$\mathcal{AMS}$ subject classification: 47J25, 47H99, 49M15, 65G99

# Анализ полулокальной сходимости схемы типа Ньютона четвертого порядка с новой мажорантой и средними условиями Липшица*

Дж.П. Джаисвал[1,2,3]

[1]Department of Mathematics, Guru Ghasidas Vishwavidyalaya (A Central University), Bilaspur, C.G., India-495009

[2]Faculty of Science, Barkatullah University, Bhopal, M.P., India-462026

[3]Regional Institute of Education, Bhopal, M.P., India-462013

E-mail: asstprofjpmanit@gmail.com

**Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 17, 2024.**

**Джаисвал Дж.П.** Анализ полулокальной сходимости схемы типа Ньютона четвертого порядка с новой мажорантой и средними условиями Липшица // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 1. — С. 11–32.

Основное внимание в данной статье уделено анализу полулокальной сходимости трехшаговой схемы типа Ньютона (ТШСТН), используемой для нахождения решения нелинейных операторов в банаховых пространствах. Выполняется новый анализ полулокальной сходимости ТШСТН, который основан на предположении, что обобщенное условие Липшица (ОУЛ) удовлетворяется первой производной оператора.

Полученные выводы способствуют теоретическому пониманию ТШСТН в банаховых пространствах и имеют практическое значение для различных приложений, таких как интегральные уравнения, что служит дополнительным подтверждением представленнвых результатов.

**DOI:** 10.15372/SJNM20240102
**EDN:** MFPCFS

**Ключевые слова:** *полулокальная сходимость, нелинейная задача, радиус сходимости, банахово пространство, обобщенное условие Липшица, $\varkappa$-среднее.*

**Jaiswal J.P.** Analyzing the semilocal convergence of a fourth-order newton-type scheme with novel majorant and average Lipschitz conditions // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 1. — P. 11–32.

The main focus of this paper is an analysis of the semilocal convergence (S.C.) of a three-step Newton-type scheme (TSNTS) used for finding the solution of nonlinear operators in Banach spaces (B.S.). A novel S.C. analysis of the TSNTS is introduced, which is based on the assumption that a generalized Lipschitz condition (G.L.C.) is satisfied by the first derivative of the operator.

The findings contribute to the theoretical understanding of TSNTS in B.S. and have practical implications in various applications, such as integral equations further validating our results.

**Keywords:** *semilocal convergence, nonlinear problem, convergence radius, Banach space, generalized Lipschitz condition, $\varkappa$-average.*

*При поддержке Департамента науки и техники (Нью-Дели, Индия) в рамках программы FIST (проект № SR/FST/MS/2022/122 от 19/12/2022).

# 1. Введение

Рассмотрим оператор $T$, отображающий из непустого открытого выпуклого подмножества $\mathbb{D}$ банахова пространства $U$ в другое банахово пространство $V$, чтобы аппроксимировать локально единственное решение $\xi^*$ нелинейного уравнения

$$T(g) = 0. \tag{1.1}$$

Заметим, что в вычислительной науке область численного анализа для вычисления решений тесно связана с вариациями метода Ньютона, такими как

$$g_{n+1} = g_n - [T'(g_n)]^{-1}T(g_n), \quad n \geq 0. \tag{1.2}$$

Несмотря на медленную сходимость, метод Ньютона часто является предпочитаемым и его часто используют. Чтобы больше узнать об этом методе, можно ознакомиться с обзором Ортеги о методе Ньютона [1], а также с литературой, приведенной в работах Ралля [2] и Канторовича [3]. Во многих статьях проводился анализ полулокальной сходимости итерационных методов при условиях Липшица [4–9], Гельдера [10–13], или $w$-непрерывности [14–18]. Однако некоторые нелинейные задачи не удовлетворяют ни одному из этих условий, что ограничивает применимость этих методов. Для устранения этого ограничения Ван [19] ввел понятие обобщенного условия Липшица для анализа локальной сходимости метода Ньютона. Саксена с соавторами [20] пришли к выводу, что исходное определение не может использоваться в том виде, как оно есть, для многошагового метода типа Ньютона, и поэтому они представили модифицированное определение обобщенных условий Липшица.

В [21] Ван ввел условие Липшица со средним $\varkappa$, названное ОУЛ, которое может использоваться при исследовании теоремы сходимости, подобной теореме Канторовича. Это условие использовалось для изучения полулокальной сходимости различных итерационных методов, включая метод Гаусса–Ньютона, как было показано Сюй и Ли [22]. Дальнейшее расширение этого понятия обсуждалось в [23–25]. Численные исследования полулокальной сходимости основаны на информации об исходной точке для установления критериев сходимости итеративных методов. Мы будем использовать классическую ТШСТН [26] при $\varkappa$-среднем условии для исследования полулокальной сходимости ТШСТН следующего вида:

$$\begin{aligned} h_n &= g_n - [T'(g_n)]^{-1}T(g_n), \\ z_n &= h_n - [T'(g_n)]^{-1}T(h_n), \\ g_{n+1} &= z_n - [T'(g_n)]^{-1}T(z_n), \\ n &\geq 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Важной характеристикой приведенной выше схемы является то, что это простейший итерационный метод четвертого порядка, который не включает вторую производную. Локальная сходимость этого метода исследовалась Аргиросом с соавторами [26] при условии Липшица и центральном условии Липшица. Локальная сходимость при ОУЛ приведенного выше итерационного метода была тщательно проанализирована Джаисвалом [27], тогда как предыдущие исследования имеют свои собственные ограничения в некоторых ситуациях. Метод мажорирующей функции нашел широкое применение при анализе сходимости различных методов типа Ньютона, в том числе для решения нелинейных операторных уравнений [21, 23, 28], выпуклой составной оптимизации с использованием метода Гаусса–Ньютона [29], многокритериальной оптимизации с использованием расширенного метода Ньютона [30]. Этот аналитический инструмент способствует установлению более точных критериев сходимости и получению оценок радиусов сходимости для итерационных методов, улучшая их практическое применение.

Мы приступаем к изучению полулокальной сходимости, поскольку имеется возможность анализа итерационных методов более высокого порядка, что увеличивает область их применения. Цель данной статьи — продемонстрировать результат общей полулокальной сходимости для ТШСТН (1.3) с использованием первой производной нелинейного оператора $T$ при ОУЛ, предложенной Ваном [21]. Этот анализ сходимости имеет несколько новых аспектов, включая установление связей между мажорирующей функцией $\mathcal{H}$ и нелинейным оператором $T$, а также демонстрацию того, что ТШСТН имеет сходимость четвертого порядка. Будет получено несколько важных особых случаев, включая результаты сходимости типа Канторовича и $Y$-типа. Результат сходимости подтверждается численными экспериментами, также показывается, что использование $\varkappa$-среднего условия Липшица является существенным преимуществом.

Статья построена следующим образом: обобщенное/среднее условие Липшица введено в пункте 2. После того, как в п. 3 будут рассмотрены некоторые предварительные понятия и свойства мажорирующих функций и мажоризирующих последовательностей, в п. 4 будет представлен анализ полулокальной сходимости ТШСТН при использовании $\varkappa$-среднего условия Липшица. Применения к нелинейному интегральному уравнению рассмотрены в п. 5. Заключительные замечания представлены в п. 6.

## 2. Предварительные результаты и обозначения

Чтобы исследование было как можно более полным, представим некоторые важные понятия и обозначения, взятые из [21, 31].

Пусть $M(g,\rho)$ — открытый шар с радиусом $\rho$ и центром $g$, $\varkappa(\cdot)$ — положительная неубывающая функция на $[0,\varrho)$, где $\varrho > 0$. Понятия обобщенного/среднего условия Липшица приведены в конце данного пункта.

**Условие 2.1.** Предположим, что $g_0 \in \mathbb{D}$, $[T'(g_0)]^{-1}$ является невырожденным и $\epsilon > 0$, т. е. $M(g_0,\epsilon) \subseteq \mathbb{D}$. Тогда считается, что $\varkappa$-средний критерий Липшица на $M(g_0,\epsilon)$ удовлетворяется при $T'$, если для любых $g,h \in M(g_0,\epsilon)$ при $\|g-g_0\| + \|h-g\| < \epsilon$ верно

$$\big\|[T'(g_0)]^{-1}\big(T'(h) - T'(g)\big)\big\| \le \int_{\|g-g_0\|}^{\|g-g_0\|+\|h-g\|} \varkappa(u)\,du. \tag{2.1}$$

В работе [21] Ван ввел обобщенное условие Липшица, также известное как центральное условие Липшица, во вписанной сфере с $\varkappa$-средним. Ли с соавторами в [32] исследовали поведение сходимости Гаусса–Ньютона для вырожденных систем уравнений, а Ли в [29] — для выпуклой составной оптимизации. Они представили различные адаптированные версии для изучения поведения сходимости. Очевидно, что классическое условие Липшица с постоянной Липшица $\varkappa(\epsilon)$ может быть получено из $\varkappa$-среднего условия Липшица на $M(g_0,\epsilon)$, согласно предыдущему определению. Использование $\varkappa$-среднего условия Липшица может улучшить метод Ньютона путем обеспечения более точного критерия сходимости и аппроксимации радиуса сходимости.

