11. **Truesdell C.** Invariant and complete stress functions for general continua // Arch. Rat. Mech. Anal.— 1959.— V. 4, N 1.
12. **Остросаблин Н. И., Сенашов С. И.** Общие решения и симметрии уравнений линейной теории упругости // ДАН СССР.— 1992.— Т. 322, № 3.
13. **Norris A. N.** On the acoustic determination of the elastic moduli of anisotropic solids and acoustic conditions for the existence of symmetry planes // Quart. J. Mech. and Appl. Math.— 1989.— V. 42, N 3.
14. **Остросаблин Н. И.** О матрице коэффициентов в уравнениях линейной теории упругости // ДАН СССР.— 1991.— Т. 321, № 1.
15. **Остросаблин Н. И.** Об уравнениях линейной теории упругости //ПМТФ.— 1992.— № 3.
16. **Борок В. М.** О системах линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика.— 1957.— № 1.
17. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
18. **Marciniak J. J.** The generalized scalar wave equation and linear differential invariants in linear elasticity // Intern. J. Engng Sci.— 1989.— V. 27, N 6.
19. **Остросаблин Н. И.** Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1986.— Вып. 75.
20. **Zhang Hong-qing, Yang Guang.** Constructions of the general solution for a system of partial differential equations with variable coefficients // Appl. Math. and Mech. (Engl. Ed.).— 1991.— V. 12, N 2.

г. Новосибирск *Поступила 16/X 1992 г.*

УДК 539.3

В. М. Александров, Б. И. Сметанин

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ САКА ПРИ ДЕТАЛЬНОМ УЧЕТЕ МЕЖАТОМНЫХ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ

В [1] рассмотрена задача Гриффитса при детальном учете межатомных сил сцепления, действующих между берегами трещины. При этом силы сцепления вносятся в граничные условия, в результате чего задача приводится к нелинейному интегродифференциальному уравнению. В настоящей работе в аналогичной постановке рассмотрена осесимметричная задача о растяжении упругого пространства, ослабленного круглой в плане плоской трещиной. Задача приведена к решению нелинейного интегродифференциального уравнения, которое решается методами регулярных и сращиваемых асимптотических разложений. С использованием одного из найденных асимптотических решений получено также численное решение исследуемого интегродифференциального уравнения. Параметры критического состояния трещины определяются из условия плавности смыкания берегов трещины.

1. Пусть упругое пространство с правильной атомной решеткой содержит в плоскости $z = 0$ круглую трещину радиуса a. Трещина находится в раскрытом состоянии под действием приложенных на бесконечности растягивающих усилий $\sigma_z = p = \text{const}$. При превышении нормального межатомного расстояния b между слоями атомов возникают силы сцепления, интенсивность которых σ_z может быть взята в виде [1]

$$\sigma_z = 2\theta\varepsilon g(\varepsilon/d) \quad (\theta = G(1-\nu)^{-1}). \tag{1.1}$$

Здесь G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; $\varepsilon = \Delta b/b$; $b + \Delta b$ — расстояние между слоями атомов; $d = \delta/b$ — относительное расстояние между слоями атомов, при котором силы сцепления достигают максимума, равного σ_p — теоретическому пределу прочности тела. Функция $g(x)$ монотонно убывающая не медленнее, чем $x^{-\alpha}$ ($\alpha > 2$), удовлетворяющая условиям

$$g(0) = 1, \quad g(\infty) = 0, \quad g(1) + g'(1) = 0.$$

На основании (1.1) найдем плотность эффективной поверхностной энергии среды [2]

$$\gamma = \frac{b}{2}\int\limits_{d}^{\infty} \sigma_z d\xi = \frac{\delta\sigma_p I}{2g(1)} \qquad \left(I = \int\limits_{1}^{\infty} xg(x)\, dx \right). \tag{1.2}$$

Пусть $\Gamma(r) = 2u_z(r, +0)$ — раскрытие трещины (u_z — компонента вектора перемещения). Будем считать, что трещина начинается там, где расстояние между слоями атомов становится равным $b + \delta$. Значит, на контуре трещины $\Gamma(a) = 0$ и $\sigma_z(a, \pm 0) = \sigma_p$. Учет межатомных сил сцепления приводит к следующим граничным условиям задачи:

$$z = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad (0 \leqslant r < \infty), \quad u_z = 0 \quad (a < r < \infty),$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_p}{g(1)} \left(1 + \frac{\Gamma}{\delta} \right) g \left(1 + \frac{\Gamma}{\delta} \right) \quad (0 \leqslant r \leqslant a).$$

