

УДК 517.957:532.529
DOI: 10.15372/PMTF202315414

ЗАДАЧА ОБ ИНИЦИИРОВАНИИ ДИФФУЗИОННОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЯХ СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

А. Л. Казаков, Л. Ф. Спевак*

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,
Иркутск, Россия

* Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова УрО РАН, Екатеринбург, Россия
E-mails: kazakov@icc.ru, lfs@imach.uran.ru

Для нелинейной параболической системы реакция — диффузия строятся и исследуются решения, имеющие вид диффузионной волны, распространяющейся в покоящейся среде с конечной скоростью. Впервые для случаев сферической и цилиндрической симметрии рассмотрена задача об инициировании диффузионной волны краевыми условиями, заданными на сфере (круговой цилиндрической поверхности). Доказана теорема существования и единственности решения в классе аналитических функций. Построено точное решение, которое представлено в виде явных формул. Предложен пошаговый итерационный алгоритм, основанный на методе коллокаций и разложении по радиальным базисным функциям. Выполнены численные расчеты, для верификации результатов которых использовано точное решение.

Ключевые слова: система реакция — диффузия, диффузионная волна, теорема существования и единственности, точное решение, численный метод

Введение. В настоящее время проводится большое количество исследований нелинейных параболических уравнений и систем второго порядка [1], которые являются широко известными моделями механики сплошных сред [2] и используются для описания распространения тепла [3], фильтрации жидкостей и газов в пористых средах [4, 5], а также других физических процессов, связанных с диффузией и конвекцией [6, 7]. Одним из наиболее распространенных направлений исследований является изучение свойств параболических уравнений и систем в абстрактных функциональных пространствах с доказательством существования их решений [8, 9]. В частности, рассматриваются слабые решения [10, 11], двойное вырождение [12], строятся глобальные оценки решений [13, 14]. Преимуществом таких моделей является то, что при их использовании можно, не переходя к гиперболическим моделям, описать эффекты, возникающие вследствие конечной скорости распространения возмущений. Решения с подобными свойствами называются также диффузионными (тепловыми, фильтрационными) волнами [15]. Обычно это кусочно-гладкие решения, состоящие из неотрицательной и тривиальной частей, непрерывно состыкованных вдоль фронта волны. Однако из результатов работ [16–18] следует необходимость обобщения решений подобного типа для систем уравнений, поскольку в случае двух различных нулевых фронтов для двух искомых функций диффузионная волна описывается кусочно-гладким

решением, состоящим из следующих трех частей: 1) обе функции положительны; 2) одна функция положительна, другая равна нулю; 3) обе функции равны нулю. Таким образом, возникает не двухчастная, а трехчастная структура. Фронтом диффузионной волны является граница, на которой равны нулю обе искомые функции, причем хотя бы одна из них позади фронта положительна.

В работах [17, 18] выполнены исследования для случая плоской симметрии. В [16] рассмотрена задача при заданном нулевом фронте диффузионной волны, общем для двух искомых функций. В [17] с помощью краевых условий были заданы различные нулевые фронты для разных искомых функций и обобщено понятие диффузионной волны, которая в рассмотренном случае имела трехчастную структуру. В [18] рассмотрена задача об инициировании диффузионной волны заданными в точке краевыми условиями, которая в общем случае также состоит из трех частей.

Настоящая работа посвящена построению решений задачи об инициировании диффузионной волны, симметричной относительно начала координат или координатной оси. Доказывается теорема существования и единственности аналитического решения искомого типа, разработан алгоритм численного решения, основанный на методе коллокаций [19] и разложении по радиальным базисным функциям [20, 21], построено новое точное решение, проведены тестовые расчеты.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему параболических уравнений типа реакции — диффузия

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{1}{\sigma} u_{\rho}^2 + \frac{\nu uu_{\rho}}{\rho} + F(u, v), \quad v_t = vv_{\rho\rho} + \frac{1}{\delta} v_{\rho}^2 + \frac{\nu vv_{\rho}}{\rho} + G(u, v), \quad (1)$$

где u, v — искомые функции; t, ρ — независимые переменные (t — время; $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2}$; $x_i (i = 1, \dots, \nu + 1)$ — пространственные декартовы координаты); $\sigma > 0, \delta > 0, \nu = 1, 2$ — константы; F, G — достаточно гладкие функции; $F(0, 0) = G(0, 0) = 0$. Подобные системы используются для описания термодиффузии в бинарных смесях, а также взаимодействия видов в математической биологии. Система уравнений (1) имеет решение $u \equiv 0, v \equiv 0$.

Для системы (1) зададим граничные условия

$$u(t, \rho) \Big|_{\rho=R} = f(t), \quad v(t, \rho) \Big|_{\rho=R} = g(t). \quad (2)$$

Здесь $R > 0$; $f(t), g(t)$ — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $f(0) = g(0) = 0, f'(0) > 0, g'(0) > 0$.

2. Теорема существования и единственности. Под аналитической в точке будем понимать функцию, которая в некоторой окрестности совпадает с ее тейлоровским разложением.

Теорема. Пусть выполняются следующие условия: 1) функции f, g и F, G являются аналитическими при $t = 0$ и $u = v = 0$ соответственно; 2) $f(0) = g(0) = 0, f'(0) > 0, g'(0) > 0, F(0, 0) = G(0, 0) = 0$. Тогда задача (1), (2) имеет в точке $(0, R)$ аналитическое решение, которое при выбранных знаках $u_{\rho}(0, R), v_{\rho}(0, R)$ является единственным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ранее аналогичная теорема была обоснована для частного случая $\nu = 0$ [18], приведем лишь краткое доказательство. Построим формальное решение в виде двойных рядов Тейлора в окрестности точки $t = 0, \rho = R$:

$$w(t, \rho) = \sum_{i,j=0}^{\infty} w_{i,j} \frac{t^i (\rho - R)^j}{i! j!}, \quad w_{i,j} = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial t^i \partial \rho^j} \Big|_{t=0, \rho=R}. \quad (3)$$

