h_{\min})$.

4. $P^* = P^* \cup P^{(m)}$.

5. Вычисление модельного векторного поля $\tilde{V} = V(P^*)$ (см. (4), (7), (8)).

6. Проверка условия $m \leq M_n$ при $m = m + 1$. Если $m \leq M_n$, то $\tilde{U} = \tilde{U} - V$ и выполняется переход к п. 2, в противном случае P^* — искомые параметры вихревой конфигурации.

Результатом успешной работы алгоритма являются параметры модельной системы вихрей Рэнкина P^* вида (5)–(7). Ниже данный алгоритм применяется для идентификации двух тестовых вихревых структур.

2.4. Алгоритм расчета динамики вихревой конфигурации. Если параметры модельной вихревой структуры P^* вычислены, то прогноз развития течения можно проводить, используя численное решение нестационарных двумерных задач динамики жидкости с начальным распределением завихренности $\Omega_M(P^*)$ в области D вида (6). В данной работе для этого используются уравнения Эйлера идеальной жидкости (13)–(15).

При решении задачи (13)–(15) применяется спектрально-вихревой метод, который для замкнутых и проточных областей подробно описан в работах [18, 21, 32], а для периодических граничных условий — в [33]. Алгоритм основан на следующих положениях: в начальный момент времени в D задается множество маркированных частиц с координатами (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N_p$ и значением завихренности ω_i в соответствии с (15), ω_i пассивно переносится частицей согласно (13); для каждого значения t с помощью кубических многочленов и метода наименьших квадратов строится кусочно-непрерывная аппроксимация

поля $\omega(t, x, y)$; функция тока определяется в виде $\psi(x, y) \approx \hat{\psi}(x, y) = \sum_{i=1}^m \psi_i(t) \phi_i(x, y)$, где

$\phi_i(x, y)$ — базисные функции; $\psi_i(t)$ — коэффициенты, которые находятся аналитически как решение уравнения (14) методом Галеркина; полученное приближение для функции тока используется для расчета траекторий маркированных частиц как решения задачи Коши

вида $\dot{x}_i = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y}(x_i, y_i)$, $\dot{y}_i = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x}(x_i, y_i)$ методом Рунге — Кутты. Алгоритм может быть эффективно распараллелен (см. [32]), что позволяет достаточно быстро прогнозировать развитие вихревой структуры.

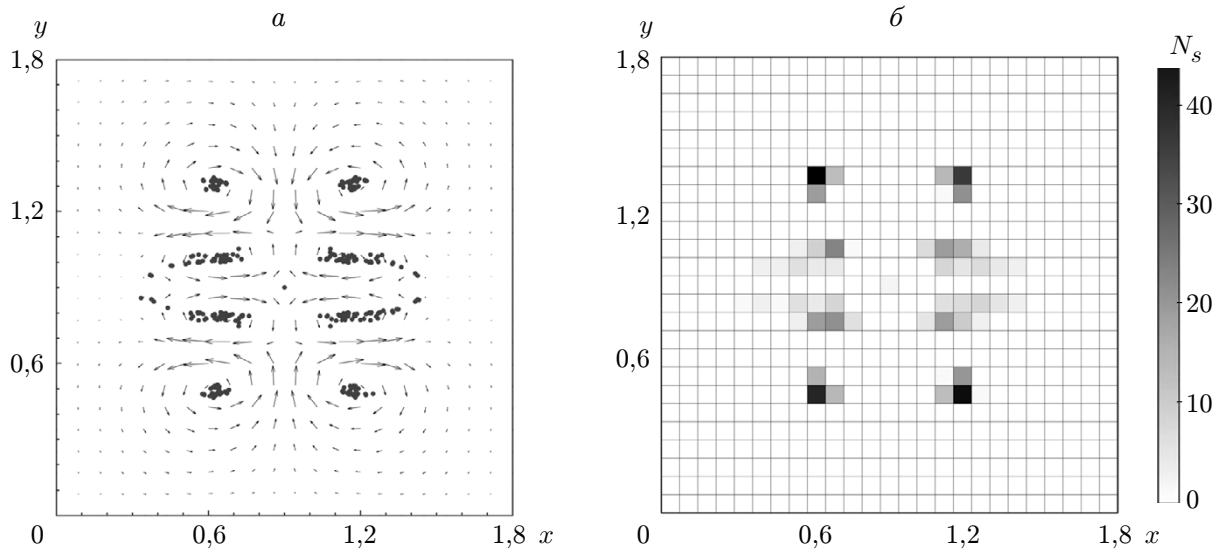


Рис. 1. Исходное векторное поле и вычисленные вихри (точки) для тестовой вихревой конфигурации $t = 0$ (а), а также распределение количества N_s полученных решений (12) (б) при скользящем сканировании области D

3. Пример идентификации и прогноза развития вихревой структуры. Рассмотрим квадратную область течения $D = [a \times a]$, $a = 1,8$ с условиями непротекания на границе, заполненную жидкостью с начальным распределением завихренности (6) вида

$$\omega(0, x, y) = \begin{cases} \sin(2\pi(x - 0,4)/a) \sin(2\pi(y - 0,4)/a), & 0,4 \leq x, y \leq a - 0,4, \\ 0, & x < 0,4, \quad y > a - 0,4. \end{cases} \quad (18)$$

Распределение завихренности (18) принадлежит классу вихрей Тейлора — Грина.