# 3. ТШСТН (1.3) в применении к мажорирующей функции

Пусть $\overline{M(g,\rho)}$ обозначает замкнутое множество $M(g,\rho)$, а $I$ — тождественный оператор. Предположим, что $\varkappa(\cdot)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\int_0^{\varrho} \varkappa(u)(\varrho - u)\,du}{\varrho} = 1. \tag{3.1}$$

Мажорирующая функция $\mathcal{H} : [0,\varrho] \to \Re$ определяется как

$$\mathcal{H}(k) = \beta - k + \int_0^k \varkappa(u)(k-u)\,du, \quad k \in [0,\varrho], \tag{3.2}$$

где $\beta > 0$. В начале 2000-х в важной работе Вана [21] была определена полулокальная сходимость метода Ньютона (1.2). Также очевидно, что эта мажорирующая функция аналогична той, которую использовал Феррейра [28]. Основная причина использования вышеупомянутой мажорирующей функции в данной статье заключается в том, что она может привести к выработке более точных критериев сходимости и оценки ошибки трехшагового классического подхода. Мы, очевидно, имеем

$$\mathcal{H}'(k) = -1 + \int_0^k \varkappa(u)\,du, \quad k \in [0,\varrho),$$

с

$$\mathcal{H}''(k) = \varkappa(k) > 0 \quad \text{для п. в. } k \in [0,\varrho).$$

Тогда получим

$$\int_j^k \varkappa(u)du = \mathcal{H}'(k) - \mathcal{H}'(j) \quad \text{для некоторых } j,k \in [0,\varrho), \text{ если } j < k.$$

Связь между мажорирующей функцией и $\varkappa$, представленная здесь, будет часто использоваться при анализе сходимости ТШСТН (1.3). Предположим, что $\rho_0$ удовлетворяет

$$\int_0^{\rho_0} \varkappa(u)\,du = 1. \tag{3.3}$$

В результате мы видим, что $\mathcal{H}(k)$ является строго выпуклой, а $\mathcal{H}'(k)$ — возрастающей, выпуклой и $-1 \le \mathcal{H}'(k) < 0$ для любого $k \in [0,\rho_0)$. Далее мы начнем с обсуждения некоторых важных промежуточных результатов по оценкам ошибки для мажорирующих последовательностей $\{v_i\}$, $\{s_i\}$ и $\{k_i\}$, задаваемых ниже (см. (3.7)). Кроме того, мы исследуем связь между мажорирующей функцией $\mathcal{H}(k)$, определяемой выражением (3.2), и нелинейным оператором $T$. Затем мы перейдем к обсуждению анализа сходимости ТШСТН (1.3) при $\varkappa$-среднем условии Липшица в банаховых пространствах.

## 3.1. Промежуточные результаты

Следующий вспомогательный вывод о скалярных функциях можно найти в любой литературе по элементарному выпуклому анализу (см. [33, теорема 4.1.1, замечание 4.1.2]). Они являются важными и будут включены в наш анализ.

**Лемма 3.1.** *Предположим, что $G : (0,\varrho) \to \Re$ является непрерывно дифференцируемой и выпуклой функцией, в которой $\varrho > 0$ и $0 \le \phi \le 1$. Тогда*

$$(i) \qquad (1-\phi)G'(\phi k) \le \frac{G(k)-G(\phi k)}{k} \le (1-\phi)G'(k) \quad \text{для всех } k \in (0,\varrho).$$

$$(ii) \qquad \frac{G(l)-G(\phi l)}{l} \le \frac{G(m)-G(\phi m)}{m} \quad \text{для всех } l,m \in (0,\varrho),\ l<m.$$

*Наиболее примечательно, что если $G$ является строго выпуклой, то приведенные выше неравенства являются строгими.*

Также определим

$$B := \int_0^{\rho_0} \varkappa(u)u\,du, \tag{3.4}$$

где $\rho_0$ определяется уравнением (3.3). Предыдущая лемма взята из [21, лемма 1.2] и дает некоторые фундаментальные характеристики для мажорирующей функции $\mathcal{H}$, задаваемой выражением (3.2).

**Лемма 3.2** [21]. *Если $0<\beta<B$, то $\mathcal{H}$ является убывающей на $[0,\rho_0]$ и возрастающей на $[\rho_0,\varrho]$, при этом*

$$\mathcal{H}(\beta)>0, \qquad \mathcal{H}(\rho_0)=\beta-B<0, \qquad \mathcal{H}(\varrho)=\beta>0. \tag{3.5}$$

*Кроме того, $\mathcal{H}$ имеет нуль, который является единственным в каждом интервале, задаваемом $\iota^*$ и $\iota^{**}$. Они удовлетворяют неравенству*

$$\beta<\iota^*<\frac{\rho_0}{B}\beta<\rho_0<\iota^{**}<\varrho\,. \tag{3.6}$$

Зададим первоначальное положение $k_0=0$. Пусть $\{s_i\}$, $\{v_i\}$, $\{k_i\}$ — соответствующие последовательности, сгенерированные с помощью ТШСТН для мажорирующей функции $\mathcal{H}$, приведенной в [31], которые имеют следующий вид:

$$\begin{cases} s_i = k_i - \dfrac{\mathcal{H}(k_i)}{\mathcal{H}'(k_i)}, \\ v_i = s_i - \dfrac{\mathcal{H}(s_i)}{\mathcal{H}'(k_i)}, \qquad i=0,1,2,\dots. \\ k_{i+1} = v_i - \dfrac{\mathcal{H}(v_i)}{\mathcal{H}'(k_i)}, \end{cases} \tag{3.7}$$

**Замечание 3.1.** Предположим, что $0<\beta\le B$. С использованием лемм 3.1 и 3.2, а также стандартных аналитических подходов (см., например, [34]), легко показать, что последовательности $\{s_i\}$, $\{v_i\}$ и $\{k_i\}$, определяемые с помощью (3.7), удовлетворяют следующим соотношениям:

$$0\le k_i<s_i<v_i<k_{i+1}<\iota^* \quad \text{для всех } i\ge 0, \tag{3.8}$$

и, все больше и больше возрастая, сходятся к одной и той же точке $\iota^*$, где $\iota^*$ — нуль, который является единственным для $\mathcal{H}$ на $[0,\rho_0]$ ($\rho_0$ удовлетворяет (3.3)). Кроме того, мы можем получить

$$\iota^*-k_{i+1} \le -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{H}''(\iota^*)^3}{\mathcal{H}'(k_i)^3}\,(\iota^*-k_i)^4, \quad i\ge 0,$$

или

$$\iota^* - k_{i+1} \le -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{H}''(\iota^*)^3}{\mathcal{H}'(\iota^*)^3}\,(\iota^* - k_i)^4, \quad i \ge 0. \tag{3.9}$$

В частности, если $1 + \iota^*\mathcal{H}''(\iota^*)/\mathcal{H}'(\iota^*) \ge 0$, то

$$v_i - s_i \ge \left\{1 + \frac{\mathcal{H}''(\iota^*)}{\mathcal{H}'(\iota^*)}\,(\iota^* - k_i)\right\}(\iota^* - s_i), \quad i \ge 0. \tag{3.10}$$

Свойства сходимости последовательностей $\{v_i\}$, $\{s_i\}$ и $\{k_i\}$, обсуждавшиеся выше, будут использоваться для анализа сходимости для ТШСТН (1.3).

Пусть $g_0 \in \mathbb{D}$ — начальное приближение такое, что обратное $[T'(g_0)]^{-1}$ существует, и пусть $M(g_0, \rho_0) \subset \mathbb{D}$, где $\rho_0$ удовлетворяет (3.3). Пусть

$$\beta := \big\|[T'(g_0)]^{-1}T(g_0)\big\|. \tag{3.11}$$

Вспомним, что (3.2) определяет мажорирующую функцию $\mathcal{H}$, (3.4) определяет $B$, $\iota^*$ и $\iota^{**}$ — нули, которые являются единственными для $\mathcal{H}$ на $[0, \rho_0]$ и $[\rho_0, \varrho]$ соответственно, где $\rho_0$ и $\varrho$ удовлетворяют (3.3) и (3.1) соответственно. Заметим, что когда $0 < \beta \le B$, последовательности $\{v_i\}$, $\{s_i\}$ и $\{k_i\}$, задаваемые (3.7), постепенно сходятся к $\iota^*$, где $B$ определяется (3.4).

Последующие леммы, которые устанавливают явные связи между мажорирующей функцией $\mathcal{H}$ и нелинейной функцией $T$, будут важны для анализа полулокальной сходимости ТШСТН (1.3).

**Лемма 3.3.** *Предположим, что $\|g - g_0\| \le k < \iota^*$. Каждый раз, когда первая производная $T$ в $M(\xi^*, k)$ удовлетворяет $\varkappa$-среднему условию Липшица* (2.1), *$T'(g)$ является невырожденной и*

$$\big\|[T'(g)]^{-1}T'(g_0)\big\| \le -\frac{1}{\mathcal{H}'(\|g - g_0\|)} \le -\frac{1}{\mathcal{H}'(k)}. \tag{3.12}$$

*Кроме того, $T$ является невырожденной в $M(g_0, \iota^*)$.*

**Доказательство.** Возьмем $g \in \overline{M(g_0, k)}$, $0 \le k < \iota^*$. Мы использовали $\varkappa$-среднее условие Липшица (2.1), чтобы убедиться в том, что

$$\big\|[T'(g_0)]^{-1}T'(g) - I\big\| \le \int_0^{\|g-g_0\|} \varkappa(u)\,du = \mathcal{H}'(\|g - g_0\|) - \mathcal{H}'(0).$$

Так как $\mathcal{H}'(0) = 1$ и $\mathcal{H}$ является строго возрастающей в $(0, \iota^*)$, мы получим

$$\big\|[T'(g_0)]^{-1}T'(g) - I\big\| \le \mathcal{H}'(g) + 1 < 1,$$

поскольку $-1 < \mathcal{H}'(g) < 0$ для любого $g \in (0, \iota^*)$. В итоге, применив лемму Банаха, можем сделать вывод о том, что $[T'(g_0)]^{-1}T'(g)$ является невырожденной и (3.12) верно. Лемма доказана. □

**Лемма 3.4.** *Пусть $v_i$, $s_i$ и $k_i$ сгенерированы схемой* (3.7). *Предположим, что $T'$ в $M(g_0, \iota^*)$ удовлетворяет $\varkappa$-среднему условию Липшица* (2.1). *Если $0 < \beta \le B$, последовательности $\{g_i\}$, $\{h_i\}$ и $\{z_i\}$, сгенерированные с использованием ТШСТН* (1.3) *при начальном приближении $g_0$, считаются вполне определенными и содержащимися в $M(g_0, k)$. Кроме того, для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ мы имеем*

$(i)$ $[T'(g_i)]^{-1}$ существует при $\big\|[T'(g_i)]^{-1}T'(g_0)\big\| \le -1/\mathcal{H}'(\|g_i - g_0\|) \le -1/\mathcal{H}'(k)$.

$(ii)$ $\big\|[T'(g_0)]^{-1}T(g_i)\big\| \le \mathcal{H}(k_i)$.

$(iii)$ $\|h_i - g_i\| \le s_i - k_i$.

$(iv)$ $\|z_i - h_i\| \le (v_i - s_i)\left(\dfrac{\|h_i - g_i\|}{s_i - k_i}\right)^2 \le v_i - s_i$.

$(v)$ $\|z_i - g_i\| \le v_i - k_i$.