Здесь параметр w принимает значения u, v . Построение проводится методом индукции по $m = i + j$. В силу аналитичности функций f, g и условий (2) имеем $u_{i,0} = f_i, v_{i,0} = g_i$, где $f_i = f^{(i)}(0), g_i = g^{(i)}(0)$, в том числе $u_{0,0} = v_{0,0} = 0, u_{1,0} = f_1 > 0, v_{1,0} = g_1 > 0$. Полагая в системе (1) $t = 0, \rho = R$, получаем систему алгебраических уравнений второй степени для определения $u_{0,1}, v_{0,1}$:

$$u_{1,0} = u_{0,0}u_{0,2} + \frac{u_{0,1}^2}{\sigma} + \frac{\nu u_{0,0}u_{0,1}}{R} + F_{0,0}, \quad v_{1,0} = v_{0,0}v_{0,2} + \frac{v_{0,1}^2}{\sigma} + \frac{\nu v_{0,0}v_{0,1}}{R} + G_{0,0}.$$

Здесь $F_{0,0} = F(u_{0,0}, v_{0,0})$; $G_{0,0} = G(u_{0,0}, v_{0,0})$. Следовательно,

$$u_{0,1} = \pm \sqrt{\sigma f_1}, \quad v_{0,1} = \pm \sqrt{\delta g_1}. \quad (4)$$

Выбор знаков в (4) определяет, в свою очередь, выбор одной пары значений $u_{0,1}, v_{0,1}$ из четырех допустимых (см. условие теоремы). Таким образом, база индукции при $m = 0, 1$ установлена.

Пусть известны $u_{i,j}, v_{i,j}$ при $m = i + j = 0, 1, \dots, n$. Для нахождения $u_{n+1-k,k}, v_{n+1-k,k}$, $k = 0, \dots, n$ будем, увеличивая k , применять к системе (1) дифференциальный оператор $D[\cdot] = \frac{\partial^n[\cdot]}{\partial t^{n-k} \partial \rho^k} \Big|_{t=\rho=0}$. Учитывая предположение метода индукции, получаем

$$-w_{n-k+1,k} + (k + 2/\eta)w_{0,1}w_{n-k,k+1} + (n - k)w_{1,0}w_{n-k-1,k+2} = L_{n-k,k}(w), \quad k = 0, \dots, n. \quad (5)$$

Здесь η принимает значения σ и δ ; величины $u_{1,0}, u_{0,1}, v_{1,0}, v_{0,1}$ найдены при задании базы индукции; величины $u_{n+1,0} = f_{n+1}, v_{n+1,0} = g_{n+1}$ заданы в (2); $L_{k,n-k}(u), L_{k,n-k}(v)$ известны в силу предположения метода индукции (соответствующие формулы не приводятся вследствие громоздкости); $u_{-1,n+2} = v_{-1,n+2} = 0$. Таким образом, уравнения (5) представляют собой две системы линейных алгебраических уравнений с однотипными трехдиагональными матрицами. Условие диагонального преобладания для этих уравнений не выполняется, однако, как следует из ранее доказанных утверждений [22], они однозначно разрешимы при любых значениях $u_{0,1}, v_{0,1}$ из множества допустимых (см. (4)). Итак, формальное решение построено, при выбранных знаках $u_{0,1}, v_{0,1}$ оно является единственным.

Сходимость построенных рядов доказывается с использованием классического метода мажорант, причем для функций u, v строится общая мажоранта, что позволяет свести доказательство к использованию аналога теоремы Коши — Ковалевской для одного нелинейного параболического уравнения [18, 22].

Следствие. При выполнении условий теоремы и неравенства $u_{0,1}v_{0,1} > 0$ существует решение задачи (1), (2), являющееся при $t > 0$ диффузионной волной с трехчастной структурой, причем при выбранных знаках величин $u_{0,1}, v_{0,1}$ решение единственно. Случай $u_{0,1} > 0, v_{0,1} > 0$ соответствует волне, распространяющейся в области $0 < \rho < R$; случай $u_{0,1} < 0, v_{0,1} < 0$ — волне, распространяющейся в области $\rho > R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $u(0, R) = v(0, R) = 0$, а все частные производные первого порядка отличны от нуля, в плоскости переменных t, ρ для каждой искомой функции найдется нулевой фронт — достаточно гладкая кривая, проходящая через точку $(0, R)$, на которой эта функция меняет знак и обращается в нуль: $u|_{\rho=a(t)} = v|_{\rho=\bar{a}(t)} = 0$. При этом совпадение знаков производных обеспечивает существование области, в которой одновременно $u \geq 0, v \geq 0$, что позволяет построить диффузионную волну, имеющую в общем случае трехчастную структуру.

Действительно, пусть $u_{0,1} < 0, v_{0,1} < 0$. Тогда $a'(0) > 0, \bar{a}'(0) > 0$, т. е. нулевые фронты движутся в направлении увеличения ρ и диффузионная волна распространяется в области $\rho > R$. Примем $a(t) \leq \bar{a}(t), t \in (0, \varepsilon)$. Тогда $u \geq 0, v \geq 0$ при $R \leq \rho \leq a(t)$

и ряды (3) определяют, причем однозначно, первую часть диффузионной волны. Далее, при $a(t) \leq \rho \leq \bar{a}(t)$ имеем $u(t, \rho) \leq 0$. Заменим отрицательные значения нулевыми: $u = 0$. Тогда $v(t, \rho)$ получается из решения задачи

$$v_t = vv_{\rho\rho} + \frac{1}{\delta}v_{\rho}^2 + \frac{\nu vv_{\rho}}{\rho} + G(v, 0), \quad v|_{\rho=a(t)} = v_a(t), \quad (6)$$

где $v_a(t) = v(t, a(t)) \geq 0$ — функция v , определяемая рядом (3) на нулевом фронте $\rho = a(t)$. Задача (6) удовлетворяет условиям ранее доказанных теорем (см., например, [16]), что обеспечивает существование и единственность решения, образующего совместно с условием $u \equiv 0$ вторую часть диффузионной волны, а также существование линии $\rho = b(t)$ (не совпадающей с $\rho = \bar{a}(t)$), такой что $v|_{\rho=b(t)} = 0$. Наконец, при $\rho \geq b(t)$ имеем $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ (третья часть диффузионной волны).

