

О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ИЗЛУЧАЮЩЕМ ГАЗЕ

Л. М. Павлова, Ю. Д. Шмыглевский

(Москва)

Рассматриваются плоские и осесимметричные течения излучающего газа в пограничном слое у плоских поверхностей. Такие поверхности ограничивают, например, крыло с ромбовидным профилем и плоскую головную часть тела вращения. Изучено упрощение уравнений, предложенное другими авторами и существенно облегчающее вычисления. Получено неравенство, при выполнении которого такое упрощение допустимо.

1. Введем декартовы координаты x, y, z . Пусть плоскость $y = 0$ совпадает с обтекаемой поверхностью, а ось z перпендикулярна рассматриваемой плоскости течения. В осесимметричном случае ось x перпендикулярна к оси симметрии.

При локальном термодинамическом равновесии и осреднении излучения газа по частотам [1] уравнения пограничного слоя имеют вид [2]

$$\frac{\partial x^v \rho u}{\partial x} + \frac{\partial x^v \rho v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dp}{dx} = \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2)$$

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} + h \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} + h \right) = \frac{\mu}{\rho} \frac{(\partial u)^2}{(\partial y)^2} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial q}{\partial y} + Q \quad (1.3)$$

где v равно нулю или единице соответственно в плоском и осесимметричном течениях, u, v — составляющие скорости по осям x, y соответственно; ρ — плотность газа; $p(x)$ — давление; T — температура; μ — коэффициент вязкости; h — удельная энтальпия газа; k — коэффициент теплопроводности; q — проекция на ось y вектора потока тепла, обусловленного диффузией; Q — поток лучистой энергии.

Величина Q определяется равенствами

$$Q = \kappa \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta J \sin \vartheta = 4\pi \kappa B \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{\rho \kappa} \frac{\partial J}{\partial s} + J = B \quad (1.5)$$

Здесь через s, ϑ, φ обозначены сферические координаты с центром в точке, имеющей координаты x, y, z при $z = 0$, и осью $\vartheta = 0$, совпадающей с осью $-y$. Ось x лежит в плоскости $\varphi = 0$. Величина $J(x, y, z, s, \vartheta, \varphi)$ есть интенсивность потока лучистой энергии по направлению луча $\vartheta = \text{const}, \varphi = \text{const}$, выходящего из точки $x, y, 0$; через κ обозначен коэффициент поглощения газа; величина B определяется равенством $B = \sigma T^4 / \pi$, где σ — постоянная Стефана — Больцмана.

Система уравнений (1.1)–(1.5) должна быть дополнена уравнением состояния и выражениями для величин h, μ, k, κ , а при наличии диффузии — выражением для q и уравнениями диффузии [3].

2. Если излучение отсутствует, то $Q = 0$ и система (1.1)–(1.3) представляет собой хорошо изученную систему дифференциальных уравнений, для которой прямые $x = \text{const}$ будут характеристиками. Последнее свойство уравнений позволяет эффективно использовать численные методы. Если $Q \neq 0$, то уравнения (1.1)–(1.5) становятся интегро-дифференциальными. Применение численных методов в этом случае сопряжено с огромным объемом вычислений.

В ряде работ, например в [4, 5], предлагается пренебрегать изменением потоков излучения по осям x и z . Это позволяет при расчете потока лучистой энергии считать задачу одномерной. Величина Q тогда определяется интегралом по линии $x = \text{const}$. Система уравнений, оставаясь интегро-дифференциальной, приобретает нужное свойство уравнений параболического типа. Численные методы снова оказываются легко применимыми.

Цель настоящей работы заключается в выводе условия, определяющего возможность использования упомянутого упрощения. Допустимой будет считаться погрешность в вычислении Q , не превосходящая погрешности в уравнениях пограничного слоя по сравнению с уравнениями Навье — Стокса. Попутно будет получено нужное выражение для Q . В дальнейшем будем предполагать, что температура стенки совпадает с температурой газа при $y = 0$. Такое совпадение имеет место в случае сублимирующей поверхности.

3. Введем оптическую толщину τ по формуле

$$\tau = \int_0^s \rho \kappa ds \quad (3.1)$$

Интегрирование ведется вдоль луча $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Проведем замену переменной в уравнении (1.5) и выполним формально интегрирование. Это дает

$$J = J_w e^{-\tau_w} + \int_0^{\tau_w} B e^{-\tau} d\tau \quad \text{при } 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad J = \int_0^{\infty} B e^{-\tau} d\tau \quad \text{при } \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi \quad (3.2)$$

Величина J_w есть интенсивность излучения твердой стенки, равная $\beta \sigma T_w^4 / \pi$, где β — коэффициент черноты стенки, а τ_w — оптическая толщина газа между рассматриваемой точкой и стенкой.