В качестве тестового примера будем использовать решение задачи (13), (14), (18), полученное спектрально-вихревым методом [18, 21, 32] на интервале $t \in [0, 210]$.

3.1. Идентификация вихревой структуры. Идентификация вихревой структуры проводилась для двух моментов времени: $t = 0$ и $t = 110$. В качестве исходного набора U (см. (1)) используются опорные точки, расположенные в узлах равномерной сетки размером 20×20 в области D , и векторы скорости в этих точках, определяемые решением тестовой задачи. На рис. 1,а, 2,а представлен набор U для $t = 0$, на рис. 2,б — для $t = 110$. В расчетах с использованием алгоритма VID $M_n = 2$.

При поиске начального приближения к вихревой структуре с помощью алгоритма INITAR использовались сканирующие окна D_s с длинами сторон $l_x = l_y = a/7, a/6, a/5, a/4$ и шагом смещения окна по координатам $h_s = l_x/8$. При построении распределения вычисленных при сканировании N_s вихрей (см. подп. 2.2) использовалось разбиение S на 25×25 ячеек, т. е. рассматривались квадратные ячейки $S^{(j)}$ с длиной стороны $a/25$. При построении N_s вихрей на шаге 2а алгоритма INITAR использовались следующие входные параметры алгоритма IDVS (см. подп. 2.1): $P^{(0)} = \{U^{(j)}, K = 1, x_c^{(j)}, y_c^{(j)}, \Omega^{(0)} = 0,1 \times (-1)^j, A^{(0)} = 0,1\}$, где $U^{(j)} = U \in D_s$; $h = 0,005$; $\epsilon = 0,0001$; $M_{\max} = 500$; $h_{\min} = 10^{-9}$.

Для тестовой вихревой структуры при $t = 0$ (рис. 3,а) в результате применения алгоритма скользящего сканирования с указанными параметрами было найдено 568 решений уравнения (12). На рис. 1,а точками показано распределение найденных решений. Видно, что некоторые решения находятся на достаточно большом расстоянии от центров вихрей тестовой вихревой конфигурации и могут быть интерпретированы как ложные. На рис. 1,б

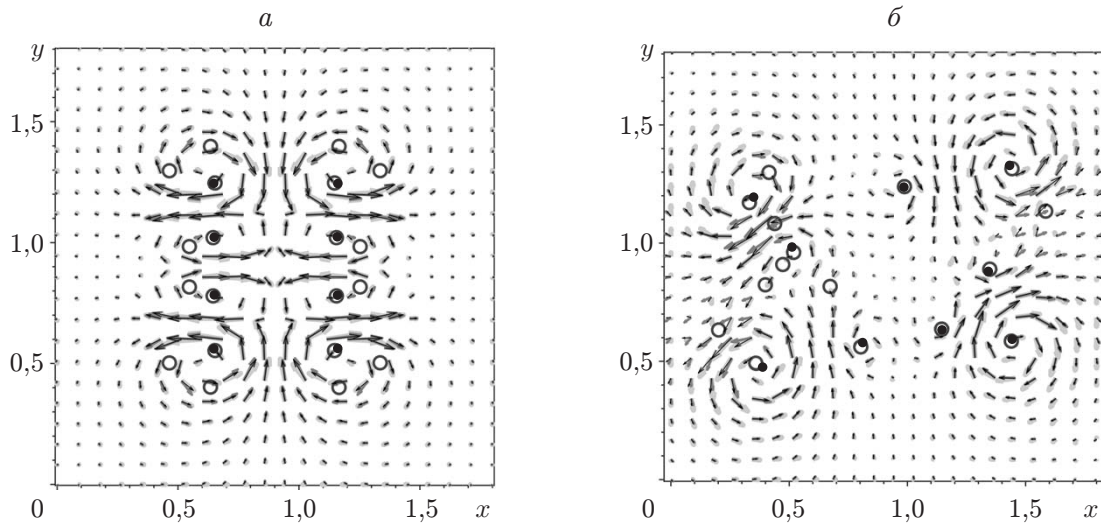


Рис. 2. Исходное векторное поле (серые стрелки) и модельные векторные поля в результате первого (темно-серые стрелки) и второго (черные стрелки) прохождения алгоритма VID для тестовой вихревой структуры:

a — $t = 0$, b — $t = 110$; точки — центры найденных вихрей Рэнкина модельной системы (темные — в результате первого прохождения алгоритма VID, светлые — в результате второго прохождения)