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Заметим, что если $\bar{a}(t) = a(t)$, то вторую часть диффузионной волны отсутствует и имеет место случай, рассмотренный в [16].

3. Численное решение. Доказанные выше утверждения позволяют найти нетривиальное решение задачи (1), (2), удовлетворяющее условиям

$$u|_{\rho=a(t)} = 0, \quad v|_{\rho=b(t)} = 0, \quad a(0) = b(0) = R, \quad (7)$$

для достаточно гладких функций $a(t)$, $b(t)$, которые априори неизвестны, но удовлетворяют неравенству $a'(0)b'(0) > 0$. Рассмотрим случай $a'(t) > 0$, $b'(t) > 0$, когда диффузионная волна при $t > 0$ находится в области $\rho > R$ и ее нулевые фронты движутся в направлении увеличения пространственной переменной ρ .

Решение будем строить по шагам по времени. Для того чтобы получить краевую задачу в известной области, выполним на каждом шаге $t_k = kh$ (h — величина шага) замену переменных. В обоих уравнениях системы (1) поменяем роли искомой функции (соответственно u и v в первом и втором уравнениях) и пространственной переменной ρ , при этом пространственную переменную во втором уравнении обозначим $\bar{\rho}$. В результате в момент $t = t_k$ имеем систему уравнений

$$\rho_t \rho_u^2 = u \rho_{uu} - \frac{\rho_u}{\sigma} - \frac{\nu u \rho_u^2}{\rho} - F(u, v) \rho_u^3, \quad \bar{\rho}_t \bar{\rho}_v^2 = v \bar{\rho}_{vv} - \frac{\bar{\rho}_v}{\delta} - \frac{\nu v \bar{\rho}_v^2}{\bar{\rho}} - G(u, v) \bar{\rho}_v^3, \quad (8)$$

где $\rho(t_k, u)$ — функция, обратная $u(t_k, \rho)$; $\bar{\rho}(t_k, v)$ — функция, обратная $v(t_k, \rho)$. Будем полагать, что эти функции существуют в каждый момент времени.

Разрешив уравнения (8) относительно старших производных, сформулируем для момента $t = t_k$ следующую задачу в области $u \in [0, U]$, $v \in [0, V]$, $U = f(t_k)$, $V = g(t_k)$:

$$\rho_{uu} = S(u, v, \rho), \quad \bar{\rho}_{vv} = T(u, v, \bar{\rho}); \quad (9)$$

$$\rho|_{u=U} = R, \quad \bar{\rho}|_{v=V} = R. \quad (10)$$

Здесь

$$S(u, v, \rho) = \frac{1}{u} \left(\rho_t \rho_u^2 + \frac{\rho_u}{\sigma} + F(u, v) \rho_u^3 \right) + \frac{\nu \rho_u^2}{\rho},$$

$$T(u, v, \bar{\rho}) = \frac{1}{v} \left(\bar{\rho}_t \bar{\rho}_v^2 + \frac{\bar{\rho}_v}{\delta} + G(u, v) \bar{\rho}_v^3 \right) + \frac{\nu \bar{\rho}_v^2}{\bar{\rho}},$$

условие (10) следует из (2).

Далее будем полагать, что в любой момент времени $f(t) \leq g(t)$ и, соответственно, $a(t) \leq b(t)$. Для корректного решения системы уравнений второго порядка (9) граничных условий (10) недостаточно. Сформулируем дополнительные условия, используя условия (7). Взяв в них полную производную по времени, получаем равенства

$$u_t(t, a(t)) = -a'(t)u_\rho(t, a(t)), \quad v_t(t, b(t)) = -b'(t)v_\rho(t, b(t)),$$

подставляя которые в систему (1), находим

$$\begin{aligned} u_\rho^2(t, a(t)) + \sigma a'(t)u_\rho(t, a(t)) + \sigma F(0, v(t, a(t))) &= 0, \\ v_\rho^2(t, b(t)) + \delta b'(t)v_\rho(t, b(t)) + \delta G(0, u(t, b(t))) &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что при принятых предположениях $u(t, b(t)) = 0$, после замены переменных имеем

$$a'(t) = -\frac{1}{\sigma \rho_u(t, 0)} - F(0, v(t, a(t)))\rho_u(t, 0), \quad b'(t) = -\frac{1}{\delta \bar{\rho}_v(t, 0)}. \quad (11)$$

Интерполируем неизвестные функции $\rho(t, 0) = a(t)$ и $\bar{\rho}(t, 0) = b(t)$ на отрезке $t \in [t_{k-1}, t_k]$ квадратичными функциями вида

$$\begin{aligned} \rho(t, 0) &= A(t - t_{k-1})(t - t_k) + (\rho(t_k, 0) - \rho(t_{k-1}, 0)) \frac{t - t_{k-1}}{h} + \rho(t_{k-1}, 0), \\ \bar{\rho}(t, 0) &= B(t - t_{k-1})(t - t_k) + (\bar{\rho}(t_k, 0) - \bar{\rho}(t_{k-1}, 0)) \frac{t - t_{k-1}}{h} + \bar{\rho}(t_{k-1}, 0), \end{aligned} \quad (12)$$

где A, B — константы. Запишем для функций (12) равенства (11) в моменты времени $t = t_{k-1}$ и $t = t_k$:

$$\begin{aligned} -Ah + \frac{\rho(t_k, 0) - \rho(t_{k-1}, 0)}{h} &= -\frac{1}{\sigma \rho_u(t_{k-1}, 0)} - F(0, v(t_{k-1}, a(t_{k-1})))\rho_u(t_{k-1}, 0), \\ Ah + \frac{\rho(t_k, 0) - \rho(t_{k-1}, 0)}{h} &= -\frac{1}{\sigma \rho_u(t_k, 0)} - F(0, v(t_k, a(t_k)))\rho_u(t_k, 0), \\ -Bh + \frac{\bar{\rho}(t_k, 0) - \bar{\rho}(t_{k-1}, 0)}{h} &= -\frac{1}{\delta \bar{\rho}_v(t_{k-1}, 0)}, \\ Bh + \frac{\bar{\rho}(t_k, 0) - \bar{\rho}(t_{k-1}, 0)}{h} &= -\frac{1}{\delta \bar{\rho}_v(t_k, 0)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Складывая в (13) первое уравнение со вторым, а третье — с четвертым, получаем дополнительные граничные условия для задачи (9), (10)