$(vi)$ $\|g_{i+1} - z_i\| \le (k_{i+1} - v_i)\left[\dfrac{\|z_i - h_i\|}{v_i - s_i}\,\dfrac{\|h_i - g_i\| + \tau\|z_i - h_i\|}{s_i - k_i + \tau\|v_i - s_i\|}\right] \le k_{i+1} - v_i$.

$(vii)$ $\|g_{i+1} - g_i\| \le k_{i+1} - k_i$.

**Доказательство.** Для доказательства используем индукцию. Очевидно, что случай $i = 0$ имеет место для $(i)$–$(iii)$. В результате $h_0 \in M(g_0, \iota^*)$, поскольку $\|h_0 - g_0\| \le s_0 - k_0 = s_0 < \iota^*$ и $\|z_0 - h_0\| \le v_0 - s_0$. Для $(iv)$–$(vii)$ с использованием схемы (1.3) имеем

$$\begin{aligned} T(h_0) &= T(h_0) - T(g_0) - T'(h_0)(h_0 - g_0) \\ &= \int_0^1 \big[T'\big(g_0 + \tau(h_0 - g_0)\big) - T'(g_0)\big](h_0 - g_0)\, d\tau. \end{aligned}$$

Затем используем $\varkappa$-среднее условие Липшица (2.1) для получения

$$\begin{aligned} \big\|[T'(g_0)]^{-1}T(h_0)\big\| &\le \int_0^1 \big\|[T'(g_0)]^{-1}\big[T'\big(g_0 + \tau(h_0 - g_0)\big) - T'(g_0)\big]\big\|\, \|h_0 - g_0\|\, d\tau \\ &\le \int_0^1 \left(\int_0^{\tau\|h_0 - g_0\|} \varkappa(u)\, du\right) \|h_0 - g_0\|\, d\tau \\ &= \int_0^1 \big[\mathcal{H}'(\tau\|h_0 - g_0\|) - \mathcal{H}'(0)\big]\, \|h_0 - g_0\|\, d\tau. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathcal{H}'$ должно быть строго выпуклым в $[0, \rho_0)$ и $\|h_0 - g_0\| \le s_0 - k_0$ согласно $(iii)$, лемма 3.1 утверждает, что

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(\tau\|h_0 - g_0\|) - \mathcal{H}'(0) &= \frac{\mathcal{H}'(\tau\|h_0 - g_0\|) - \mathcal{H}'(0)}{\|h_0 - g_0\|}\, \|h_0 - g_0\| \\ &\le \frac{\mathcal{H}'(\tau(s_0 - k_0)) - \mathcal{H}'(0)}{(s_0 - k_0)}\, \|h_0 - g_0\|. \end{aligned}$$

Затем, объединив приведенное выше неравенство и схему (3.7), получим

$$\begin{aligned} \big\|[T'(g_0)]^{-1}T(h_0)\big\| &\le \int_0^1 \big[\mathcal{H}'(\tau s_0) - \mathcal{H}'(0)\big]\, s_0\, d\tau \left(\frac{\|h_0 - g_0\|}{s_0 - k_0}\right)^2 \\ &= \mathcal{H}(s_0)\left(\frac{\|h_0 - g_0\|}{s_0 - k_0}\right)^2 = (v_0 - s_0)\left(\frac{\|h_0 - g_0\|}{s_0 - k_0}\right)^2. \end{aligned}$$

В результате

$$\|z_0 - h_0\| = \big\|[T'(g_0)]^{-1}T(h_0)\big\| \le (v_0 - s_0)\left(\frac{\|h_0 - g_0\|}{s_0 - k_0}\right)^2 \le v_0 - s_0,$$

что представляет собой соотношение $(iv)$.

С использованием этих двух результатов для $(v)$ мы имеем $\|z_0 - g_0\| \le \|z_0 - h_0 + h_0 - g_0\| \le v_0 - s_0 + s_0 - k_0 \le v_0 - k_0$. На основании предыдущего подхода можно сделать вывод, что

$$\|g_1 - z_0\| = \big\|[T'(h_0)]^{-1}T(z_0)\big\| \le (k_1 - v_0)\,\left[\frac{\|z_0 - h_0\|}{v_0 - s_0}\,\frac{\|h_0 - g_0\| + \tau\|z_0 - h_0\|}{s_0 - k_0 + \tau(v_0 - s_0)}\right].$$

Наконец, получаем

$$\begin{aligned}\|g_1 - g_0\| &\le \|g_1 - z_0\| + \|z_0 - h_0\| + \|h_0 - g_0\| \\ &\le (k_1 - v_0) + (v_0 - s_0) + (s_0 - k_0) = k_1 - k_0.\end{aligned}$$

То есть $(v), (vi)$ и $(vii)$ верны для случая $i = 0$, а это означает, что $g_1 \in M(g_0, \iota^*)$.

Теперь предположим, что $g_i$, $h_i$, $z_i \in M(g_0, \iota^*)$, $\|g_1 - g_0\| \le k_i$, и $(i)$–$(vii)$ верны для некоторого $i \ge 0$. Используя индуктивную гипотезу $(iii)$, мы получим $\|h_i - g_0\| \le \|h_i - g_i\| + \|g_i - g_0\| \le s_i$. Кроме того, мы используем индуктивную гипотезу $(vii)$ и (3.8), чтобы получить

$$\|g_{i+1} - g_0\| \le \sum_{k=0}^{i} \|g_{i+1} - g_i\| \le \sum_{k=0}^{i} (k_{i+1} - k_i) = k_{i+1} < \iota^*.$$

Это означает, что $g_{i+1} \in M(g_0, \iota^*)$. Вместе с соотношением (3.12) это означает, что $(i)$ верно для случая $i+1$. С использованием схемы (1.3) мы можем получить следующее тождество для $(ii)$:

$$\begin{aligned}T(g_{i+1}) &= T(g_{i+1}) - T(z_i) - T'(g_i)(g_{i+1} - z_i) \\ &= \int_0^1 \big[T'(z_i + \tau(g_{i+1} - z_i)) - T'(g_i)\big](g_{i+1} - z_i)\,d\tau.\end{aligned}$$

В соответствии с $\varkappa$-средним условием Липшица (2.1)

$$\begin{aligned}\big\|[T'(g_0)]^{-1}T(g_{i+1})\big\| &\le \int_0^1 \big\|[T'(g_0)]^{-1}\big[T'(z_i + \tau(g_{i+1} - z_i)) - T'(g_i)\big]\big\|\,\|g_{i+1} - z_i\|\,d\tau \\ &\le \int_0^1 \left(\int_{\|g_i - g_0\|}^{\|g_i - g_0\| + \|z_i - g_i + \tau(g_{i+1} - z_i)\|} \varkappa(u)\,du\right)\|g_{i+1} - z_i\|\,d\tau.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathcal{H}'$ является выпуклой и возрастает в $[0, \rho_0]$, из леммы 3.1 и (3.8) можно сделать вывод, что

$$\begin{aligned}&\int_{\|g_i - g_0\|}^{\|g_i - g_0\| + \|z_i - g_i + \tau(g_{i+1} - z_i)\|} \varkappa(u)\,du \\ &\qquad = \mathcal{H}'\big(\|g_i - g_0\| + \|z_i - g_i + \tau(g_{i+1} - z_i)\|\big) - \mathcal{H}'(\|g_i - g_0\|) \\ &\qquad \le \mathcal{H}'\big(\|g_i - g_0\| + \|z_i - g_i\| + \tau\|g_{i+1} - z_i\|\big) - \mathcal{H}'(\|g_i - g_0\|) \\ &\qquad \le \frac{\mathcal{H}'\big(v_i + \tau(k_{i+1} - v_i)\big) - \mathcal{H}'(k_i)}{v_i - k_i + \tau(k_{i+1} - v_i)}\,\big(\|z_i - g_i\| + \tau\|g_{i+1} - z_i\|\big) \\ &\qquad \le \mathcal{H}'\big(v_i + \tau(k_{i+1} - v_i)\big) - \mathcal{H}'(k_i).\end{aligned}$$

Это позволяет получить

$$\begin{aligned}\big\|[T'(g_0)]^{-1}T(g_{i+1})\big\| &\le \int_0^1 \big[\mathcal{H}'\big(v_i+\tau(k_{i+1}-v_i)\big)-\mathcal{H}'(k_i)\big]\,\|g_{i+1}-z_i\|\,d\tau\\ &= \big\{\mathcal{H}(k_{i+1})-\mathcal{H}(v_i)-\mathcal{H}'(k_i)(k_{i+1}-v_i)\big\}\,\frac{\|g_{i+1}-z_i\|}{k_{i+1}-v_i}\\ &= \mathcal{H}(k_{i+1})\frac{\|g_{i+1}-z_i\|}{k_{i+1}-v_i}\le \mathcal{H}(k_{i+1}),\end{aligned}\tag{3.13}$$

что показывает, что $(ii)$ верно для случая $i+1$. Объединив выражения (3.12) и (3.13), мы получим

$$\begin{aligned}\|h_{i+1}-g_{i+1}\| &= \big\|[T'(g_{i+1})]^{-1}T(g_{i+1})\big\|\\ &\le \big\|[T'(g_{i+1})]^{-1}T'(g_0)\big\|\,\big\|[T'(g_0)]^{-1}T(g_{i+1})\big\|\\ &\le -\frac{\mathcal{H}(k_{i+1})}{\mathcal{H}'(k_{i+1})}=s_{i+1}-k_{i+1}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Это означает, что $(iii)$ верно для случая $i+1$. Тогда мы приходим к выводу, что $\|h_{i+1}-g_0\|\le\|h_{i+1}-g_{i+1}\|+\|g_{i+1}-g_0\|\le s_{i+1}<\iota^*$ и, следовательно, $h_{i+1}\in M(g_0,\iota^*)$. Относительно $(iv)$ также заметим, что

$$\begin{aligned}T(h_{i+1}) &= T(h_{i+1})-T(g_{i+1})-T'(g_{i+1})(h_{i+1}-g_{i+1})\\ &= \int_0^1 \big[T'\big(g_{i+1}+\tau(h_{i+1}-g_{i+1})\big)-T'(g_{i+1})\big](h_{i+1}-g_{i+1})\,d\tau.\end{aligned}$$