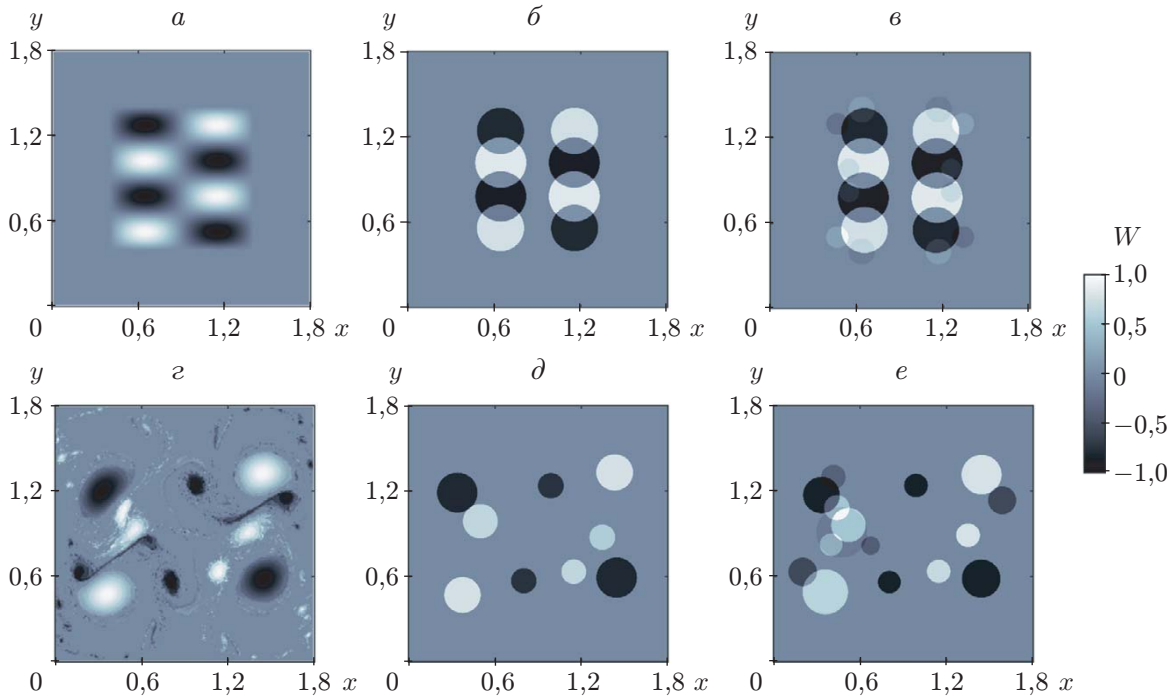


Рис. 3. Распределения завихренности в D для тестовой структуры при $t = 0$ (a – v) и $t = 110$ (z – e):

a , z — тестовая структура, b , d — модельная структура после первого прохождения алгоритма VID, v , e — модельная структура после второго прохождения алгоритма VID

Результаты первого прохождения алгоритма идентификации тестовой вихревой структуры

i	$x_i^{(0)}$	$y_i^{(0)}$	$\Omega_i^{(0)}$	$A_i^{(0)}$	x_i^*	y_i^*	Ω_i^*	A_i^*	Ω_i^*	x_i	y_i	Ω_i
1	0,61	0,46	0,72	0,15	0,643	0,559	0,779	0,163	0,065	0,65	0,525	0,051
2	0,68	0,75	-0,79	0,09	0,646	0,781	-0,865	0,176	-0,084	0,65	0,775	-0,051
3	0,68	1,04	0,69	0,04	0,645	1,018	0,861	0,176	0,084	0,65	1,025	0,051
4	0,61	1,33	-0,74	0,16	0,644	1,241	-0,777	0,163	-0,065	0,65	1,275	-0,051
5	1,19	0,47	-0,73	0,16	1,156	0,559	-0,778	0,163	-0,065	1,15	0,525	-0,051
6	1,12	0,76	0,68	0,04	1,154	0,781	0,862	0,176	0,084	1,15	0,775	0,051
7	1,12	1,04	-0,82	0,11	1,154	1,019	-0,864	0,176	-0,084	1,15	1,025	-0,051
8	1,19	1,33	0,72	0,15	1,156	1,241	0,779	0,163	0,065	1,15	1,275	0,051

Примечание. i — номер вихря; $x_i^{(0)}$, $y_i^{(0)}$, $\Omega_i^{(0)}$, $A_i^{(0)}$ — соответственно координаты центров, интенсивности и радиусы вихрей Рэнкина, полученные в результате применения алгоритма INITAR; x_i^* , y_i^* , Ω_i^* , A_i^* — координаты центров, интенсивности и радиусы вихрей Рэнкина, полученные в результате первого прохождения алгоритма VID; x_i , y_i , Ω_i — координаты центров завихренности и интенсивности вихрей тестовой структуры.