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\rho(t_k, u)}{h} + \frac{1}{\sigma \rho_u(t_k, u)} + F(u, v(t_k, a(t_k)))\rho_u(t_k, u) \right) \Big|_{u=0} &= P_{k-1}, \\ \left(\frac{2\bar{\rho}(t_k, v)}{h} + \frac{1}{\delta \bar{\rho}_v(t_k, v)} \right) \Big|_{v=0} &= Q_{k-1}, \end{aligned} \quad (14)$$

где значения

$$\begin{aligned} P_{k-1} &= \frac{2\rho(t_{k-1}, 0)}{h} - \frac{1}{\sigma \rho_u(t_{k-1}, 0)} - F(0, v(t_{k-1}, a(t_{k-1})))\rho_u(t_{k-1}, 0), \\ Q_{k-1} &= \frac{2\bar{\rho}(t_{k-1}, 0)}{h} - \frac{1}{\delta \bar{\rho}_v(t_{k-1}, 0)} \end{aligned}$$

определяются на предыдущем шаге (при $k > 1$). Очевидно, что $\rho(0, 0) = \bar{\rho}(0, 0) = R$. Можно показать, что из условия (10) следует $\rho_u(0, 0) = -1/\sqrt{\sigma f'(t)}$, $\bar{\rho}_v(0, 0) = -1/\sqrt{\delta g'(t)}$, что соответствует соотношениям (4). Это позволяет найти необходимые на первом шаге значения P_0 и Q_0 .

Таким образом, на шаге t_k получаем краевую задачу (9), (10), (14), решение которой, так же как в [18], будем строить итерационно, на основе метода коллокаций [19]. Представим решение в виде $\rho(t_k, u) = \lambda(u) + \mu(u)$, $\bar{\rho}(t_k, v) = \bar{\lambda}(v) + \bar{\mu}(v)$, где $\lambda(u)$, $\bar{\lambda}(v)$ — частное решение системы (9); $\mu(u)$, $\bar{\mu}(v)$ — решение соответствующей задачи для однородной системы

$$\mu'' = 0, \quad \bar{\mu}'' = 0; \quad (15)$$

$$\mu|_{u=U} = R - \lambda(U), \quad \bar{\mu}|_{v=V} = R - \bar{\lambda}(V); \quad (16)$$

$$\left. \left(\frac{2(\lambda(u) + \mu(u))}{h} + \frac{1}{\sigma(\lambda'(u) + \mu'(u))} + F(u, v(t_k, a(t_k)))(\lambda'(u) + \mu'(u)) \right) \right|_{u=0} = P_{k-1}, \quad (17)$$

$$\left. \left(\frac{2(\bar{\lambda}(v) + \bar{\mu}(v))}{h} + \frac{1}{\delta(\bar{\lambda}'(v) + \bar{\mu}'(v))} \right) \right|_{v=0} = Q_{k-1}.$$

В этом случае итерационная процедура имеет вид

$$\lambda_0 = 0, \quad \bar{\lambda}_0 = 0; \quad (18)$$

$$\mu_n = c(u - U) + R - \lambda_n(U), \quad \bar{\mu}_n = d(v - V) + R - \bar{\lambda}_n(V); \quad (19)$$

$$\rho_n = \lambda_n + \mu_n, \quad \bar{\rho}_n = \bar{\lambda}_n + \bar{\mu}_n; \quad (20)$$

$$\lambda''_{n+1} = S(u, v, \rho_n), \quad \bar{\lambda}''_{n+1} = T(u, v, \bar{\rho}_n), \quad (21)$$

где ρ_n , λ_n , μ_n , $\bar{\rho}_n$, $\bar{\lambda}_n$, $\bar{\mu}_n$ — n -е итерации решений; значения c , d задачи (15)–(17) — отрицательные корни квадратных уравнений, получаемых путем подстановки (19) в граничные условия (17). Заметим, что дискриминанты этих уравнений положительны и решение (19) определяется однозначно при найденном частном решении λ_n , $\bar{\lambda}_n$. Для решения системы (21) применим методом коллокаций [19]. Для этого разложим правые части уравнений по радиальным базисным функциям (РБФ)

$$S(u, v, \rho_n) = \sum_{k=1}^K \alpha_{n+1}^{(k)} \varphi^{(k)}(u), \quad T(u, v, \bar{\rho}_n) = \sum_{m=1}^M \beta_{n+1}^{(m)} \varphi^{(m)}(v). \quad (22)$$

Здесь $\varphi^{(k)}(w) = \varphi^{(k)}(|w - w_k|)$ — РБФ; w_k — точки коллокации. Расположим точки коллокации u_1, u_2, \dots, u_K на отрезке $[0, U]$, а точки коллокации v_1, v_2, \dots, v_M — на отрезке $[0, V]$. Записав в этих точках соответствующие уравнения (22), получаем две системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $\alpha_{n+1}^{(k)}$, $\beta_{n+1}^{(m)}$:

$$S(u, v, \rho_n)|_{u=u_i} = \sum_{k=1}^K \alpha_{n+1}^{(k)} \varphi^{(k)}(u_i), \quad i = 1, \dots, K; \quad (23)$$

$$T(u, v, \bar{\rho}_n)|_{v=v_j} = \sum_{m=1}^M \beta_{n+1}^{(m)} \varphi^{(m)}(v_j), \quad j = 1, \dots, M. \quad (24)$$

Поскольку каждой РБФ $\varphi^{(k)}(w)$ соответствует функция $\psi^{(k)}(w)$, такая что $d^2\psi^{(k)}/dw^2 = \varphi^{(k)}$, решения систем (23), (24) определят следующую итерацию частного решения системы (9):

$$\lambda_{n+1} = \sum_{k=1}^K \alpha_{n+1}^{(k)} \psi^{(k)}(u), \quad \bar{\lambda}_{n+1} = \sum_{m=1}^M \beta_{n+1}^{(m)} \psi^{(m)}(v).$$

Значение переменной v в левой части i -го уравнения системы (23) находится из условия $\bar{\rho}_n(t_k, v) = \rho_n(t_k, u_i)$. Аналогичным образом значение переменной u в левой части j -го уравнения системы (24) определяется условием $\rho_n(t_k, u) = \bar{\rho}_n(t_k, v_j)$. Поскольку $f(t_k) < g(t_k)$, возможна ситуация, когда $\rho_n(t_k, 0) < \bar{\rho}_n(t_k, v_j) \leq \bar{\rho}_n(t_k, 0)$. В этом случае принимается значение $u = 0$.