Выберем произвольную точку в пограничном слое с координатами $x, y, 0$ и окружим ее замкнутой поверхностью, в каждой точке которой оптическая толщина τ имеет некоторое постоянное значение τ_* . Заменяем в (3.2) интегрирование до τ_w интегрированием до τ_* , если $\tau_* < \tau_w$. Бесконечный предел также заменим величиной τ_* . Полученные таким образом приближенные значения J и Q обозначим через J_* и Q_* . Тогда

$$J_* = J_w t + \int_0^{\tau_0} B e^{-\tau} d\tau \quad \text{при } 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad J_* = \int_0^{\tau_*} B e^{-\tau} d\tau \quad \text{при } \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi \quad (3.3)$$

где $t = e^{-\tau_w}$ при $\tau_* > \tau_w$ и $t = 0$ при $\tau_* \leq \tau_w$; кроме того, $\tau_0 = \min(\tau_*, \tau_w)$.

Обозначим через B_m максимальное значение B в потоке, соответствующее максимальной температуре T_m . Из равенств (1.4), (3.2) и (3.3) находим, что погрешность $Q - Q_*$ равна

$$Q - Q_* = \kappa \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{1/2\pi} \left[\beta B_w (e^{-\tau_w} - t) + \int_{\tau_0}^{\tau_w} B e^{-\tau} d\tau \right] \sin \vartheta d\vartheta + \int_{1/2\pi}^{\pi} d\vartheta \int_{\tau_*}^{\infty} B e^{-\tau} \sin \vartheta d\tau \right\} d\varphi$$

Заменяя величину β ее наибольшим возможным значением 1, величины B_w и B — величиной B_m , получим

$$\Delta Q = Q - Q_* \leq \kappa B_m \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{1/2\pi} (e^{-\tau_w} - t) \sin \vartheta d\vartheta - \int_0^{1/2\pi} (e^{-\tau_w} - e^{-\tau_0}) \sin \vartheta d\vartheta + \int_{1/2\pi}^{\pi} e^{-\tau_*} \sin \vartheta d\vartheta \right] d\varphi \quad (3.5)$$

Легко видеть, что

$$e^{-\tau_w} - t \leq e^{-\tau_*}, \quad e^{-\tau_0} - e^{-\tau_w} \leq e^{-\tau_*}$$

Это позволяет вместо (3.5) написать, объединяя два последних интеграла,

$$\Delta Q \leq \kappa B_m \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/2\pi} 2 e^{-\tau_*} \sin \vartheta d\vartheta$$

или

$$\Delta Q \leq 8\pi \kappa B_m e^{-\tau_*} \quad (3.6)$$

Равенство (3.2) может быть заменено приближенным равенством (3.3) в том случае, если величина ΔQ не превышает погрешности, допустимой в теории пограничного слоя. Для оценки порядка членов уравнений используем рассуждения, приведенные в [6]. Обозначим через V, l и δ соответственно характерную скорость, характерный размер тела и толщину вязкого пограничного слоя. В принятом приближении уравнение энергии (1.3) содержит члены, имеющие порядок V^3/l . При выводе этого уравнения отбрасываются члены, имеющие порядок $\varepsilon = V^3 \delta / l^2$, а также более высокий порядок малости. Потребуем, чтобы погрешность в вычислении Q имела порядок отброшенных членов. Тогда из (3.6) получим

$$8\pi \kappa B_m e^{-\tau_*} \leq V^3 \delta / l^2$$

или, заменяя κ наибольшим его значением κ_m

$$\tau_* \geq \ln \frac{8\pi\kappa_m B_m l^2}{V^2 \delta} \quad (3.7)$$

Таким образом, при выполнении последнего неравенства интегрирование для вычисления Q может производиться в конечном объеме.