приведено распределение количества найденных решений в области D . Максимальное число вихрей $N_S^{(\max)} = \max_j N_S^{(j)}$, попавших в ячейку с номером j , равно 47. Сгущения величины N_S имеют место в окрестности центров вихрей идентифицируемой структуры, т. е. истинных вихрей. В качестве величины N_{\min} будем использовать величину $N_S^{(\max)}/8$. В результате отсева ложных вихрей установлено, что после первого прохождения $m = 1$ шага 2 алгоритма VID начальное приближение к тестовой вихревой структуре описывается восемью ($K = 8$) вихрями Рэнкина с характеристиками, приведенными в таблице (графы 2–5).

На шаге 3 алгоритма VID модельная вихревая структура уточняется с помощью алгоритма IDVS с использованием полученного начального приближения $P^{(0)} = \{K = 8, (x_i^{(0)}, y_i^{(0)}, W_i^{(0)}, A_i^{(0)}, i = 1, \dots, 8)\}$ (значения параметров вихрей Рэнкина см. в таблице), $\tilde{U} = U$ при указанных выше параметрах алгоритма. Результатом применения алгоритма является конфигурация P^* из восьми вихрей Рэнкина с характеристиками, приведенными в таблице (графы 6–10). На рис. 2,а эти вихри показаны темными точками, а модельное векторное поле в опорных точках — темно-серыми стрелками. Центры (x_i^*, y_i^*) модельных вихрей и вихрей тестовой структуры (x_i, y_i) (графы 11–13 в таблице) оказались близки. Различие их интенсивностей частично объясняется тем, что модельные вихри взаимно перекрываются (рис. 3,б). Модельный $V(P^*)$ (см. (8)) и исходный U наборы векторов качественно идентичны, несмотря на то что имеется их количественное различие (см. рис. 2,а). Распределение завихренности модельной системы, состоящей из вычисленных восьми вихрей Рэнкина, приведено на рис. 3,б.

При втором прохождении алгоритма VID в качестве исходных векторов используются векторы невязки полученных при первом прохождении модельного и тестового полей скорости в опорных точках: $\tilde{U} = U - V(P^*)$. Это позволяет уточнить модельную структуру вихрей Рэнкина и уменьшить отклонение модельного векторного поля от набора U . В результате второго прохождения алгоритма модельная вихревая структура была дополнена 12 вихрями Рэнкина (светлые точки на рис. 2,а), т. е. включает 20 вихрей. Интенсивность вихрей, найденных в результате второго прохождения алгоритма, меньше, чем в результате первого прохождения. Распределение завихренности, определяемое модельной системой, полученной в результате второго прохождения алгоритма VID, показано на рис. 3,в. Уточненное модельное векторное поле в опорных точках (черные стрелки на