На бесконечности $\sigma_z = p$. Будем пренебрегать тем, что в силу (1.1) в окрестности контура трещины задача физически нелинейна, и считать справедливыми всюду вне трещины уравнения линейной теории упругости. Применение интегрального преобразования Ханкеля к полученной задаче для функции $\Gamma(r)$ приводит ее к решению нелинейного интегродифференциального уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \int\limits_0^1 x\Gamma(x)\, dx \int\limits_0^{\infty} J_0(ur) J_0(ux)\, du = \frac{1}{\lambda}[f(\Gamma) - p], \tag{1.3}$$

$$\Gamma(1) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \quad f(\Gamma) = (1 + \Gamma) g(1 + \Gamma)/g(1),$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя;

$$\Gamma_* = \Gamma/\delta; \quad p_* = p/\sigma_p; \quad r_* = r/a; \quad \lambda = b[4ag(1)]^{-1}.$$

Звездочка в (1.3) и ниже опущена. Критическую нагрузку p будем определять из условия [3]

$$\Gamma'(1) = 0. \tag{1.4}$$

Обращая стоящий в левой части (1.3) оператор, приведем уравнение (1.3) к виду

$$\Gamma(r) = 2p(\pi\lambda)^{-1}\sqrt{1 - r^2} - \Lambda f(\Gamma)/\lambda, \quad \Gamma(1) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \tag{1.5}$$

$$\Lambda\omega = \frac{2}{\pi}\int\limits_r^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \int\limits_0^{\xi} \frac{x\omega(x)}{\sqrt{\xi^2 - x^2}}\, dx.$$

Условие (1.4) с учетом (1.5) приводит к следующему представлению величины p:

$$p = \int\limits_0^1 \frac{xf(\Gamma)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx. \tag{1.6}$$

Учитывая, что при $x \in [0, \infty)$ $\max |f(x)| = f(0) = 1$, можно показать, что p не превосходит 1. С этой целью достаточно оценить интеграл (1.6):

$$p \leqslant \int\limits_0^1 \frac{x|f(\Gamma)|}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \leqslant \max_{\Gamma} |f(\Gamma)| \int\limits_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 1.$$

Отметим, что тривиальное решение уравнения (1.5), (1.6) $\Gamma = 0$ имеет место при $p = 1$.

2. Решение уравнения (1.5), (1.6) при малых значениях параметра λ будем строить в виде асимптотических разложений

$$\Gamma(r) = \lambda[\Gamma_0(r) + \lambda\Gamma_1(r) + \lambda^2\Gamma_2(r) + O(\lambda^3)]; \tag{2.1}$$

$$p = 1 - \lambda^2[A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + O(\lambda^3)]. \tag{2.2}$$

Коэффициенты A_n ($n = 0, 1, 2$) подлежат определению из вытекающего из (1.4) условия

$$\Gamma_n'(1) = 0 \quad (n = 0, 1, 2). \tag{2.3}$$

Внося (2.1), (2.2) в (1.5), (1.6) и приравнивая выражения при одинаковых степенях λ, получим интегральные уравнения, из которых последовательно находятся функции $\Gamma_0(r)$, $\Gamma_1(r)$ и $\Gamma_2(r)$:

$$\Gamma_n(r) - 2B_0\Lambda(\Gamma_0\Gamma_n) = \Lambda\psi_n - 2A_n\sqrt{1-r^2}/\pi, \tag{2.4}$$

$$\psi_n(r) = [B_0\Gamma_1^2(r) - 3B_1\Gamma_0^2(r)\Gamma_1(r)]\delta_{n2} - B_n\Gamma_0^{n+2}(r) \quad (n = 0, 1, 2),$$

$$B_0 = 1 - \frac{g''(1)}{2g(1)}, \quad B_1 = \frac{g''(1) + (1/3)g'''(1)}{2g(1)}, \quad B_2 = \frac{g'''(1) + (1/4)g^{IV}(1)}{6g(1)}.$$