Производные по времени в правых частях (23), (24) вычисляются с помощью метода конечных разностей. Как правило, в подобных алгоритмах применяются разностные схемы первого порядка. В рассматриваемом случае, когда область решения с каждым шагом увеличивается, такая схема принимается в виде

$$\frac{\partial \rho_n(t_k, u_i)}{\partial t} = \begin{cases} \frac{\rho_n(t_k, u_i) - \rho(t_{k-1}, u_i)}{h}, & u_i \leq f(t_{k-1}), \\ \frac{\rho_n(t_k, u_i)}{h_k^{(i)}}, & u_i > f(t_{k-1}), \end{cases} \quad (25)$$

где $h_k^{(i)} = t_k - t^{(i)}$; $t^{(i)} = f^{-1}(u_i)$; $t = f^{-1}(u)$ — функция, обратная $u = f(t)$. Таким образом, $t^{(i)}$ — момент времени, когда $f(t) = u_i$. Производная $\partial \bar{\rho}_n(t_k, v_j) / \partial t$ находится по формуле (25), если заменить в правой части u_i и $f(t)$ на v_j и $g(t)$ соответственно. Для расчетов в более простом случае [18] использование такой схемы позволило получить результаты, близкие к точному решению. Однако при достаточно большом шаге по времени итерационные процедуры сходятся медленно и не всегда стабильно. Поэтому в данной работе для проведения анализа точности решения впервые для таких задач была предложена разностная схема второго порядка

$$\frac{\partial \rho_n(t_k, u_i)}{\partial t} = \begin{cases} \frac{3\rho_n(t_k, u_i) - 4\rho(t_{k-1}, u_i) + \rho(t_{k-2}, u_i)}{2h}, & u_i \leq f(t_{k-2}), \\ \frac{2h + h_{k-1}^{(i)}}{h(h + h_{k-1}^{(i)})} \rho_n(t_k, u_i) - \frac{h + h_{k-1}^{(i)}}{hh_{k-1}^{(i)}} \rho(t_{k-1}, u_i), & f(t_{k-2}) < u_i \leq f(t_{k-1}), \\ \frac{2\rho_n(u_i) - \sigma[f'(t^{(i)})]^2 h_k^{(i)}}{h_k^{(i)}}, & u_i > f(t_{k-1}). \end{cases} \quad (26)$$

Первая строка в правой части (26) — классическая трехточечная схема на равномерной сетке, вторая строка — трехточечная схема на неравномерной сетке (в этом случае $\rho(t_{k-2}, u_i) = 0$). Наконец, третья схема построена по двум точкам, в одной из которых известна производная.

Итерационный процесс завершается, когда n -я и $(n+1)$ -я итерации достаточно близки и в качестве решения задачи (9), (10) в момент t_k принимаются непрерывно дифференцируемые по пространственным переменным функции $\rho(t_k, u) = \lambda_{n+1}(u) + \mu_{n+1}(u)$, $\bar{\rho}(t_k, v) = \bar{\lambda}_{n+1}(v) + \bar{\mu}_{n+1}(v)$. При этом определяются положения нулевых фронтов в момент t_k :

$$a(t_k) = \rho(t_k, 0), \quad b(t_k) = \bar{\rho}(t_k, 0). \quad (27)$$

Непрерывность функций позволяет определить без потери точности обратные функции $u(t_k, \rho)$, $\rho \in [a(0), a(t_k)]$ и $v(t_k, \rho)$, $\rho \in [b(0), b(t_k)]$, являющиеся приближенным решением задачи (1), (2) на шаге t_k .

В случае $a'(t) < 0$, $b'(t) < 0$ решение строится аналогичным образом.

4. Точное решение. Поскольку для предложенного численного метода доказать сходимость вряд ли возможно (это не удается даже для отдельных уравнений), особую актуальность приобретает верификация выполненных расчетов. В подобных случаях обычно применяются точные решения (см., например, [18]).

Рассмотрим задачу (1) в случае, когда функции $F(u, v)$ и $G(u, v)$ линейные:

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{1}{\sigma} u_{\rho}^2 + \frac{\nu uu_{\rho}}{\rho} + \alpha_1 u + \alpha_2 v, \quad v_t = vv_{\rho\rho} + \frac{1}{\delta} v_{\rho}^2 + \frac{\nu vv_{\rho}}{\rho} + \beta_1 u + \beta_2 v. \quad (28)$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Решение (28) будем искать в виде

$$u = \sum_{k=1}^n A_k(t) \rho^k, \quad v = \sum_{k=1}^n B_k(t) \rho^k, \quad (29)$$

т. е. в виде полиномов по степеням ρ с коэффициентами, зависящими от t . Индукцией по n можно показать, что ненулевыми могут быть только коэффициенты с номерами 0 и 2, которые удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ):

$$A'_0(t) = 2(1 + \nu)A_0A_2 + \alpha_1A_0 + \alpha_2B_0, \quad B'_0(t) = 2(1 + \nu)B_0B_2 + \beta_1A_0 + \beta_2B_0; \quad (30)$$

$$A'_2(t) = 2(1 + \nu + 2/\sigma)A_2^2 + \alpha_1A_2 + \alpha_2B_2, \quad B'_2(t) = 2(1 + \nu + 2/\delta)B_2^2 + \beta_1A_2 + \beta_2B_2. \quad (31)$$

Любые функции, удовлетворяющие СОДУ (30), (31), позволяют построить решение системы (28) вида (29). Однако для удобства дальнейшего использования полученных решений примем упрощающие предположения. Во-первых, положим, что A_2 и B_2 — константы, тогда (31) является системой алгебраических уравнений второй степени. Во-вторых, примем $\alpha_1 = -2A_2(1 + \nu)$, $\beta_2 = -2B_2(1 + \nu)$. Тогда система (30), (31) упрощается и принимает вид

$$4A_2^2/\sigma + \alpha_2B_2 = 0, \quad 4B_2^2/\delta + \beta_1A_2 = 0; \quad (32)$$

$$A'_0(t) = \alpha_2B_0(t), \quad B'_0(t) = \beta_1A_0(t). \quad (33)$$

Нетрудно показать, что (32) имеет единственный действительный корень $A_2 = -\sqrt[3]{\sigma^2\delta\alpha_2^2\beta_1}/4$, $B_2 = -\sqrt[3]{\sigma\delta^2\alpha_2\beta_1^2}/4$.