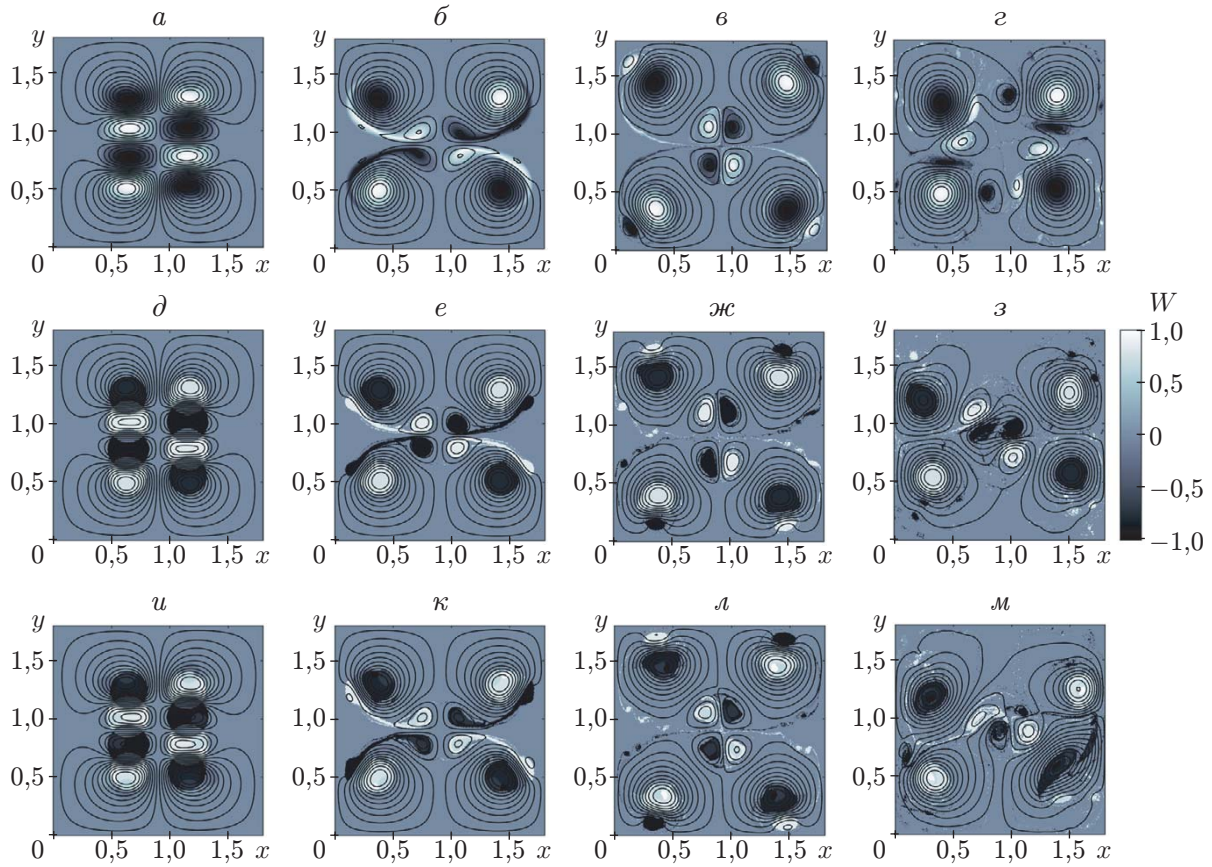


Рис. 4. Распределения завихренности и линии тока в различные моменты времени: a – z — тестовая структура, d – z — прогноз с начальными данными, определяемыми модельной системой после первого прохождения алгоритма VID, u – m — прогноз после второго прохождения алгоритма VID; a, d, u — $t = 0$, b, e, k — $t = 20$, v, zh, l — $t = 45$, z, z, m — $t = 100$

рис. 2, a) менее существенно отличается от заданного набора U . Аналогичные вычисления проводились для тестовой вихревой структуры при $t = 110$. Распределение завихренности в D этой структуры приведено на рис. 3, z . Результат первого прохождения алгоритма VID представлен на рис. 2, b . В этом случае в результате первого прохождения найдены девять вихрей Рэнкина, после второго прохождения модельная конфигурация включает 16 вихрей Рэнкина. Второе прохождение алгоритма VID позволило существенно уменьшить различие наборов $V(P^*)$ и U . Распределение завихренности, определяемое модельной системой, после первого прохождения алгоритма показано на рис. 3, d , а после второго — на рис. 3, e . В этом случае некоторые вихри, построенные в результате второго прохождения алгоритма, имеют интенсивность, сравнимую с интенсивностями вихрей после первого применения алгоритма VID.

3.2. Прогноз развития вихревой структуры. Для прогноза развития вихревой структуры использовалось решение задачи (13)–(15) спектрально-вихревым методом (см. подп. 2.4) с начальными условиями, определяемыми построенной в результате идентификации вихревой структуры модельной системой вихрей Рэнкина. Рассматривались решения с начальными распределениями, которые были получены в результате первого и второго прохождений алгоритма идентификации VID и сравнивались с решением тестовой задачи (13), (14), (18).