Здесь δ_{mn} — символ Кронекера. Условие (2.3) приводит к следующим представлениям коэффициентов A_n:

$$A_n = \int_0^1 [2B_0\Gamma_0(x)\Gamma_n(x) + \psi_n(x)]\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (n = 0, 1, 2). \tag{2.5}$$

Отметим, что при $n = 0$ интегральное уравнение (2.4) является нелинейным, при $n = 1, 2$ — линейным. При $n = 0$ с целью исключения из рассмотрения коэффициента разложения B_0 функции $g(x)$ функцию $\Gamma_0(r)$ представим в виде

$$\Gamma_0(r) = C\varphi(r)/B_0.$$

Тогда из (2.4), (2.5) имеем интегральное уравнение для определения $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = C\Lambda\varphi^2 - 2\sqrt{1-r^2}/\pi, \quad C = \left[\int_0^1 \frac{x\varphi^2(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]^{-1}. \tag{2.6}$$

Приближенное решение уравнения (2.6) может быть получено методом последовательных приближений по схеме

$$\varphi_{m+1}(r) = \varphi_0(r) + C_m\Lambda\varphi_m^2 \quad (m = 0, 1, \ldots, M), \tag{2.7}$$

$$\varphi_0(r) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{1-r^2}, \quad C_m = \left[\int_0^1 \frac{x\varphi_m^2(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]^{-1}.$$

При реализации схемы (2.7) для каждого значения m функции $\varphi_m(r)$ могут быть найдены в явном виде.

Для значений $n = 1, 2$ уравнение (2.4), (2.5) целесообразно преобразовать к форме, не содержащей A_n:

$$\Gamma_n(r) - 2B_0\Lambda_1(\Gamma_0\Gamma_n) = \Lambda_1\psi_n \quad (n = 1, 2), \tag{2.8}$$

$$\Lambda_1\omega = \Lambda\omega - \frac{2}{\pi}\sqrt{1-r^2}\int_0^1 \frac{x\omega(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Решение уравнения (2.8) может быть получено методом Бубнова — Галеркина. При реализации этого метода решение уравнения (2.8) будем искать в виде

$$\Gamma_n(r) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-r^2}\sum_{i=0}^{\infty} X_{ni}U_{2i}(r) \quad (n = 1, 2), \tag{2.9}$$

где $U_m(r)$ — многочлены Чебышева второго рода. Применение к уравнению (2.8) с учетом (2.9) процедуры метода Бубнова — Галеркина приводит его к следующим системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов X_{ni} $(n = 1, 2)$:

$$X_{nj} - \frac{4B_0}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} X_{ni} H_{ji} = D_{nj} \quad (j = 0, 1, \ldots), \tag{2.10}$$

$$H_{ji} = 2 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - t^2}{1 - x^2}}\, t\Gamma_0(t)\, P_j(2y^2 - 1)\, U_{2i}(t)\, dx\, dy -$$

$$- \delta_{j0} \int_0^1 x\Gamma_0(x)\, U_{2i}(x)\, dx \quad (t = xy),$$

$$D_{nj} = 2 \int_0^1 \int_0^1 xy\psi_n(xy)\, P_j(2y^2 - 1) \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2}} - \delta_{j0} \int_0^1 \frac{x\psi_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Здесь $P(x)$ — многочлены Лежандра. Так как условие (2.3) было удовлетворено за счет выбора постоянных A_n, то коэффициенты X_{ni}, определяемые из (2.10), должны удовлетворять соотношению

$$\sum_{i=0}^{\infty} (2i + 1) X_{ni} = 0 \quad (n = 1, 2).$$

Непосредственные вычисления по полученным выше формулам проводились для

$$g(x) = \exp(-x). \tag{2.11}$$

В результате этих вычислений определено: $B_0 = 1/2$, $B_1 = 1/3$, $B_2 = -1/8$, $A_0 = 2{,}14$, $A_1 = 20{,}5$, $A_2 = 153$. Системы (2.10) для $n = 1$ и $n = 2$ решались методом редукции.