Пусть $\alpha_2\beta_1 = \lambda^2 > 0$. Тогда общее решение СОДУ (33) имеет вид

$$A_0(t) = c_{11} \exp(\lambda t) + c_{12} \exp(-\lambda t), \quad B_0(t) = c_{21} \exp(\lambda t) + c_{22} \exp(-\lambda t),$$

где $c_{11} = c_{21}\sqrt{\alpha_2/\beta_1}$; $c_{12} = -c_{22}\sqrt{\alpha_2/\beta_1}$. Добавив условия $c_{11} + c_{12} = -R^2A_2$, $c_{21} + c_{22} = -R^2B_2$, которые позволяют рассматривать решение (29) в виде диффузионной волны, порожденной краевыми условиями при $\rho = R$, получаем

$$c_{11} = -\frac{A_2R^2(1 + \theta)}{2}, \quad c_{12} = -\frac{A_2R^2(1 - \theta)}{2}, \quad c_{21} = -\frac{B_2R^2(1 + \theta)}{2\theta}, \quad c_{22} = \frac{B_2R^2(1 - \theta)}{2\theta},$$

где $\theta = \sqrt[6]{(\delta^2\alpha_2)/(\sigma^2\beta_1)} > 0$. Итак, получено решение системы (28) вида

$$u = u_*(t, \rho) = A_0(t) + A_2\rho^2 = -A_2R^2[\operatorname{ch}(\lambda t) + \theta \operatorname{sh}(\lambda t)] + A_2\rho^2; \quad (34)$$

$$v = v_*(t, \rho) = B_0(t) + B_2\rho^2 = -\frac{B_2R^2}{\theta}[\operatorname{sh}(\lambda t) + \theta \operatorname{ch}(\lambda t)] + B_2\rho^2. \quad (35)$$

При $t > 0$ из (34), (35) следуют равенства (напомним, что $\rho > 0$)

$$u_* \Big|_{\rho=R\sqrt{\operatorname{ch}(\lambda t)+\theta \operatorname{sh}(\lambda t)}} = 0, \quad v_* \Big|_{\rho=R\sqrt{[\operatorname{sh}(\lambda t)+\theta \operatorname{ch}(\lambda t)]/\theta}} = 0, \quad (36)$$

т. е. нулевые фронты различаются, если $\theta \neq 1$ (при $\theta = 1$ они совпадают). На нулевых фронтах (36) выполнены равенства

$$v_*|_{u*=0} = -\frac{2B_2R^2(1-\theta^2)}{\theta} \operatorname{sh}(\lambda t), \quad u_*|_{v*=0} = \frac{2A_2R^2(1-\theta^2)}{\theta} \operatorname{sh}(\lambda t). \quad (37)$$

Пусть $0 < \theta < 1$. Тогда из (37) следует $v_*|_{u*=0} \geq 0$, $u_*|_{v*=0} \leq 0$. Это означает, что при $R \leq \rho \leq R\sqrt{\operatorname{ch}(\lambda t) + \theta \operatorname{sh}(\lambda t)}$ диффузионная волна определяется равенствами (34), (35); при $\rho > R\sqrt{\operatorname{ch}(\lambda t) + \theta \operatorname{sh}(\lambda t)}$ справедливо равенство $u(t, \rho) = 0$, а $v(t, \rho)$ является решением задачи

$$v_t = vv_{\rho\rho} + \frac{1}{\delta}v_{\rho}^2 + \frac{\nu vv_{\rho}}{\rho} + \beta_2 v, \quad v|_{\rho=R\sqrt{\operatorname{ch}(\lambda t) + \theta \operatorname{sh}(\lambda t)}} = -\frac{2B_2R^2(\theta+1)(1-\theta)}{\theta} \operatorname{sh}(\lambda t).$$

При $\theta > 1$ структура диффузионной волны аналогична, но функции u и v меняются ролями. Наконец, при $\theta = 1$ нулевые фронты для обеих искомых функций совпадают и имеет место случай, рассмотренный в работе [16].

ЗАМЕЧАНИЕ. Решение (34), (35) в случае $\nu = 0$ совпадает с решением, построенным в работе [18. С. 75].

5. Тестовые примеры. Для верификации предложенного численного алгоритма проведено сравнение результатов расчетов с известными точными решениями, полученными в п. 4.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим случай, когда нулевые фронты для двух искомых функций совпадают. Пусть в системе (28) $\sigma = \delta = 5$, $R = 1$, $\alpha_2 = \beta_1 = 0,2$. Тогда решение системы (32) имеет вид $A_2 = B_2 = -0,25$, $\lambda = 0,2$, $\theta = 1$, $\alpha_1 = \beta_2 = 1$ при $\nu = 1$, $\alpha_1 = \beta_2 = 1,5$ при $\nu = 2$. Этим параметрам соответствуют функции $f(t) = g(t) = 0,25(e^{0,2t} - 1)$ в краевых условиях (2) и точное решение