В соответствии с $\varkappa$-средним условием Липшица (2.1)

$$\big\|[T'(g_{i+1})]^{-1}T(h_{i+1})\big\|\le\frac{-1}{\mathcal{H}'(k_{i+1})}\int_0^1\left(\int_{\|g_{i+1}-g_0\|}^{\|g_{i+1}-g_0\|+\|\tau(h_{i+1}-g_{i+1})\|}\varkappa(u)du\right)\|h_{i+1}-g_{i+1}\|\,d\tau.$$

Учитывая, что $\mathcal{H}'$ является выпуклой и возрастает в $[0,\rho_0]$, из леммы 3.1 и (3.8) можно заключить, что

$$\begin{aligned}&\int_{\|g_{i+1}-g_0\|}^{\|g_{i+1}-g_0\|+\tau\|h_{i+1}-g_{i+1}\|}\varkappa(u)\,du\\ &\qquad= \mathcal{H}'\big(\|g_{i+1}-g_0\|+\tau\|h_{i+1}-g_{i+1}\|\big)-\mathcal{H}'(\|g_{i+1}-g_0\|)\\ &\qquad\le \frac{\mathcal{H}'\big(k_{i+1}+\tau(s_{i+1}-k_{i+1})\big)-\mathcal{H}'(k_{i+1})}{s_{i+1}-k_{i+1}}\,\|h_{i+1}-g_{i+1}\|\\ &\qquad\le \mathcal{H}'\big(k_{i+1}+\tau(s_{i+1}-k_{i+1})\big)-\mathcal{H}'(k_{i+1}).\end{aligned}$$

Это позволяет получить

$$\begin{aligned}\big\|[T'(g_{i+1})]^{-1}T(h_{i+1})\big\| &\le \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_{i+1})}\int_0^1\big[\mathcal{H}'\big(k_{i+1}+\tau(s_{i+1}-k_{i+1})\big)-\mathcal{H}'(k_{i+1})\big]\big\|h_{i+1}-g_{i+1}\|\,d\tau\\ &= \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_{i+1})}\big[\mathcal{H}(s_{i+1})-\mathcal{H}(k_{i+1})-\mathcal{H}'(k_{i+1})(s_{i+1}-k_{i+1})\big]\frac{\|h_{i+1}-g_{i+1}\|^2}{(s_{i+1}-k_{i+1})^2}\\ &= \frac{-\mathcal{H}(s_{i+1})}{\mathcal{H}'(k_{i+1})}\,\frac{\|h_{i+1}-g_{i+1}\|^2}{(s_{i+1}-k_{i+1})^2},\end{aligned}\tag{3.15}$$

что приводит к следующему:

$$\|z_{i+1}-h_{i+1}\| = \big\|[T'(g_{i+1})]^{-1}T(h_{i+1})\big\| \le \frac{-\mathcal{H}(s_{i+1})}{\mathcal{H}'(k_{i+1})} = v_{i+1}-s_{i+1}. \tag{3.16}$$

Это означает, что $(iv)$ верно для случая $i+1$. Учитывая эти два результата, для $(v)$ мы имеем $\|z_{i+1}-g_{i+1}\| \le \|z_{i+1}-h_{i+1}+h_{i+1}-g_{i+1}\| \le v_{i+1}-s_{i+1}+s_{i+1}-k_{i+1} \le v_{i+1}-k_{i+1}$. Аналогичным образом для следующего соотношения, исходя из (1.3), видим, что

$$g_{i+2}-z_{i+1} = -[T'(g_{i+1})]^{-1}\int_0^1 \big[T'(h_{i+1}+\tau(z_{i+1}-h_{i+1}))-T'(g_{i+1})\big](z_{i+1}-h_{i+1})\,d\tau.$$

С помощью $\varkappa$-среднего условия Липшица (2.1) получим

$$\begin{aligned}
\|g_{i+2}-z_{i+1}\| &\le \big\|[T'(h_{i+1})]^{-1}T'(g_0)\big\| \times \\
&\quad \int_0^1 \big\|[T'(g_0)]^{-1}\big[T'(h_{i+1}+\tau(z_{i+1}-h_{i+1}))-T'(g_{i+1})\big](z_{i+1}-h_{i+1})\big\|\,d\tau \\
&\le \big\|[T'(g_{i+1})]^{-1}T'(g_0)\big\| \times \\
&\quad \int_0^1 \left(\int_{\|g_{i+1}-g_0\|}^{\|g_{i+1}-g_0\|+\|h_{i+1}-g_{i+1}\|+\tau\|z_{i+1}-h_{i+1}\|} \varkappa(u)\,du\right)\|z_{i+1}-h_{i+1}\|d\tau \\
&= \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_{i+1})}\int_0^1 \big[\mathcal{H}'\big(\|g_{i+1}-g_0\|+\|h_{i+1}-g_{i+1}\|+\tau\|z_{i+1}-h_{i+1}\|\big) - \\
&\qquad \mathcal{H}'(\|g_{i+1}-g_0\|)\big]\|z_{i+1}-h_{i+1}\|\,d\tau.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathcal{H}'$ является строго выпуклой в $[0,\rho_0]$ и, кроме того, $\|z_{i+1}-h_{i+1}\| \le v_{i+1}-s_{i+1}$ согласно $(iv)$, из леммы 3.1 получим

$$\begin{aligned}
\|g_{i+2}-z_{i+1}\| &\le \frac{-1}{\mathcal{H}'(t_{i+1})}\Bigg(\int_0^1 \frac{\mathcal{H}'\big(s_{i+1}+\tau(v_{i+1}-s_{i+1})\big)-\mathcal{H}'(k_{i+1})}{(s_{i+1}-k_{i+1})+\tau(v_{i+1}-s_{i+1})}\,d\tau \times \\
&\qquad \|z_{i+1}-h_{i+1}\|\big(\|h_{i+1}-g_{i+1}\|+\tau\|z_{i+1}-h_{i+1}\|\big)\Bigg) \\
&\le \frac{-\mathcal{H}(v_{i+1})}{\mathcal{H}'(k_{i+1})}\left[\frac{\|z_{i+1}-h_{i+1}\|}{v_{i+1}-s_{i+1}}\,\frac{\|h_{i+1}-g_{i+1}\|+\tau\|z_{i+1}-h_{i+1}\|}{s_{i+1}-k_{i+1}+\tau\|v_{i+1}-s_{i+1}\|}\right] \\
&\le (k_{i+2}-v_{i+1})\left[\frac{\|z_{i+1}-h_{i+1}\|}{v_{i+1}-s_{i+1}}\,\frac{\|h_{i+1}-g_{i+1}\|+\tau\|z_{i+1}-h_{i+1}\|}{s_{i+1}-k_{i+1}+\tau\|v_{i+1}-s_{i+1}\|}\right] \\
&\le (k_{i+2}-v_{i+1}),
\end{aligned}$$

что доказывает $(vi)$ для случая $i+1$. Кроме того, в результате (3.14) и (3.16) имеем

$$\begin{aligned}
\|g_{i+2}-g_{i+1}\| &\le \|g_{i+1}-z_{i+1}\|+\|z_{i+1}-h_{i+1}\|+\|h_{i+1}-g_{i+1}\| \\
&\le (k_{i+2}-v_{i+1})+(v_{i+1}-s_{i+1})+(s_{i+1}-k_{i+1}) = k_{i+2}-k_{i+1}.
\end{aligned}$$

Следовательно, все формулы утверждения леммы верны по индукции. Доказательство завершено. □

## 4. Основной результат полулокальной сходимости для ТШСТН (1.3)

Теперь мы готовы продемонстрировать свойства полулокальной сходимости, включая сходимость, единственность и скорость сходимости ТШСТН (1.3) при $\varkappa$-среднем условии Липшица (2.1) в банаховых пространствах. Кроме того, этот основной результат имеет важное значение, поскольку он дает два особых случая, а именно, сходимость $Y$ и, при условии Липшица, сходимость типа Канторовича.

Следующие леммы будут играть важную роль в этом.

**Лемма 4.1.** *При использовании тех же гипотез, что в лемме 3.4, последовательность $g_i$ сходится к точке $\xi^* \in \overline{M(g_0, \iota^*)}$ при $T(\xi^*) = 0$. Кроме того, мы имеем*

$$\|\xi^* - g_i\| \leq \iota^* - k_i, \quad i \geq 0, \tag{4.1}$$

$$\|\xi^* - h_i\| \leq (\iota^* - s_i)\left(\frac{\|\xi^* - g_i\|}{\iota^* - k_i}\right)^2, \quad i \geq 0, \tag{4.2}$$

$$\|\xi^* - z_i\| \leq (\iota^* - v_i)\left(\frac{\|\xi^* - g_i\|}{\iota^* - k_i}\,\frac{\|\xi^* - h_i\|}{\iota^* - s_i}\right), \quad i \geq 0. \tag{4.3}$$

**Доказательство.** Используем $(vii)$ из леммы 3.4 и соотношение (3.8) для доказательства того, что

$$\sum_{i=N}^{\infty}\|g_{i+1} - g_i\| \leq \sum_{i=N}^{\infty}(k_{i+1} - k_i) = \iota^* - k_N < +\infty \quad \text{для любого } N \in \mathbb{N}.$$

В результате, $g_i$ — последовательность Коши в $M(g_0, \iota^*)$ и, следовательно, она сходится к $\xi^* \in \overline{M(g_0, \iota^*)}$. Для каждого $i \geq 0$ приведенное выше неравенство означает, что $\|\xi^* - g_i\| \leq \iota^* - k_i$. Теперь покажем, что $T(\xi^*) = 0$. В соответствии с леммой 3.3 мы можем утверждать, что $T(g_i)$ ограничено. Затем из доказанной леммы 3.4 следует, что

$$\big\|T(g_i)\big\| \leq \big\|T'(g_i)\big\|\,\big\|[T'(g_i)]^{-1}T(g_i)\big\| \leq \big\|T'(g_i)\big\|(s_i - k_i).$$