3. Найденное в п. **2** решение соответствует трещинам большой относительной длины и относительно малого раскрытия. Рассмотрим теперь случай относительно большого раскрытия трещин. С этой целью введем обозначения:

$$\mu = \lambda/p, \qquad \Gamma^1 = \mu\Gamma.$$

В результате уравнение (1.3) примет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) \int_0^1 x\Gamma(x)\, dx \int_0^\infty J_0(ur)\, J_0(ux)\, du = \frac{\mu}{\lambda} f\left(\frac{\Gamma}{\mu}\right) - 1 \quad (0 \leqslant r \leqslant 1); \tag{3.1}$$

$$\Gamma(1) = 0, \qquad \Gamma'(1) = 0. \tag{3.2}$$

В (3.1), (3.2) и далее верхний индекс 1 у Γ опущен. Обращая в (3.1), (3.2) оператор, имеем

$$\Gamma(r) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - r^2} - \frac{2\mu}{\pi\lambda} \int_r^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \int_0^\xi \frac{xf(\Gamma/\mu)}{\sqrt{\xi^2 - x^2}}\, dx \quad (0 \leqslant r \leqslant 1). \tag{3.3}$$

Это уравнение эквивалентно (3.1), (3.2) при выполнении соотношения

$$\int_0^1 \frac{xf(\Gamma/\mu)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \frac{\lambda}{\mu}, \tag{3.4}$$

следующего из второго условия (3.2). Для решения уравнения (3.3), (3.4) при малых значениях параметра μ применим метод сращиваемых асимптотических разложений [4]. Внешнее (проникающее) решение вне контура трещины при $\mu \ll 1$ и с учетом свойств функции $g(x)$ может быть получено из (3.3). Оно имеет вид

$$\Gamma_0(r) = 2\sqrt{1 - r^2}/\pi.$$

Рассмотрим теперь ε-окрестность точки $r = 1$. Введем обозначения:

$$\rho = (1 - r)/\varepsilon, \quad s = (1 - \xi)/\varepsilon, \quad t = (1 - x)/\varepsilon. \tag{3.5}$$

При подходе к границе ε-окрестности внешнее решение с учетом (3.5) примет вид

$$\Gamma_0(r) = 2\sqrt{2\varepsilon\rho}/\pi.$$

Поэтому для сращивания внутреннее решение будем искать в форме

$$\Gamma(r) = \sqrt{\varepsilon}\, q(\rho) + o(\sqrt{\varepsilon}). \tag{3.6}$$

Внося представление (3.6) в (3.3) и переходя к внутренней переменной, найдем

$$q(\rho) = \frac{2}{\pi}\sqrt{2\rho} - \frac{\varkappa}{\pi}\int_0^\rho \frac{ds}{\sqrt{\rho - s}}\int_s^\infty \frac{f(q)}{\sqrt{t - s}}\,dt \quad (0 \leqslant \rho < \infty), \quad \sqrt{\varepsilon} = \mu, \quad \varkappa = \mu^2/\lambda.$$

Меняя затем порядок интегрирования и вычисляя внутренний интеграл, окончательно получим

$$q(\rho) = \frac{2}{\pi}\sqrt{2\rho} - \frac{\varkappa}{\pi}\int_0^\infty f(q)\ln\frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\rho}}{|\sqrt{\zeta} - \sqrt{\rho}|}\,d\zeta \quad (0 \leqslant \rho < \infty). \tag{3.7}$$

Аналогично условие (3.4) примет вид

$$\varkappa J = 1 \qquad \left(J = \int_0^\infty \frac{f(q)\,dt}{\sqrt{2t}}\right). \tag{3.8}$$

Из (3.8) найдем критическое усилие

$$p = \sqrt{\lambda J}. \tag{3.9}$$

Отметим, что Саком в рассматриваемой задаче на основании энергетического принципа Гриффитса для определения критического усилия получена формула [2]

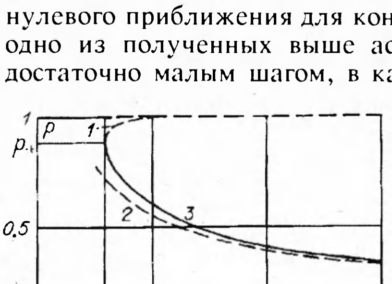
$$p = \sqrt{\pi\theta\gamma/a}, \tag{3.10}$$

которую в используемых здесь безразмерных величинах запишем как

$$p = \sqrt{\pi\lambda I/g(1)}. \tag{3.11}$$

Для случая (2.11) по формулам (3.7)—(3.9) и (1.2), (3.11) получено соответственно $p = \sqrt{2{,}00\pi\lambda}$ и $p = \sqrt{2\pi\lambda}$. Интегральное уравнение (3.7) решалось методом последовательных приближений, в качестве нулевого приближения бралось значение $q_0(\rho) = 2\sqrt{2\rho}/\pi$. При численном интегрировании устранение логарифмической особенности в подынтегральном выражении (3.7) проводилось с использованием интеграла 4.339 [5].