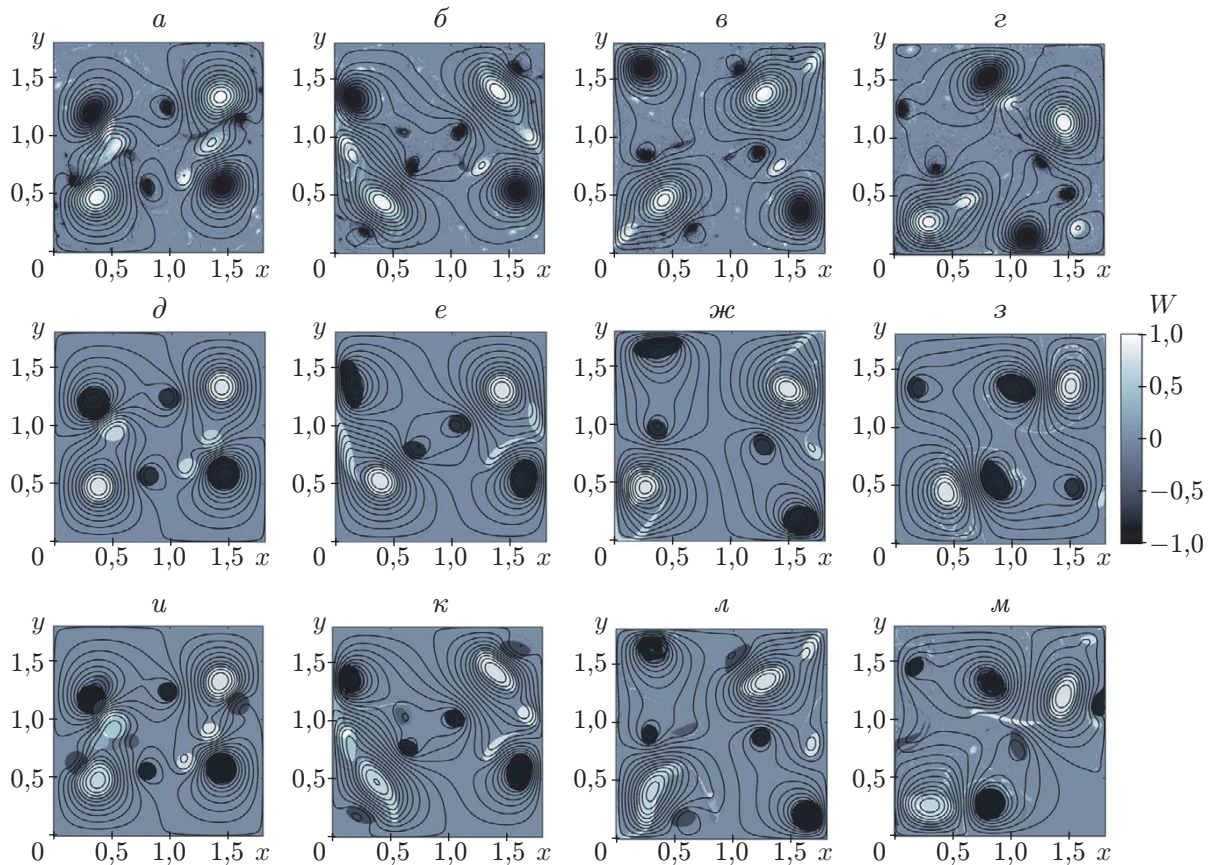


Рис. 5. Распределения завихренности и линии тока в различные моменты времени: a – z — тестовая структура, d – z — прогноз с начальными данными, определяемыми модельной системой после первого прохождения алгоритма VID, u – m — прогноз после второго прохождения алгоритма VID; a, d, u — $t = 110$, b, e, k — $t = 130$, v, zh, l — $t = 155$, z, z, m — $t = 210$

Результаты расчета для интервала $t \in [0, 110]$ представлены на рис. 4. В этом случае идентификация проводилась для набора U , порождаемого тестовой задачей при $t = 0$. На рис. 2, a приведены опорные и модельные векторы после одного и двух прохождений алгоритма VID, на рис. 3, a – $в$ — тестовое и модельные распределения завихренности. При $t = 0$ структура линий тока течения для тестовой и модельных систем качественно подобна, несмотря на то что распределения завихренности различаются (см. рис. 4). С ростом t структура тестового течения (см. рис. 4, a) и структура течения для обоих начальных модельных распределений (см. рис. 4, $b, в$) завихренности качественно близки вплоть до значения $t \approx 45$. С ростом t различие структуры тестового и прогнозных течений возрастает и при $t = 110$ становится существенным. Заметим, что различие двух прогнозов является незначительным, что объясняется малой интенсивностью вихрей Рэнкина, построенных в результате второго применения алгоритма идентификации, и их слабым влиянием на динамику.

При $t = 110$ с использованием тестовых векторов скорости в опорных точках проведена еще одна идентификация вихревой структуры. На рис. 3, z, d приведены тестовое и полученные модельные распределения завихренности, на рис. 2, $б$ — опорные и модельные векторы после одного и двух прохождений алгоритма идентификации. В процессе идентификации были определены только интенсивные вихри. Тем не менее при $t = 110$ структура линий тока качественно описывается модельными системами (рис. 5). Линии

тока уточненной в результате второго прохождения конфигурации вихрей Рэнкина более точно описывают тестовую конфигурацию, чем линии тока конфигурации, построенной после первого прохождения алгоритма VID. С увеличением времени это различие возрастает, и при $t = 155$ все три структуры различны. На рис. 5, *a–г*, *u–м* видно, что при $t = 130$ и $t = 155$ линии тока тестового нестационарного течения и течения, полученного в результате уточненного прогноза, качественно подобны, а их изменения во времени на интервале $t \in [110, 150]$ идентичны.