Пусть $i \to \infty$, и учитывая тот факт, что $s_i$ и $k_i$ сходятся к одной и той же точке $\iota^*$ (см. замечание 3.1), мы получим $\lim_{i\to\infty} T(g_i) = 0$. Поскольку $T$ непрерывно в $\overline{M(g_0, \iota^*)}$, $g_i \subset M(g_0, \iota^*)$ и $g_i$ сходится к $\iota^*$, получаем $\lim_{i\to\infty} T(g_i) = T(\xi^*)$, что подтверждает равенство $T(\xi^*) = 0$. Остается показать оценки (4.2) и (4.3). Согласно лемме 3.4, имеем

$$\|h_i - g_0\| \leq \|h_i - g_i\| + \|g_i - g_0\| \leq s_i. \tag{4.4}$$

Однако мы можем получить следующее тождество:

$$\xi^* - h_i = -\big[T'(g_i)\big]^{-1}\int_0^1 \big[T'(g_i + \tau(\xi^* - g_i)) - T'(g_i)\big](\xi^* - g_i)\,d\tau.$$

Далее, учитывая тот факт, что $\mathcal{H}'$ является выпуклой и возрастает в $[0, \rho_0)$, можно объединить соотношение (3.12), $\varkappa$-среднее условие Липшица (2.1) и лемму 3.1, тогда

$$
\begin{aligned}
\|\xi^* - h_i\| &\le \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_i)} \int_0^1 \left( \int_{\|g_i-g_0\|}^{\|g_i-g_0\|+\|\tau(\xi^*-g_i)\|} \varkappa(u)\,du \right) \|\xi^* - g_i\|\,d\tau \\
&\le \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_i)} \int_0^1 \left[\mathcal{H}'\big(\|g_i-g_0\| + \tau\|\xi^*-g_i\|\big) - \mathcal{H}'(\|g_i-g_0\|)\right] \|\xi^*-g_i\|\,d\tau \\
&\le \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_i)} \int_0^1 \frac{\mathcal{H}'(k_i+\tau(\iota^*-k_i)) - \mathcal{H}'(k_i)}{\iota^*-k_i}\,d\tau\,\|\xi^*-g_i\|^2 \\
&\le (\iota^* - s_i)\frac{\|\xi^*-g_i\|^2}{(\iota^*-k_i)^2}.
\end{aligned}
$$

Необходимо получить оценки (4.2) и (4.3). В результате леммы 3.4 получим

$$
\|z_i - g_0\| \le \|z_i - h_i\| + \|h_i - g_0\| \le v_i. \tag{4.5}
$$

Кроме того, мы можем получить следующее тождество:

$$
\xi^* - z_i = -[T'(g_i)]^{-1} \int_0^1 \left[T'\big(h_i + \tau(\xi^*-h_i)\big) - T'(g_i)\right](\xi^*-h_i)\,d\tau.
$$

Далее, учитывая, что $\mathcal{H}'$ является выпуклой и возрастает в $[0,\rho_0)$, можно объединить соотношение (3.12), лемму 3.1 и $\varkappa$-среднее условие Липшица (2.1):

$$
\begin{aligned}
\|\xi^* - z_i\| &\le \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_i)} \int_0^1 \left( \int_{\|g_i-g_0\|}^{\|g_i-g_0\|+\|h_i-g_i+\tau(\xi^*-h_i)\|} \varkappa(u)du \right) \|\xi^*-h_i\|\,d\tau \\
&= \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_i)} \int_0^1 \left[\mathcal{H}'\big(\|g_i-g_0\| + \|h_i-g_i+\tau(\xi^*-h_i)\|\big) - \mathcal{H}'(\|g_i-g_0\|)\right] \|\xi^*-h_i\|\,d\tau \\
&\le \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_i)} \int_0^1 \frac{\mathcal{H}'\big(s_i+\tau(\iota^*-s_i)\big) - \mathcal{H}'(k_i)}{\iota^*-k_i}\,\|\xi^*-g_i\|\,d\tau\,\|\xi^*-h_i\| \\
&\le (\iota^*-v_i)\frac{\|\xi^*-g_i\|\,\|\xi^*-h_i\|}{(\iota^*-k_i)(\iota^*-s_i)}.
\end{aligned}
$$

Доказательство леммы получено. □

**Лемма 4.2.** *При стандартных условиях как в лемме 3.4 и, используя гипотезу, что* $1 + \iota^*\mathcal{H}''(\iota^*)/\mathcal{H}'(\iota^*) > 0$, *мы видим, что*

$$
\frac{z_i - h_i}{v_i - s_i} \le \frac{1 - \dfrac{\mathcal{H}''(\iota^*)}{\mathcal{H}'(\iota^*)}(\iota^*-k_i)}{1 + \dfrac{\mathcal{H}''(\iota^*)}{\mathcal{H}'(\iota^*)}(\iota^*-k_i)}\;\frac{\|\xi^*-h_i\|^2}{\|\iota^*-s_i\|^2}. \tag{4.6}
$$

**Доказательство.** Из схемы (3.7) мы можем получить

$$
\iota^* - v_i = \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_i)} \int_0^1 \mathcal{H}'\big(s_i + \tau(\iota^*-s_i)\big) - \mathcal{H}'(k_i)(\iota^*-s_i)\,d\tau.
$$

Учитывая тот факт, что $\mathcal{H}'$ является выпуклой в $[0,\rho_0)$, лемма 3.1 утверждает, что для любого $\tau \in (0,1]$

$$
\mathcal{H}'\big(s_i+\tau(\iota^*-s_i)\big) - \mathcal{H}'(k_i) \le \frac{\mathcal{H}'(\iota^*) - \mathcal{H}'(k_i)}{\iota^*-k_i}\big(s_i+\tau(\iota^*-s_i)\big) \le \mathcal{H}''(\iota^*)\,(\iota^*-k_i).
$$

Поэтому, учитывая положительное свойство $1/\mathcal{H}'(k)$, из приведенной выше леммы 3.1 можно заключить, что

$$\iota^* - v_i \le \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_i)} \int_0^1 \frac{\mathcal{H}'(\iota^*) - \mathcal{H}'(k_i)}{\iota^* - k_i} (\iota^* - k_i)(\iota^* - s_i)\, d\tau = \frac{-\mathcal{H}''(\iota^*)}{\mathcal{H}'(\iota^*)} (\iota^* - k_i)(\iota^* - s_i). \quad (4.7)$$

Поскольку $\|z_i - h_i\| \le \|\xi^* - z_i\| + \|\xi^* - h_i\|$, из выражений (4.2) и (4.3) следует, что

$$\|z_i - h_i\| \le (\iota^* - v_i) \left( \frac{\|\xi^* - g_i\|}{\iota^* - k_i} \frac{\|\xi^* - h_i\|}{\iota^* - s_i} \right) + \|\xi^* - h_i\| \le \left( \frac{\iota^* - v_i}{\iota^* - s_i} + 1 \right) \|\xi^* - h_i\|. \quad (4.8)$$

Наконец, с использованием (4.7) можем пойти дальше:

$$\|z_i - h_i\| \le \left( 1 - \frac{\mathcal{H}''(\iota^*)}{\mathcal{H}'(\iota^*)} (\iota^* - k_i) \right) \|\xi^* - h_i\|.$$

В результате (3.10) мы можем получить

$$\frac{\|z_i - h_i\|}{v_i - s_i} \le \frac{\left(1 - \frac{\mathcal{H}''(\iota^*)}{\mathcal{H}'(\iota^*)}(\iota^* - k_i)\right)}{\left(1 + \frac{\mathcal{H}''(\iota^*)}{\mathcal{H}'(\iota^*)}(\iota^* - k_i)\right)} \frac{\|\xi^* - h_i\|^2}{(\iota^* - k_i)^2}. \qquad \square$$

Таким образом, используя леммы 4.1 и 4.2, мы можем получить следующую теорему.

**Теорема 4.1.** *Рассмотрим нелинейный оператор $T : \mathbb{D} \subset U \to V$, который является непрерывно дифференцируемым по Фреше и определенным в открытом и выпуклом подмножестве $\mathbb{D}$. Предположим, что имеется начальное приближение $g_0 \in \mathbb{D}$, для которого существует $[T(g_0)]^{-1}$, и что $T$ удовлетворяет $\varkappa$-среднему условию Липшица* (2.1) *в шаре $M(g_0, \iota^*)$. Рассмотрим последовательность итераций $\{g_i\}$, полученных путем использования ТШСТН* (1.3) *с начальным значением $g_0$. Если постоянные удовлетворяют $0 < \beta \le B$, то последовательность $\{g_i\}$, полученная путем использования ТШСТН* (1.3) *с начальным приближением $g_0$, должна быть вполне определена и считаться сходящейся к единственному решению $\xi^*$ уравнения* (1.1) *в шаре $\overline{M(g_0, \rho)}$ с порядком* 4, *где $\rho$ определяется как $\rho := \sup\{k \in (\iota^*, R) : \mathcal{H}(k) \le 0\}$. Кроме того, это решение гарантированно будет единственным в пределах большего шара $\overline{M(g_0, \rho)}$, где $\iota^* \le \rho < k^{**}$. Кроме того, если*

$$1 + \frac{\iota^* \mathcal{H}''(\iota^*)}{\mathcal{H}'(\iota^*)} > 0 \iff 1 - \frac{\iota^* \varkappa(\iota^*)}{1 - \int_0^{\iota^*} \varkappa(u) du} > 0, \quad (4.9)$$

*тогда можно ожидать по меньшей мере четвертого порядка сходимости и получить следующие границы ошибки*:

$$\|\xi^* - g_{i+1}\| \le -\frac{1}{2} \mathcal{H}_*^3 \frac{1 - \iota^* \mathcal{H}_*}{1 + \iota^* \mathcal{H}_*} \|\xi^* - g_i\|^4, \quad i \ge 0, \quad (4.10)$$

*где $\mathcal{H}_* \triangleq \mathcal{H}''(\iota^*)/\mathcal{H}'(\iota^*)$.*

**Доказательство.** С помощью доказанной леммы 3.4 мы можем подтвердить, что последовательность $g_i$ является вполне определенной. На основании $(vii)$ леммы 3.4 и (3.8) можно сделать вывод, что $\|g_i - g_0\| \le k_i < \iota^*$ для $i \ge 0$ и в результате $g_i$ находится внутри шара $M(g_0, \iota^*)$. Кроме того, согласно лемме 4.1, последовательность $\{g_i\}$ сходится к решению $\xi^*$ уравнения (1.1) в $M(g_0, \iota^*)$. На следующем шаге мы подтвердим пятый порядок сходимости итерационного метода. Для этого используем обычные аналитические методы, чтобы получить следующий результат:

$$\begin{aligned}\xi^* - g_{i+1} &= \xi^* - z_i + [T'(g_i)]^{-1}T(z_i)\\ &= -[T'(g_i)]^{-1}[T(\xi^*) - T(z_i) - T'(g_i)(\xi^* - z_i)]\\ &= -[T'(g_i)]^{-1}\left[\int_0^1 \big(T'(z_i^\tau) - T'(z_i)\big)(\xi^* - z_i)\,d\tau + \big(T'(z_i) - T'(g_i)\big)(\xi^* - z_i)\right],\end{aligned} \tag{4.11}$$