4. Проведем второе упрощение выражения для Q в точке с координатами $x = x_0, y = y_0$. Разложим функции, входящие в равенство (3.3), в ряды по x в окрестности $x = x_0$. Используя равенство (3.1), связь $y_0 - y = s \cos \vartheta$ и обозначение $\Delta x = x - x_0$, получим

$$J_w = J_w(x_0) + \left. \frac{d\beta B_w}{dx} \right|_{x_0} \Delta x + \dots$$

$$e^{-\tau w} = \exp \left(-\frac{1}{\cos \vartheta} \int_0^{y_0} \rho \kappa|_{x_0, y} dy \right) \left[1 - \left(\int_0^s \left. \frac{\partial \rho \kappa}{\partial x} \right|_{x_0, y} ds \right) \Delta x + \dots \right]$$

$$B \rho \kappa = B \rho \kappa|_{x_0, y} + \left. \frac{\partial B \rho \kappa}{\partial x} \right|_{x_0, y} \Delta x + \dots$$

$$e^{-\tau} = \exp \left(-\frac{1}{\cos \vartheta} \int_y^{y_0} \rho \kappa|_{x_0, y} dy \right) \left[1 - \left(\int_0^s \left. \frac{\partial \rho \kappa}{\partial x} \right|_{x_0, y} ds \right) \Delta x + \dots \right] \quad (4.1)$$

где величина y соответствует τ , а индексы у черты указывают значения аргументов x, y . Отбросим члены, содержащие Δx . Полученное при этом приближенное значение Q обозначим через Q_0 . Используя равенства (1.4), (3.3) и (4.1), найдем

$$Q_0 = \kappa \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{1/2\pi} \beta B_w|_{x_0} e^{-\tau w} \sin \vartheta d\vartheta + \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{\tau_*} d\tau B|_{x_0, y} e^{-\tau} \sin \vartheta \right] d\varphi - 4\pi \kappa B \quad (4.2)$$

В первом из интегралов величина t заменена на $e^{-\tau w}$. Такая замена, как это следует из предыдущего, дает допустимую погрешность.

Обозначим наибольшее значение s при $\tau = \tau_*$ через s_m , величину $y_0 + s_m$ — через y_+ , а величину $\max(y_0 - s_m, 0)$ — через y_- . Интегрирование в объеме $\tau \leq \tau_0$ в равенстве (3.3) с допустимой погрешностью может быть заменено интегрированием по сфере, имеющей радиус s_m , или по части этой сферы, находящейся над плоскостью $y = 0$. В свою очередь, интегрирование по этому объему может быть заменено с допустимой погрешностью интегрированием по объему $y_- \leq y \leq y_+$. Изменяя порядок интегрирования в последнем интеграле из (4.2) и используя выражение (3.1), получим

$$Q_0 = \kappa \int_0^{2\pi} \left[\beta B_w|_{x_0} \int_0^{1/2\pi} \exp \left(\frac{1}{\cos \vartheta} \int_{y_0}^0 \rho \kappa|_{x_0} dy \right) \sin \vartheta d\vartheta - \right.$$

$$\left. - \int_{y_0}^{y_-} dy B \rho \kappa|_{x_0} \int_0^{1/2\pi} d\vartheta \exp \left(\frac{1}{\cos \vartheta} \int_{y_0}^y \rho \kappa|_{x_0} dy \right) \operatorname{tg} \vartheta - \right.$$

$$\left. - \int_{y_0}^{y_+} dy B \rho \kappa|_{x_0} \int_{1/2\pi}^\pi d\vartheta \exp \left(\frac{1}{\cos \vartheta} \int_y^{y_0} \rho \kappa|_{x_0} dy \right) \operatorname{tg} \vartheta \right] d\varphi - 4\pi \kappa B + O(\varepsilon) \quad (4.3)$$

Введем обозначения

$$n_+ = \int_{y_0}^y \rho \kappa|_{x_0} dy \quad \text{при } y > y_0, \quad n_- = \int_y^{y_0} \rho \kappa|_{x_0} dy \quad \text{при } y < y_0$$

$$n_w = \int_0^{y_0} \rho \kappa|_{x_0} dy, \quad n = \left| \int_{y_0}^y \rho \kappa|_{x_0} dy \right|$$

Равенство (4.3) может быть переписано в виде

$$Q_* = \kappa \int_0^{2\pi} \beta B_w \Big|_{x_0} E_2(n_w) d\varphi - 2\pi\kappa \left[\int_{y_0}^{y_-} B\rho\kappa \Big|_{x_0} E_1(n_-) dy - \int_{y_0}^{y_+} B\rho\kappa \Big|_{x_0} E_1(n_+) dy \right] - 4\pi\kappa B + O(\epsilon) \quad (4.4)$$