$$u_1(t, \rho) = v_1(t, \rho) = 0,25(e^{0,2t} - \rho^2), \quad (38)$$

имеющее нулевой фронт

$$a_1(t) = b_1(t) = e^{0,1t}.$$

В качестве РБФ в расчетах были приняты мультиквадратичные функции [23] $\varphi(w) = \sqrt{1 + \varepsilon^2(w - w_i)^2}$, где w_i — точки коллокации. Значение параметра формы ε было выбрано в соответствии с [24]. Во всех рассмотренных вариантах расчетов получены одинаковые функции $u(t, \rho)$ и $v(t, \rho)$, близкие к точному решению (38). Наибольшая погрешность наблюдалась в точке $\rho = a(t)$, где $a(t)$ — найденный в процессе решения нулевой фронт (27), поэтому точность численного решения в момент $t = t_k$ оценивалась разностью $\delta_1(t_k) = |u(t_k, a(t_k)) - u_1(t_k, a(t_k))| = |u_1(t_k, a(t_k))|$. Точность определения нулевого фронта оценивалась величиной $\delta_2(t_k) = |a(t_k) - a_1(t_k)|$. В таблице приведены оценки δ_1 , δ_2 в моменты времени $t = 0,5$; $1,0$ при различных величине шага по времени h и числе точек коллокации $K = M$. Обе оценки уменьшаются с уменьшением шага и увеличением количества точек коллокации, что свидетельствует о сходимости алгоритма относительно этих параметров. При этом величина шага по времени оказывает более существенное влияние на точность решения, чем число точек коллокации. Заметим, что применение разностной схемы второго порядка для вычисления производных по времени обеспечило стабильную сходимость итерационных процессов.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим случай, когда нулевые фронты $a(t)$ и $b(t)$ различны, а именно $a(t) < b(t)$. В системе (28) положим $\sigma = 8,64$, $\delta = 5$, $R = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0,2$. Тогда решение системы (32) имеет вид $A_2 = -0,36$, $B_2 = -0,3$, $\lambda = 0,2$, $\theta = 5/6$, $\alpha_1 = 1,44$, $\beta_2 = 1,2$ при $\nu = 1$, $\alpha_1 = 2,16$, $\beta_2 = 1,8$ при $\nu = 2$. Этим параметрам соответствуют функции

Погрешности численных решений $\delta_1(t)$ и положения найденных нулевых фронтов $\delta_2(t)$ в примере 1

ν	h	K	$\delta_1 \cdot 10^4$		$\delta_2 \cdot 10^4$	
			$t = 0,5$	$t = 1$	$t = 0,5$	$t = 1$
1	0,10	8	2,26	2,42	4,30	4,39
1	0,10	16	2,06	2,37	4,02	4,29
1	0,10	32	2,00	2,23	3,92	4,03
1	0,05	8	0,87	1,35	1,65	2,45
1	0,05	16	0,83	1,33	1,57	2,42
1	0,05	32	0,83	1,33	1,55	2,42
2	0,10	8	2,27	2,46	4,32	4,44
2	0,10	16	2,12	2,27	3,95	4,11
2	0,10	32	2,07	2,26	3,92	4,09
2	0,05	8	0,88	1,34	1,66	2,43
2	0,05	16	0,84	1,32	1,58	2,41
2	0,05	32	0,83	1,32	1,55	2,41

$f(t) = 0,36 \operatorname{ch} t + 0,3 \operatorname{sh} t - 0,36$, $g(t) = 0,3 \operatorname{ch} t + 0,36 \operatorname{sh} t - 0,3$ в краевых условиях (2) и точное решение вида (34), (35):

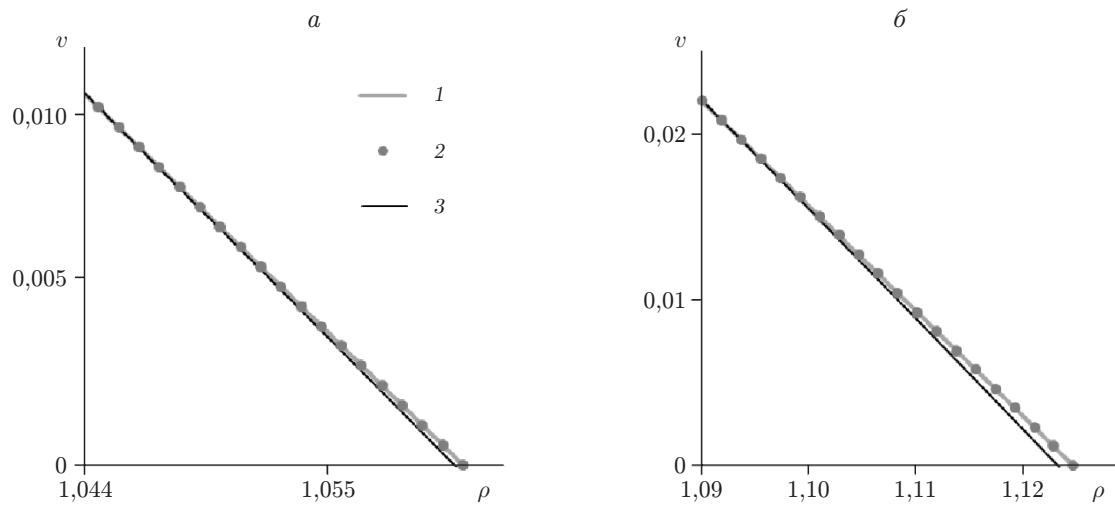
$$u_2(t, \rho) = 0,36 \operatorname{ch} t + 0,3 \operatorname{sh} t - 0,36\rho^2, \quad v_2(t, \rho) = 0,3 \operatorname{ch} t + 0,36 \operatorname{sh} t - 0,3\rho^2. \quad (39)$$

Нулевой фронт для функции $u_2(t, \rho)$ имеет вид $a_2(t) = \sqrt{\operatorname{ch} t + 5 \operatorname{sh} t / 6}$. Поскольку решение (39) имеет смысл только при $R \leq \rho \leq a_2(t)$, оно сравнивалось с численными решениями на этом промежутке. Для анализа точности численных решений в примере 2 использовались следующие оценки: $\delta_3(t_k) = |u(t_k, a(t_k)) - u_2(t_k, a(t_k))| = |u_2(t_k, a(t_k))|$ — наибольшее отклонение функции u от точного решения, наблюдаемое на фронте волны; $\delta_4(t_k) = |a(t_k) - a_2(t_k)|$ — погрешность определения нулевого фронта функции u ; $\delta_5(t_k) = |v(t_k, a(t_k)) - v_2(t_k, a(t_k))|$ — наибольшее отклонение функции v от точного решения. Расчеты были проведены для тех же значений параметров $\nu, h, K = M$, что и в примере 1. Оценки $\delta_3, \delta_4, \delta_5$ имеют тот же порядок, что и δ_1, δ_2 . Также $\delta_3, \delta_4, \delta_5$ уменьшаются с уменьшением шага по времени и увеличением числа точек коллокации. Таким образом, как и в примере 1, наблюдается сходимость алгоритма численного решения относительно этих параметров.