где $g_i^\tau := g_i + \tau(\xi^* - g_i)$. Используя $\varkappa$-среднее условие Липшица (2.1) и уравнение (3.12), мы можем получить

$$\|\iota^* - g_{i+1}\| \le \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_i)}\left[\int_0^1 \left(\int_{\|z_i - g_0\|}^{\|z_i - g_0\| + \|z_i - z_i + \tau(\xi^* - z_i)\|} \varkappa(u)\,du\right)\|\xi^* - z_i\|\,d\tau + \int_{\|g_i - g_0\|}^{\|g_i - g_0\| + \|z_i - g_i\|} \varkappa(u)\,du\,\|\xi^* - z_i\|\right].$$

Далее, учитывая, что $\mathcal{H}'$ является выпуклой и возрастает в $[0, \rho_0)$, можно объединить соотношения (4.1), (4.5), лемму 3.1, лемму 3.4 и $\varkappa$-среднее условие Липшица (2.1):

$$\begin{aligned}\|\xi^* - g_{i+1}\| &\le \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_i)}\left[\int_0^1 \frac{\mathcal{H}'(v_i + \tau(\iota^* - v_i)) - \mathcal{H}'(v_i)}{\iota^* - v_i}\|\xi^* - z_i\|^2\,d\tau + \frac{\mathcal{H}'(v_i) - \mathcal{H}'(k_i)}{v_i - k_i}\|\xi^* - z_i\|\,\|z_i - g_i\|\right]\\ &= \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_i)}\left[\big(\mathcal{H}(\iota^*) - \mathcal{H}(v_i) - \mathcal{H}'(v_i)(\iota^* - v_i)\big)\frac{\|\xi^* - z_i\|^2}{(\iota^* - v_i)^2} + \big(\mathcal{H}'(v_i) - \mathcal{H}'(k_i)\big)(\iota^* - v_i)\frac{\|\xi^* - z_i\|}{(\iota^* - v_i)}\frac{\|z_i - g_i\|}{v_i - k_i}\right].\end{aligned}$$

Снова используя лемму 3.4 и соотношения (4.1), (4.5), можно получить следующее неравенство из приведенного выше выражения:

$$\|\xi^* - g_{i+1}\| \le (\iota^* - k_{i+1})\left[\frac{\|\xi^* - g_i\|}{\iota^* - k_i}\right]^3. \tag{4.12}$$

Теперь из (3.9) можно получить

$$\frac{\|\xi^* - g_{i+1}\|}{\|\xi^* - g_i\|^3} \le \frac{\iota^* - k_{i+1}}{(\iota^* - k_i)^3} \le -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{H}''(\iota^*)^3}{\mathcal{H}'(\iota^*)^3}(\iota^* - k_i). \tag{4.13}$$

Взяв предел при приближении $i$ к бесконечности в предыдущих неравенствах, и учитывая, что $\{k_i\}$ сходится к $\iota^*$, мы получим

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\|\xi^* - g_{i+1}\|}{\|\xi^* - g_i\|^3} = 0. \tag{4.14}$$

Кроме того, если условие (4.9) также удовлетворяется, мы можем использовать оценки (4.1), (4.5), (4.6) и (3.9) для получения следующего неравенства из (4.10):

$$\|\xi^* - g_{i+1}\| \le \frac{-1}{\mathcal{H}'(k_i)}\left[\big(\mathcal{H}(\iota^*) - \mathcal{H}(v_i) - \mathcal{H}'(v_i)(\iota^* - v_i)\big)\frac{\|\xi^* - z_i\|^2}{(\iota^* - v_i)^2} + \big(\mathcal{H}'(v_i) - \mathcal{H}'(k_i)\big)\|\xi^* - z_i\|\frac{\|z_i - g_i\|}{(v_i - k_i)}\right]$$

$$\leq -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{H}''(\iota^*)}{\mathcal{H}'(\iota^*)}\right)^3 \frac{1-\dfrac{\iota^*\mathcal{H}''(\iota^*)}{\mathcal{H}'(\iota^*)}}{1+\dfrac{\iota^*\mathcal{H}''(\iota^*)}{\mathcal{H}'(\iota^*)}} \|\xi^* - g_i\|^4. \tag{4.15}$$

В результате мы продемонстрировали оценку (4.10), данную в теореме 4.1, что подтверждает четвертый порядок сходимости итераций.

Наконец докажем, что решение единственно. Сначала установим единственность решения $\xi^*$ для (1.1) в области $\overline{M(g_0,\iota^*)}$. Предположим, что существует альтернативное решение $\xi^{**}$ в $\overline{M(g_0,\iota^*)}$. Это означает $\|\xi^{**}-g_0\| \leq \iota^*$. Затем продемонстрируем с помощью индукции, что

$$\|\xi^{**} - g_i\| \leq \iota^* - k_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots . \tag{4.16}$$

Поскольку $k_0$ равно 0, сценарий, где $i = 0$, очевидно верен. Предполагая, что приведенное выше выражение верно для $i \geq 0$, используем эту же процедуру для оценки $\|\xi^{**} - h_i\|$ из (4.2), а $\|\xi^{**} - z_i\|$ в (4.3) и получим

$$\|\xi^{**} - h_i\| \leq (\iota^* - s_i)\left(\frac{\|\xi^{**} - g_i\|}{\iota^* - k_i}\right)^2, \quad i \geq 0,$$

$$\|\xi^{**} - z_i\| \leq (\iota^* - v_i)\left(\frac{\|\xi^{**} - g_i\|}{\iota^* - k_i}\frac{\|\xi^{**} - h_i\|}{\iota^* - s_i}\right), \quad i \geq 0.$$

Кроме того, используя этот же самый метод оценки $\|\xi^{**} - z_i\|$ в (4.12), мы можем показать, что

$$\|\xi^{**} - g_{i+1}\| \leq (\iota^* - k_{i+1})\left[\frac{\|\xi^{**} - g_i\|}{\iota^* - k_i}\right]^3.$$

Затем, используя индуктивную гипотезу (4.16) для упомянутого выше неравенства, можем заключить, что (4.16) применимо к сценарию $i+1$. Поскольку $\{g_i\}$ сходится к $\xi^*$ и $\{k_i\}$ сходится к $\iota^*$, из (4.16) можно заключить, что $\xi^{**} = \xi^*$. Следовательно, $\xi^*$ — единственный корень (1.1) в $\overline{M(g_0,\iota^*)}$. Необходимо продемонстрировать, что нелинейный оператор $T$ не имеет корней в области $M(g_0,\rho)\backslash\overline{M(g_0,\iota^*)}$. Предполагая обратное, допустим, что $T$ имеет один или несколько корней в этой области, что указывает на наличие $\xi^{**} \in \mathbb{D} \subset X$, где $\iota^* < \xi^{**} - g_0 < \rho$ и $T(\xi^{**}) = 0$. Мы покажем, что вышеупомянутые предположения не верны. Как мы знаем,

$$T(\xi^{**}) = T(g_0) + T'(g_0)(\xi^{**} - g_0) + \int_0^1 \left[T'(g_0^\tau) - T'(g_0)\right](\xi^{**} - g_0)\, d\tau, \tag{4.17}$$

где $g_0^\tau := g_0 + \tau(\xi^{**} - g_0)$. Заметим, что

$$\left\|[T'(g_0)]^{-1}\left[T(g_0) + T'(g_0)(\xi^{**} - g_0)\right]\right\| \geq \|\xi^{**} - g_0\| - \left\|T'(g_0)]^{-1}T(g_0)\right\| = \|\xi^{**} - g_0\| - \mathcal{H}(0).$$

Кроме того, мы используем $\varkappa$-среднее условие Липшица (2.1) для получения

$$\begin{aligned}\left\|\left[T'(g_0)\right]^{-1}\int_0^1 \left[T'(g_0^\tau) - T'(g_0)\right](\xi^{**} - g_0)\, d\tau\right\| &\leq \int_0^1 \left(\int_0^{\tau\|\xi^{**}-g_0\|} \varkappa(u)du\right)\|\xi^{**} - g_0\|\, d\tau \\ &= \int_0^1 \left[\mathcal{H}'(\tau\,\|\xi^{**} - g_0\|) - \mathcal{H}'(0)\right]\|\xi^{**} - g_0\| \\ &= \mathcal{H}\big(\|\xi^{**} - g_0\|\big) - \mathcal{H}(0) - \mathcal{H}'(0)\,\|\xi^{**} - g_0\|.\end{aligned}$$

Учитывая, что $T(\xi^{**}) = 0$ и $\mathcal{H}'(0) = -1$, из (4.17) мы можем сделать вывод о том, что

$$\mathcal{H}(\|\xi^{**} - g_0\|) - \mathcal{H}(0) - \mathcal{H}'(0)\,\|\xi^{**} - g_0\| \geq \|\xi^{**} - g_0\| - \mathcal{H}(0).$$

Это эквивалентно $\mathcal{H}(\|\xi^{**} - g_0\|) \geq 0$. На основании приведенной выше леммы (3.2) можно заключить, что $\mathcal{H}$ является строго положительной в диапазоне $(\|\xi^{**} - g_0\|, \Re)$. Таким образом, понятно, что $\rho < \|\xi^{**} - g_0\|$, а это противоречит первоначальным предположениям. В результате $T$ не имеет корней в $M(g_0, \rho)\backslash\overline{M(g_0, \iota^*)}$, и поэтому $\xi^*$ — единственный корень (1.1) в $M(g_0, \rho)$. Это завершает доказательство. □

**Замечание 4.1.** Проверенные критерии сходимости $0 < \beta \leq B$, как утверждается в теореме (4.1), фактически были первоначально получены Ваном [21] для исследования сходимости метода Ньютона (1.2) в некоторых пределах. Для получения сходимости четвертого порядка необходимо также выполнение условия (4.9).