Заключение. Предложен алгоритмический подход к решению обратной задачи идентификации и прогноза развития плоского вихревого течения, в случае когда известны векторы скорости жидкости в конечном наборе опорных точек. В качестве математической модели для описания вихревой структуры использовались вихри Рэнкина.

Идея метода идентификации состоит в минимизации в пространстве параметров модельной системы целевого функционала, оценивающего близость наборов векторов скорости исходного и модельного течений. Алгоритм включает несколько этапов: поиск начального приближения для вихревой структуры, уточнение параметров модельных вихрей, повторение этих этапов для описания невязки полученного модельного и исходного наборов векторов. Прогноз выполняется путем решения двумерной нестационарной задачи для уравнений Эйлера идеальной жидкости с помощью спектрально-вихревого метода.

В силу некорректности обратных задач и сильной зависимости результатов от исходной информации теоретический анализ методов их решения и предложенного алгоритма затруднен, поэтому адекватность и эффективность метода исследовались экспериментально с использованием тестового примера. В качестве набора векторов, для которого проводилась идентификация, использовались 400 опорных точек, расположенных в узлах прямоугольной равномерной сетки.

Проведены численные эксперименты по идентификации тестовых течений. Заданное количество опорных точек позволило адекватно описать достаточно сложную вихревую структуру, состоящую из восьми вихрей. Вычисленные координаты центров вихрей модельной системы и их интенсивности оказались близкими к характеристикам тестовых пространственно-распределенных вихрей, а структуры линий тока топологически эквивалентны. Решение начально-краевой задачи для уравнений Эйлера с начальными данными, определяемыми модельной системой, хорошо согласуется с тестовым расчетом при временах, при которых происходят качественные изменения топологии течений.

Метод имеет как преимущества, так и недостатки. Одним из недостатков является простота используемой модельной системы, состоящей из вихрей Рэнкина. Простота формы (круг) такого вихря и постоянство завихренности внутри круга приводят к тому, что не все реальные вихри можно хорошо приблизить с помощью достаточно малого числа модельных вихрей, что ограничивает время адекватного прогноза. При увеличении числа модельных вихрей существенно увеличивается размерность задачи безусловной минимизации, что затрудняет сходимость метода и приводит к увеличению времени вычислений. Однако простота модели является также преимуществом рассмотренного варианта метода, поскольку имеется явное аналитическое выражение для скорости, индуцированной вихрем Рэнкина, что существенно уменьшает вычислительную сложность алгоритма. Другим недостатком метода является большое количество параметров. Оптимальные значения параметров существенно зависят от количества и положения опорных точек, структуры течения и др. Поэтому для применения алгоритма к конкретному классу течений требуется “настройка” метода.

Результаты численных расчетов, представленные в данной работе, свидетельствуют об эффективности предложенного подхода для решения обратной задачи идентификации вихревой структуры в предложенной постановке и адекватного прогноза двумерной вихре-

вой динамики на его основе. Для демонстрации работы метода использована только одна тестовая структура, но вычисления проводились также для других примеров, в которых использовалось разное число вихрей с различной топологией. Во всех случаях метод качественно описывает линии тока при идентификации тестовых структур вплоть до значений времени, при которых происходит значительное изменение течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hunt J. C. R., Wray A. A., Moin P.** Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows: Report / Center for turbulence research. N CTR-S88. S. 1., 1988. P. 193–208.
2. **Jeong J., Hussain F.** On the identification of a vortex // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 285. P. 69–94.
3. **Chong M. S., Perry A. E., Cantwell B. J.** A general classification of three-dimensional flow fields // *Phys. Fluids A.* 1990. V. 2, N 5. P. 765–777.
4. **Zhou J., Adrian R. J., Balachandar S., Kendall T. M.** Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 387. P. 353–396.
5. **Kozlov I. E., Artamonova A. V., Manucharyan G. E., Kubryakov A. A.** Eddies in the Western Arctic Ocean from spaceborne SAR observations over open ocean and marginal ice zones // *J. Geophys. Res. Oceans.* 2019. V. 124. P. 6601–6616.
6. **Deng L., Wang Y., Liu Y., et al.** A CNN-based vortex identification method // *J. Visual.* 2019. V. 22. P. 65–78.
7. **Wang L., Fournier Y., Wald J.-F., Mesri Y.** Identification of vortex in unstructured mesh with graph neural networks // *Comput. Fluids.* 2024. V. 268. 106104.
8. **Sadarjoen I., Post F.** Detection, quantification, and tracking of vortices using streamline geometry // *Comput. Graphics.* 2000. V. 24, iss. 3. P. 333–341.
9. **Canivete C. J. R., Steiner O.** Innovative and automated method for vortex identification. 1. Description of the SWIRL algorithm // *Astronomy Astrophys.* 2022. V. 668. A118.
10. **Кибиткин В. В., Солодушкин А. И., Плешанов В. С., Чертова Н. В.** Критерии идентификации вихревых структур в деформируемом твердом теле // *Физ. мезомеханика.* 2013. Т. 16, № 2. С. 53–63.
11. **Giagkiozis I., Fedun V., Scullion E., et al.** Vortex flows in the solar atmosphere: automated identification and statistical analysis // *Astrophys. J.* 2018. V. 869, N 2. 169.
12. **Bai X., Cheng H., Ji B., et al.** Comparative study of different vortex identification methods in a tip-leakage cavitating flow // *Ocean Engng.* 2020. V. 207. 107373.
13. **Kolar V.** Vortex identification: New requirements and limitations // *Intern. J. Heat Fluid Flow.* 2007. V. 28, N 4. P. 638–652.
14. **Wang C., Gao Q., Chen T., et al.** On the effectiveness of local vortex identification criteria in the vortex representation of wall-bounded turbulence // *Acta Mech. Sinica.* 2022. V. 38. 321463.
15. **Liu T.** Inverse problems in global flow diagnostics / T. Liu, Z. Cai. Cham: Springer, 2023.
16. **Das R., Girimaji S. S.** Characterization of velocity-gradient dynamics in incompressible turbulence using local streamline geometry // *J. Fluid Mech.* 2020. V. 895. A5.
17. **Dijkstra H. A., Wubs F. W., Cliffe A. K., et al.** Numerical bifurcation methods and their application to fluid dynamics: Analysis beyond simulation // *Comm. Comput. Phys.* 2014. V. 15, N 1. P. 1–45.
18. **Говорухин В. Н.** Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2011. Т. 51, № 6. С. 1133–1147.