Дополнительно в области $\rho > a_2(t)$ определялась функция v — решение задачи (6), которое было получено с помощью численного алгоритма, предложенного в [25]. На рисунке видно, что численное решение, полученное при реализации алгоритма, предложенного в настоящей работе, близко к точному решению. Также следует отметить, что оба эти решения отличаются от решения $v_2(t, \rho)$. Заметим, что в отличие от двухэтапного решения задачи с заданными нулевыми фронтами [17] предложенный в данной работе алгоритм позволяет с помощью единой процедуры найти на каждом шаге функцию $u(t_k, \rho), \rho \in [R, a(t_k)]$ и функцию $v(t_k, \rho), \rho \in [R, b(t_k)]$.

Заключение. В работе построены и изучены решения, имеющие вид диффузионной волны, распространяющейся по покоящейся среде с конечной скоростью, для систем нелинейных параболических уравнений второго порядка. Впервые рассмотрена задача об инициировании диффузионной волны в случаях сферической и цилиндрической симметрии. Доказана теорема существования и единственности, разработан численный метод, построено точное решение, а также дано обоснование того, что диффузионная волна состоит из трех частей, причем в частном случае две части могут совпасть.

Проведенный вычислительный эксперимент показал эффективность предложенного алгоритма решения как в случае двухчастной диффузионной волны, так и в случае трехчастной. Наблюдается сходимость численных решений к точному с уменьшением шага по



Функция $v(t, \rho)$ при $\rho > a(t)$ в примере 2 в различные моменты времени:
 a — $t = 0,5$, b — $t = 1,0$; 1 — решение задачи (1), (2), 2 — решение задачи (6),
3 — точное решение (39)

времени и увеличением числа точек коллокации. Применение для рассматриваемого типа задач формулы численного дифференцирования второго порядка позволило повысить стабильность сходимости итерационных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vazquez J. The porous medium equation: mathematical theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.
2. Coussy O. Poromechanics. Chichester: Wiley and Sons, 2004.
3. Самарский А. А. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. М.: Наука, 1987.
4. Баренблatt Г. И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблatt, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. М.: Недра, 1972.
5. Леонтьев Н. Е., Роцин Е. И. Модель течения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью внутри высокопористой среды // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2018. № 6. С. 87–93.
6. Андреев В. К. Современные математические модели конвекции / В. К. Андреев, Ю. А. Гапоненко, О. Н. Гончарова, В. В. Пухначев. М.: Физматлит, 2008.
7. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н., Овчарова А. С. Моделирование конвекции в двухфазной системе в условиях диффузионного испарения в замкнутой области // ПМТФ. 2023. Т. 64, № 4. С. 14–26.
8. Dall'Aglio A., Orsina L., Petitta F. Existence of solutions for degenerate parabolic equations with singular terms // Nonlinear Anal. 2016. V. 131. P. 273–288.
9. Mecheter R., Mokhtari F. Existence results for some nonlinear parabolic equations with degenerate coercivity and singular lower-order terms // Math. Bohemica. 2022. V. 148. N 4. P. 561–581.
10. Winkert P., Zacher R. Global a priori bounds for weak solutions to quasilinear parabolic equations with nonstandard growth // Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl. 2016. V. 145. P. 1–23.

11. **Shangerganesh L., Nyamoradi N., Deiva Mani V. N., Karthikeyan S.** On the existence of weak solutions of nonlinear degenerate parabolic system with variable exponents // *Comput. Math. Appl.* 2018. V. 75, iss. 1. P. 322–334.
12. **Li Q.** Weak Harnack estimates for supersolutions to doubly degenerate parabolic equations // *Nonlinear Anal.* 2018. V. 170. P. 88–122.
13. **Almeida R. M. P., Antontsev S. N., Duque J. C. M.** On a nonlocal degenerate parabolic problem // *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 2016. V. 27. P. 146–157.
14. **Grillo G., Meglioli G., Punzo F.** Global existence of solutions and smoothing effects for classes of reaction-diffusion equations on manifolds // *J. Evolut. Equat.* 2021. V. 21. P. 2339–2375.
15. **Сидоров А. Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
16. **Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спевак Л. Ф.** Построение решений краевой задачи с вырождением для нелинейной параболической системы // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 4. С. 64–78.
17. **Казаков А. Л., Спевак Л. Ф.** Решения нелинейной вырождающейся системы реакция — диффузия типа диффузионных волн с двумя фронтами // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 6. С. 104–115.
18. **Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спевак Л. Ф.** Задача об инициировании диффузионной волны для нелинейной параболической системы второго порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 2. С. 67–86.
19. **Chen C. S.** Recent advances in radial basis function collocation methods / C. S. Chen, W. Chen, Z. J. Fu. Berlin; Heidelberg: Springer, 2013.
20. **Buhmann M. D.** Radial basis functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
21. **Fornberg B., Flyer N.** Solving PDEs with radial basis functions // *Acta Numer.* 2015. V. 24. P. 215–258.
22. **Казаков А. Л., Лемперт А. А.** О существовании и единственности решения краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.
23. **Kansa E. J.** Multiquadratics — a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. 1. Surface approximations and partial derivative estimates // *Comput. Math. Appl.* 1990. V. 19, iss. 8/9. P. 127–145.
24. **Franke R.** Scattered data interpolation: Tests of some methods // *Math. Comput.* 1982. V. 38, N 157. P. 181–200.
25. **Казаков А. Л., Нефедова О. А., Спевак Л. Ф.** Решение задач об инициировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, № 6. С. 1047–1062.

Поступила в редакцию 18/X 2023 г.,
после доработки — 7/XII 2023 г.
Принята к публикации 25/XII 2023 г.