Результаты позволяют сделать следующие обобщения. Пусть

$$\epsilon := \sup\{t \geq 0 : \; M(g_0, t) \subset \mathcal{D}\}.$$

**Условие 4.1.** Оператор $T'$ удовлетворяет центральному $\varkappa_0$-среднему условию Липшица на шаре $M(g_0, \epsilon)$, если для каждого $x \in M(g_0, \epsilon)$

$$\big\|\big[T'(g_0)\big]^{-1}(T'(x) - T'(g_0))\big\| \leq \int_0^{\|x-g_0\|} \varkappa_0(u)\,du \tag{4.18}$$

для некоторой неубывающей непрерывной и неотрицательной функции, определенной в интервале $[0, \epsilon]$. Предположим, что уравнение $\int_0^{\epsilon} \varkappa_0(u)\,du - 1 = 0$ имеет наименьшее положительное решение $\epsilon_0 \in (0, \epsilon]$. Определим шар $M(g_0, \epsilon_0)$. Из этих определений следует, что

$$M(g_0, \epsilon_0) \subset M(g_0, \epsilon),$$

и, следовательно,

$$\varkappa_0(u) \leq \varkappa(u) \quad \text{для каждого } u \in [0, \epsilon_0].$$

Более того, линейный оператор $T'(x)$ является необратимым для $x \in M(g_0, \epsilon_0)$ и

$$\big\|\big[T'(x)\big]^{-1}T'(g_0)\big\| \leq \frac{1}{1 - \int_0^{\epsilon_0} \varkappa_0(u)\,du}.$$

Эта оценка является более точной, чем

$$\big\|\big[T'(x)\big]^{-1}T'(g_0)\big\| \leq \frac{1}{1 - \int_0^{\epsilon} \varkappa(u)\,du},$$

использовавшаяся в предыдущих пунктах.

Дадим определение ограниченного $\overline{\varkappa}$-среднего критерия Липшица.

**Условие 4.2.** Оператор $T'$ удовлетворяет ограниченному $\overline{\varkappa}$-среднему критерию Липшица на шаре $M(g_0, \epsilon_0)$, если для любых $x$, $y$ при $\|y - x\| + \|x - x_0\| \leq \epsilon_0$ имеет место

$$\left\| \left[T'(g_0)\right]^{-1} (T'(y) - T'(x)) \right\| \leq \int_0^{\|x-g_0\|} \overline{\varkappa}(u)\, du,$$

где $\overline{\varkappa}$ — непрерывная, неубывающая и неотрицательная функция, определенная в интервале $[0, \epsilon_0]$. Из этих определений следует, что

$$\overline{\varkappa}(u) \leq \varkappa(u) \quad \text{для каждого } u \in [0, \epsilon_0].$$

Следовательно, более жесткая функция $\overline{\varkappa}$ может заменить $\varkappa$ во всех предыдущих результатах. Таким образом, достаточные критерии сходимости слабее, и оценки ошибок $\|x_{i+1} - x_i\|$, $\|\xi^* - x_i\|$, по крайней мере, такие же точные. Заметим, что $\varkappa_0 = \varkappa_0(M(g_0, \epsilon))$, $\varkappa = \varkappa(M(g_0, \epsilon))$, а $\overline{\varkappa} = \overline{\varkappa}(M(g_0, \epsilon))$. Также стоит отметить, что функции $\varkappa_0$ и $\overline{\varkappa}$ являются специализациями исходной функции $\varkappa$. Таким образом, для получения этих улучшений не используются никакие дополнительные условия. Оказывается, единственность области решения может быть более точной.

**Теорема 4.2.** *Предположим, что существует решение $\xi^{**} \in M(g_0, \rho_1)$ уравнения $T(g) = 0$ для некоторого $\rho_1 > 0$, условие (4.18) верно на шаре $M(g_0, \rho_1)$ и существует $\rho_2 \geq \rho_1$ такое, что для $b_\tau = (1-\tau)\|\xi^* - g_0\| + \tau\|\xi^{**} - g_0\|$*

$$\int_0^1 \int_0^{(1-\tau)\rho_1 + \tau\rho_2} \varkappa_0(u)\, du\, d\tau < 1. \tag{4.19}$$

*Определим множество $D_1 = M(g_0, \epsilon_0) \cap \overline{M}(g_0, \rho_2)$. Тогда уравнение $T(g) = 0$ имеет единственное решение $\xi^*$ в множестве $D_1$.*

**Доказательство.** Определим линейный оператор $S = \int_0^1 T'(\xi^* + \tau(\xi^{**} - \xi^*))\, d\tau$, где $\xi^{**} \in D_1$ при $T(\xi^{**}) = 0$. Из этого определения и условий (4.18), (4.19) следует, что

$$\left\| \left[T'(g_0)\right]^{-1} \bigl(S - T'(g_0)\bigr) \right\| \leq \int_0^1 \int_0^{b_\tau} \varkappa_0(u)\, du\, d\tau < 1,$$

поскольку $b_\tau < (1-\tau)\rho_1 + \tau\rho_2$. Таким образом, $S$ является необратимым, и из

$$\xi^{**} - \xi^* = S^{-1}\bigl(T(\xi^{**}) - T(\xi^*)\bigr) = S^{-1}(0) - 0$$

мы получим $\xi^{**} = \xi^*$. Доказательство завершено. □

**Замечание 4.2.**
($a$) Предельная точка $\iota^*$ заменяется на $\rho$ в теореме 4.1.
($b$) Если все предположения теоремы 4.1 верны, то пусть $\rho_1 = \iota^*$ и $\xi^{**} = \xi^*$ в теореме 4.2.

**Особые случаи.** Теперь, с использованием теоремы 4.1, мы получим несколько следствий путем рассмотрения различных вариаций положительной функции $\varkappa$. Для начала рассмотрим случай, когда функция $\varkappa$ имеет положительное постоянное значение, а затем $\varkappa$-среднее условие Липшица (2.1) можно упростить до следующего условия Липшица.

**Следствие 4.1.** *Пусть $T : \mathbb{D} \subset U \to V$ — нелинейный оператор, непрерывно дифференцируемый по Фреше в выпуклом подмножестве, т. е. является открытым для $\mathbb{D}$. Предположим, что начальное приближение $g_0 \in \mathbb{D}$, для которого $[T'(g_0)]^{-1}$ существует и, кроме того, $T$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\big\|\big[T'(g_0)\big]^{-1}\big(T'(h)-T'(g)\big)\big\| \le \varkappa\|h-g\|, \quad g,h\in M(g_0,\rho_0), \tag{4.20}$$

*где* $\rho_0 = 1/\varkappa$. *Теперь мажорирующая функция* $\mathcal{H}$, *определенная в уравнении* (3.2), *имеет следующий вид*:

$$\mathcal{H}(k) = \beta - k + \frac{\varkappa}{2}k^2, \quad k\in[0,R].$$

*С помощью уравнения* (3.3) *значение* $R$ *может быть получено как* $R = 2/\varkappa$. *Теперь постоянную* $B$, *определенную в уравнении* (3.3), *можно выразить как* $B = 1/(2\varkappa)$. *Кроме того, лемма 3.2 означает, что если* $\varkappa\beta \le 1/2$, *то корни* $\mathcal{H}$ *в интервалах* $(0, 1/\varkappa)$ *и* $(1/\varkappa, 2/\varkappa)$ *следующие*:

$$\iota^* = \frac{1-\sqrt{1-2\varkappa\beta}}{\varkappa}, \qquad \iota^{**} = \frac{1+\sqrt{1-2\varkappa\beta}}{\varkappa}. \tag{4.21}$$

*Пусть* $\{g_i\}$ — *итерации, сгенерированные ТШСТН* (1.3) *при начальном приближении* $g_0$. *При предположении* $0<\varkappa\beta\le 1/2$ *итерации* $\{g_i\}$ *определены и сходятся к единственному решению* $\xi^*\in M(g_0,\iota^*)$ *уравнения* (1.1), *где* $\iota^*<\rho<\iota^{**}$, *а* $\iota^*$ *и* $\iota^{**}$ *даны в виде* (4.21). *Кроме того, если* $0<\varkappa\beta\le 3/8$, *то порядок сходимости не ниже четвертого, и имеет место следующая граница ошибки*:

$$\|\xi^*-g_{i+1}\| \le \frac{1}{2}\,\frac{\varkappa^3}{(1-2\varkappa\beta)^{3/2}}\,\frac{1}{2\sqrt{1-2\varkappa\beta}-1}\,\|\xi^*-g_i\|^4, \quad i\ge 0. \tag{4.22}$$

Пусть $Y>0$. Рассмотрим положительную функцию $\varkappa$, определяемую следующим выражением:

$$\varkappa(u) := \frac{2Y}{(1-Yu)^3}, \quad u\in\left[0,\frac{1}{Y}\right). \tag{4.23}$$

**Следствие 4.2.** *Предположим, что* $T:\mathbb{D}\subset U\to V$ — *нелинейный оператор, непрерывно дифференцируемый по Фреше в выпуклом подмножестве, т. е. он является открытым для* $\mathbb{D}$, *и* $\exists$ — *это начальное приближение* $g_0\in\mathbb{D}$, *для которого* $[T(g_0)]^{-1}$ *существует, и* $T$ *удовлетворяет условию*

$$\big\|\big[T'(g_0)\big]^{-1}\big(T'(h)-T'(g)\big)\big\| \le \frac{1}{(1-Y\|g-g_0\|-\|h-g\|)^2} - \frac{1}{(1-Y\|g-g_0\|)^2}. \tag{4.24}$$

*Теперь мажорирующая функция* $\mathcal{H}$, *определяемая уравнением* (3.2), *имеет следующий вид*:

$$\mathcal{H}(k) = \beta - k + \frac{Yt^2}{1-Yt}, \quad k\in\left[0,\frac{1}{Y}\right].$$