где E_j — интегрально-показательная функция, определяемая равенством

$$E_j(r) = \int_{z=1}^{\infty} e^{-rz} \frac{dz}{z^j} = \int_{z=r}^{\infty} e^{-z} r^{j-1} \frac{dz}{z^j}$$

О вычислении этой функции см. работу [7]. Отметим, что справедлива формула

$$jE_{j+1}(r) = e^{-r} - rE_j(r)$$

Объединяя два последних интеграла в (4.4), получим

$$Q_0 = 2\pi\kappa \left[\beta B_w \Big|_{x_0} E_2(n_w) + \int_{y_-}^{y_+} B\rho\kappa \Big|_{x_0} E_1(n) dy - 2B \Big|_{x_0, y_0} \right] + O(\epsilon) \quad (4.5)$$

Итак, величина Q может быть заменена величиной Q_0 , если допустима погрешность $\Delta Q_0 = Q_* - Q_0$. Оценим эту величину. Вспомним, что величина Q_0 вычислена с использованием членов разложения (4.1), не содержащих Δx . Для вычисления ΔQ_0 воспользуемся равенствами (1.4), (3.3), (4.1) и (4.2). С точностью до величин более высокого порядка малости величина ΔQ_0 равна

$$\begin{aligned} \Delta Q_0 = & \kappa \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/2\pi} d\vartheta \left[\frac{d\beta B_w}{dx} \Big|_{x_0} \exp \left(-\frac{1}{\cos \vartheta} \int_0^{y_0} \rho\kappa \Big|_{x_0, y} dy \right) - \right. \\ & - \beta B_w \Big|_{x_0} \int_0^{s_w} \frac{\partial \rho\kappa}{\partial x} \Big|_{x_0, y} ds \Big] \Delta x \sin \vartheta + \kappa \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{y_-}^{y_0} dy \int_0^{1/2\pi} d\vartheta \left[\frac{\partial B\rho\kappa}{\partial x} \Big|_{x_0, y} \times \right. \\ & \times \exp \left(-\frac{1}{\cos \vartheta} \int_y^{y_0} \rho\kappa \Big|_{x_0, y} dy \right) - B\rho\kappa \Big|_{x_0, y} \int_0^s \frac{\partial \rho\kappa}{\partial x} \Big|_{x_0, y} ds \Big] \Delta x \operatorname{tg} \vartheta - \\ & - \kappa \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{y_0}^{y_+} dy \int_{1/2\pi}^{\pi} d\vartheta \frac{\partial B\rho\kappa}{\partial x} \Big|_{x_0, y} \exp \left(-\frac{1}{\cos \vartheta} \int_{y_0}^y \rho\kappa \Big|_{x_0, y} dy \right) - \\ & - B\rho\kappa \Big|_{x_0, y} \int_0^s \frac{\partial \rho\kappa}{\partial x} \Big|_{x_0, y} ds \Big] \Delta x \operatorname{tg} \vartheta \quad (4.6) \end{aligned}$$

Входящие в последнее равенство экспоненциальные функции не превосходят единицы. Если интегрирование ведется внутри сферы, имеющей радиус s_m , то $\Delta x \leq s_m$. Производные в подынтегральном выражении имеют следующие порядки:

$$\left| \frac{d\beta B_w}{dx} \right| \sim \frac{\beta_m B_m}{l}, \quad \left| \frac{\partial \rho\kappa}{\partial x} \right| \sim \frac{\rho_m \kappa_m}{l}, \quad \left| \frac{\partial B\rho\kappa}{\partial x} \right| \sim \frac{B_m \rho_m \kappa_m}{l}$$

где ρ_m — наибольшее значение плотности в потоке. Учитывая сказанное, заменяя отрицательные величины положительными и вспоминая неравенство $\beta \leq 1$, получим

$$\Delta Q_0 \sim 2\pi\kappa_m \frac{B_m}{l} (s_m + \rho_m \kappa_m s_m^2) + 4\pi\kappa_m \frac{B_m \rho_m \kappa_m}{l} (s_m^2 + \rho_m \kappa_m s_m^3) \quad (4.7)$$

При переходе от (4.6) к (4.7) все величины, кроме производных, заменены их максимальными значениями. Удвоим первый член правой части (4.7) и потребуем, чтобы увеличенное выражение для ΔQ_0 было меньше ϵ . Получим

$$4\pi B_m \kappa_m s_m (1 + \rho_m \kappa_m s_m^2) < V^3 \delta / l \quad (4.8)$$