4. Приближенное решение интегрального уравнения (1.5), (1.6) может быть найдено методом последовательных приближений. При этом в качестве нулевого приближения для конкретного значения параметра λ следует взять одно из полученных выше асимптотических решений. Затем, меняя λ с достаточно малым шагом, в качестве нулевого приближения следует брать решение уравнения (1.5), (1.6), найденное для предыдущего значения λ. На рисунке приведены результаты вычисления значений предельной нагрузки p, полученные по формулам (2.2), (3.9) и (1.6) (кривые 1—3 соответственно) при $g(x) = \exp(-x)$. Реализуемой в действительности является нижняя ветвь кривой 3 при $\lambda_*^{-1} < \lambda^{-1}$ и $p < p_*$ ($\lambda_* = 0{,}0865$, $p_* = 0{,}890$), так как у раскрытой трещины при монотонном возра-



стании нагрузки p в первую очередь будет достигнуто напряженно-деформированное состояние, отвечающее этой ветви. При $\lambda^{-1} < \lambda_*^{-1}$ (или $a < 7{,}85b$) предельная нагрузка p равна 1, что соответствует разрушению по достижении теоретического предела прочности. При $\lambda^{-1} \geqslant 55$ расхождение значений p, полученных по формуле Сака (3.11) и по формуле (1.6), не превосходит 3 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров В. М., Кудиш И. И.** Асимптотические методы в задаче Гриффитса // ПММ.— 1989.— Т. 53, вып. 4.
2. **Панасюк В. В.** Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.— Киев: Наук. думка, 1968.
3. **Желтов Ю. П., Христианович С. А.** О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН.— 1955.— № 5.
4. **Найфэ А. Х.** Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.
5. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.

г. Москва,
г. Ростов-на-Дону

Поступила 23/X 1992 г.

УДК 532.546

С. А. Сафонов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ТРЕЩИНОВАТОГО ГЕОТЕРМАЛЬНОГО КОЛЛЕКТОРА

В работе предлагается модель теплообмена в недеформируемом трещиноватом геотермальном коллекторе, в которой учитывается термическое сопротивление блоков породы, составляющих пласт и теплообмен с окружающим пласт массивом.

Тепловой режим вертикального геотермального трещиноватого пласта в условиях неизотермической фильтрации без учета термического сопротивления блоков породы исследовался в [1]. Полуаналитический метод учета теплопотерь в блоках породы был предложен в [2]. В его основу положено допущение, что температура в блоке породы по нормали к его поверхности изменяется по закону $T_b(n, t) = (a + bn + cn^2)\exp(-n/\sqrt{a_b t})$ (n — нормаль, a_b — температуропроводность блока).

Рассмотрим задачу определения теплового режима трещиноватого горизонтального геотермального пласта в условиях неизотермической фильтрации в следующей постановке. Введем систему координат (x, y, z) так, чтобы плоскость $(z = 0)$ совпадала с кровлей пласта. Будем считать, что мощность пласта h много меньше толщины породы над ним. В этом случае задача симметрична относительно плоскости $\{z = h/2\}$. Предположим, что:

1) мощность пласта много меньше его размеров в плоскости Oxy и поле скорости фильтрации двумерно — отсутствует компонента скорости в направлении оси z, перпендикулярной пласту;

2) теплообмен на границе раздела твердой и жидкой фаз происходит настолько интенсивно (число Био $\mathrm{Bi} = \alpha L_b/\lambda_b \gg 1$, α — коэффициент межфазного теплообмена, L_b — характерный размер блока породы, λ_b — теплопроводность его материала), что температуры фаз на границе выравниваются практически мгновенно, по сравнению с характерным временем эксплуатации пласта;

3) блоки породы, составляющие пласт, представляются в виде регулярно уложенных параллелепипедов;