19. **Gawlik E. S., Gay-Balmaz F.** A conservative finite element method for the incompressible Euler equations with variable density // J. Comput. Phys. 2020. V. 412. 109439.
20. **Ahmed S. E., Pawar S., San O., et al.** A nudged hybrid analysis and modeling approach for realtime wake-vortex transport and decay prediction // Comput. Fluids. 2021. V. 221. 104895.
21. **Govorukhin V. N.** An extended and improved particle-spectral method for analysis of unsteady inviscid incompressible flows through a channel of finite length // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 2023. V. 95, N 4. P. 579–602.
22. **Говорухин В. Н.** Алгоритм идентификации вихревых пятен на основе моделей точечных вихрей // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2020. № 3. С. 11–18.
23. **Говорухин В. Н.** Идентификация и прогноз динамики плоской вихревой структуры на основе математической модели системы точечных вихрей // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 6. С. 710–726.
24. **Говорухин В. Н.** Алгоритм идентификации вихрей по векторам скорости течения на основе простейшей математической модели вихревой динамики // Компьютер. исслед. и моделирование. 2023. Т. 15, № 6. С. 1477–1493.
25. **Веретенцев А. Н., Рудяк В. Я., Яненко Н. Н.** О построении дискретных вихревых моделей течений идеальной несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 1. С. 103–113.
26. **Кабанихин С. И.** Обратные задачи естествознания // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60, № 6. С. 935–938.
27. **Самарский А. А.** Численные методы решения обратных задач математической физики. Изд. 3-е / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. М.: Изд-во ЛКИ, 2009.
28. **Rankine W. A.** A manual of applied mechanics. L.: C. Griffin and Co, 1858.
29. **Bhatia H., Bieder U., Guenadou D.** Rankine-vortex model based assessment of CFD methods for simulating the effect of gas entrainment observed in the hot-pool of sodium cooled fast breeder reactors // Progress Nuclear Energy. 2021. V. 137. 103794.
30. **Li H.-f., Chen H.-x., Ma Z., Yi Z.** Experimental and numerical investigation of free surface vortex // J. Hydrodynamics. Ser. B. 2008. V. 20, iss. 4. P. 485–491.
31. **Pramanik S., Biswas P., Giri B. C.** Hybrid vector similarity measures and their applications to multi-attribute decision making under neutrosophic environment // Neural Comput. Appl. 2017. V. 28, N 5. P. 1163–1176.
32. **Говорухин В. Н.** Параллельная реализация бессеточного метода расчета течений идеальной несжимаемой жидкости // Вычисл. методы и программирование. 2017. Т. 18, № 2. С. 175–186.
33. **Говорухин В. Н., Филимонова А. М.** Расчет плоских геофизических течений невязкой несжимаемой жидкости бессеточно-спектральным методом // Компьютер. исслед. и моделирование. 2019. Т. 11, № 3. С. 413–426.

*Поступила в редакцию 2/V 2024 г.,
после доработки — 2/V 2024 г.
Принята к публикации 3/VI 2024 г.*