Из равенства (3.1) и данного ранее определения величины s_m следует

$$\tau_* \leq \rho_m \kappa_m s_m \quad (4.9)$$

5. При выполнении неравенства (3.7) интегрирование в равенстве (3.2) может быть заменено интегрированием в конечном объеме с использованием равенства (3.3). При выполнении неравенства (4.8) величина Q в уравнении (1.3) может быть заменена величиной Q_0 , которая определяется равенством (4.5). Исключим из неравенств (3.7), (4.8) и (4.9) величину τ_* и произведение $\rho_m \kappa_m s_m$. Получим

$$F(K, L) \equiv (L - K)(1 + L - K)^2 e^{-K} - 1 < 0 \quad (5.1)$$

где

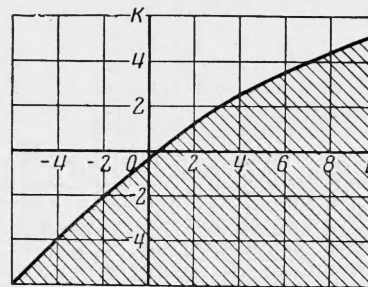
$$K = \ln \frac{V^3 \delta \rho_m}{4\pi B_m l}, \quad L = \ln 2\rho_m \kappa_m l$$

Уравнение $F(K, L) = 0$ при фиксированном L имеет один действительный корень, изображенный кривой на фигуре. В плоскости LK заштрихована область, в которой неравенство (5.1) не выполняется.

Итак, величина Q в уравнении (1.3) может быть заменена величиной Q_0 по формуле (4.5), если выполнено неравенство (5.1).

Замечания. При обтекании выпуклых поверхностей оценка погрешности выражения (4.5) существенно осложняется тем, что из произвольной точки поля течения видна, вообще говоря, лишь часть обтекаемой поверхности. Этот более общий случай требует специального исследования. Условия удовлетворительного использования предположения о локальном термодинамическом равновесии и осреднения излучения по частотам пока не изучены.

6. Для иллюстрации использования оценки (5.1) найдем допустимые значения коэффициента поглощения κ_m при некоторых условиях полета тела вращения с плоской головной частью. Пусть тело летит в атмосфере на высоте H со скоростью, которая соответствует числу Маха M . Принято, что $l = 1$ м. Для характерной толщины вязкого пограничного слоя δ выбрано значение 0.01 м. В качестве максимальной температуры T_m может быть взята температура торможения воздуха за прямым скачком



Фиг. 1

Таблица

$H, \text{ км}$	M	$T_m, ^\circ\text{К}$	$\rho_m, \frac{\text{кгсек}^2}{\text{м}^4}$	$V, \frac{\text{м}}{\text{сек}}$	$\kappa_m, \frac{\text{м}^3}{\text{кгсек}^2}$	$\kappa_1, \frac{\text{м}^3}{\text{кгсек}^2}$
0	6	2150	0.150	790	9.0	0.03
0	10	4350	0.136	1160	1.7	0.5
20	20	7420	0.210	1730	0.4	7.0
20	30	10270	0.268	2450	0.3	80.0

уплотнения при равновесном течении без излучения. В качестве максимальной плотности ρ_m взята удвоенная плотность торможения при тех же условиях. Величина характерной скорости V принята равной критической скорости на поверхности тела. Результаты расчетов сведены в таблицу. Там же приведены значения κ_1 для воздуха при $T = T_m$ и $\rho = \rho_m$, вычисленные по данным работы [8].

Поступила 24 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. ИЛ, 1953.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
3. Щенников В. В. Расчет ламинарного пограничного слоя у сублимирующей поверхности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 5.
4. Немчинов И. В., Топеха Л. П. Пограничный слой вблизи передней критической точки цилиндра при передаче тепла излучением. ПМТФ, 1960, № 4.
5. Нейланд В. Я. Решение уравнений ламинарного пограничного слоя в окрестности критической точки при вдувании излучающего газа. Инж. ж., 1961, т. 1, вып. 2.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. ОГИЗ, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
7. Таблицы интегральной показательной функции. Изд. АН СССР, 1954.
8. K i v e l B. Radiation from hot air and its effect on stagnation point heating. J. Aerospace Sci., 1961, vol. 28, No 2.