*Значение* $\rho_0$ *может быть получено с использованием уравнения* (3.3) *как* $\rho_0 = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{Y}$. *Постоянную* $B$, *определяемую уравнением* (3.4), *теперь можно представить как* $B = \frac{0.1715728}{Y}$. *Пусть* $a := \beta Y \le 0.1715728$. *Тогда* $\iota^* = \frac{1+a-\sqrt{(1+a)^2-8a}}{4Y}$ *и* $\iota^{**} = \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2-8a}}{4Y}$ — *корни* $\mathcal{H}$. *Постоянная* $\mathcal{H}^* := \frac{\mathcal{H}''(\iota^*)}{\mathcal{H}'(k^*)}$, *как в теореме* (4.1), *теперь имеет особый вид*: $\mathcal{H}^* = -\frac{32Y}{\sqrt{(1+a)^2-8a}.(3-a+\sqrt{(1+a)^2-8a)^2})}$. *Итерации* $\{g_i\}$ *сгенерированы с помощью ТШСТН* (1.3) *при начальном приближении* $g_0$. *Предположим, что* $0<a\le 0.1715728$. *Итерации* $\{g_i\}$ *определены и сходятся к единственному решению* $\xi^*\in M(g_0,\iota^*)$ *уравнения* (1.1), *где* $\iota^*<\rho<\iota^{**}$, $\iota^*$ *и* $\iota^{**}$. *Кроме того, если* $0<a\le\frac{1}{6}\left(17-\frac{49}{(937-48\sqrt{330})^{1/3}}-(937-48\sqrt{330})^{1/3}\right)$, *то порядок сходимости не менее четвертого, и имеется следующая граница ошибки*:

$$\|\xi^* - g_{i+1}\| \leq \frac{l}{2}(\mathcal{H}^*)^3 l \|\xi^* - g_i\|^4, \quad i \geq 0, \tag{4.25}$$

*где* $l = -\dfrac{7 - a^3 + \sqrt{1-6a+a^2} + a^2(9+\sqrt{1-6a+a^2}) - 3a(5+2\sqrt{1-6a+a^2})}{1 + a^3 - 9\sqrt{1-6a+a^2} - a^2(9+\sqrt{1-6a+a^2}) + a(23+6\sqrt{1-6a+a^2})}$.

## 5. Численный пример, демонстрирующий применение

В данном пункте представлено применение результатов, основанных на анализе полулокальной сходимости, полученных в предыдущем пункте.

**Пример 5.1.** Пусть $X = C[0,1]$ — пространство непрерывных функций, определенных в интервале $[0,1]$ с максимальной нормой $\|g\| = \max_{s\in[0,1]} |g(s)|$, и пусть $\phi = U[0,1]$ представляет функцию $T$ на $\phi$, имеющую следующий вид:

$$T(g)(s) = g(s) - 2\lambda \int_0^1 \gamma(s,k) x(k)^3 \, dk. \tag{5.1}$$

Здесь $\gamma$ — ядро функции Грина, определенное в интервале $[0,1]\times[0,1]$ и задаваемое как

$$\gamma(s,k) = \begin{cases} (1-s)k & k \leq s, \\ s(1-k), & s \leq k. \end{cases}$$

Здесь $s \in [0,1]$, $\lambda$ — вещественное число, $g \in C[0,1]$ — функция, которая должна быть определена. В результате

$$T'(g)h(s) = h(s) - 6\lambda \int_0^1 \gamma(s,k) x(k)^2 h(k) \, dk, \quad h \in \phi. \tag{5.2}$$

Теперь пусть $S = \max_{s\in[0,1]} \int_0^1 |\gamma(s,k)| \, dk$, что в результате дает $S = 1/8$. Кроме того, выбрав $g_0(k) = 0.25$ в качестве начального приближенного решения, для любого $g, h \in \phi$ получим

$$\beta = \left\| \left[T'(g_0)\right]^{-1} T(g_0) \right\| \leq \frac{0.0039063\,|\lambda|}{1 - 0.046875\,|\lambda|}. \tag{5.3}$$

С помощью определения $\varkappa$-среднего из следствия 4.1 получаем $\varkappa = \frac{3}{2}|\lambda| \frac{1}{1-0.046875\,|\lambda|}$. Поскольку $\beta < B$, критерий сходимости удовлетворяется. Эта теорема может использоваться для утверждения, что последовательность, сгенерированная ТШСТН (1.3) при начальном приближении $g_0$, сходится к нулю $T$.

Таблица 1 показывает область единственности и существования решения для значений $\lambda = 0.0625, 0.125, 0.25, 0.5, 1$.

В табл. 2 представлены критерии $\varkappa\beta < 3/8$ и границы ошибки для аналогичных значений $\lambda$. По сравнению с полулокальной сходимостью двухшагового метода из [31], мы видим из табл. 2, что новый критерий сходимости сильнее.

**Таблица 1.** Области единственности и существования решения для ТШСТН

| $\lambda$ | Шар сходимости | |
|---|---|---|
| | Существование $\overline{M(g_0, \iota^*)}$ | Единственность $\overline{M(g_0, \iota^{**})}$ |
| 1.0 | $\overline{M(0.25, 0.00409923)}$ | $\overline{M(0.25, 1.26672)}$ |
| 0.5 | $\overline{M(0.25, 0.00200157)}$ | $\overline{M(0.25, 2.60217)}$ |
| 0.25 | $\overline{M(0.25, 0.00098834)}$ | $\overline{M(0.25, 5.26984)}$ |
| 0.125 | $\overline{M(0.25, 0.00049118)}$ | $\overline{M(0.25, 10.6037)}$ |
| 0.0625 | $\overline{M(0.25, 0.000244864)}$ | $\overline{M(0.25, 21.2706)}$ |

**Таблица 2.** Критерии сходимости и границы ошибки для ТШСТН

| $\lambda$ | $\varkappa\beta < 3/8$ | Границы ошибки |
|---|---|---|
| 1.0 | 0.006449 | 2.01331 |
| 0.5 | 0.00153602 | 0.228242 |
| 0.25 | 0.000374952 | 0.0273677 |
| 0.125 | 0.0000926362 | 0.00335607 |
| 0.0625 | 0.0000230232 | 0.000415678 |

*Благодарности.* Автор хотел бы выразить свою искреннюю благодарность рецензентам за полезные предложения.

## Литература


1. **Ortega J.M., Rheinboldt W.C.** Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. — SIAM, 2000.
2. **Rall L.B.** Computational Solution of Nonlinear Operator Equations. — New York: Robert E. Krieger, 1979.
3. **Kantorovich L.V., Akilov G.P.** Functional Analysis. — Oxford: Pergamon Press, 1982.
4. **Hernandez M.A., Salanova M.A.** Sufficient conditions for semilocal convergence of a fourth-order multipoint iterative method for solving equations in Banach spaces // Southwest J. Pure Appl. Math. — 1999. — Vol. 1. — P. 29–40.
5. **Chen L., Gu C., Ma Y.** Semilocal convergence for a fifth-order Newton's method using recurrence relations in Banach spaces // J. Appl. Math. — 2011. — Vol. 2011. — Article № 786306.
6. **Wang X., Gu C., Kou J.** Semilocal convergence of a multipoint fourth-order super Halley method in Banach spaces // Numer. Algor. — 2011. — Vol. 56. — P. 497–516.
7. **Jaiswal J.P.** Semilocal convergence of an eighth-order method in Banach spaces and its computational efficiency // Numer. Algor. — 2016. — Vol. 71. — P. 933–951.
8. **Jaiswal J.P.** Semilocal convergence analysis and comparison of alternative computational efficiency of the sixth-order method in Banach spaces // Novi Sad J. Math. — 2019. — Vol. 49, № 2. — P. 1–16.
9. **Jaiswal J.P.** Semilocal convergence and its computational efficiency of a seventh-order method in Banach spaces // Proc. National Academy of Sciences, India, Section A: Physical Sciences. — 2020. — Vol. 90, № 2. — P. 271–279.
10. **Prashanth M., Gupta D.K.** Recurrence relations for super-Halley's method with Holder continuous second derivative in Banach spaces // Kodai Math. J. — 2013. — Vol. 36, № 1. — P. 119–136.
11. **Singh S., Gupta D.K., Martínez E., Hueso J.L.** Semilocal and local convergence of a fifth order iteration with Fréchet derivative satisfying Hölder condition // Appl. Math. Comput. — 2016. — Vol. 276, № 5. — P. 266–277.

12. **Jaiswal J.P.** Semilocal convergence of a computationally efficient eighth-order scheme in Banach spaces under Hölder condition on third derivative // J. Analysis. — 2020. — Vol. 28. — P. 141–154.
13. **Gupta Neha, Jaiswal J.P.** Semilocal convergence of a seventh-order method in Banach spaces under Hölder continuity condition // J. Indian Math. Society. — 2020. — Vol. 87. — P. 56–69.
14. **Prashanth M., Gupta D.K.** Semilocal convergence for Super-Halley's method under w-differentiability condition // Japan J. Indust. Appl. Math. — 2015. — Vol. 32, № 1. — P. 77–94.
15. **Jaiswal J.P.** Analysis of semilocal convergence in Banach spaces under relaxed continuity condition and computational efficiency // Numerical Analysis and Applications. — 2017. — Vol. 10, № 2. — P. 129–139.
16. **Jaiswal J.P.** Semilocal convergence of a computationally efficient eighth-order method in Banach spaces under w-continuity condition // Iranian J. Sci. Technol., Transaction A: Science. — 2018. — Vol. 42, № 2. — P. 819–826.
17. **Jaiswal J.P., Panday Bhavna, Choubey Neha** Analysis of semilocal convergence under w-continuity condition on second order Frechet derivative in Banach space // Acta Mathematica Universitatis Comenianae. — 2019. — Vol. 88, № 2. — P. 173–185.
18. **Gupta Neha, Jaiswal J.P.** Semilocal convergence of a seventh-order method in Banach spaces under w-continuity condition // Surveys in Mathematics and its Applications. — 2020. — Vol. 15. — P. 325–339.
19. **Wang X.** Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space // IMA J. Numerical Analysis. — 2000. — Vol. 20. — P. 123–134.
20. **Saxena A., Argyros I.K., Jaiswal J.P., Argyros C., Pardasani K.R.** On the local convergence of two-step Newton type method in Banach spaces under generalized Lipschitz conditions // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, № 6. — Article № 669. — https://doi.org/10.3390/math9060669.
21. **Xinghua W.** Convergence of Newton's method and inverse function theorem in Banach space // Mathematics of Computation. — 1999. — Vol. 68, № 225. — P. 169–186.
22. **Xu X., Li C.** Convergence criterion of Newton method for singular systems with constant rank derivatives // J. Mathematical Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 345, № 2. — P. 689–701.
23. **Ferreira O.P.** A robust semi-local convergence analysis of Newton's method for cone inclusion problems in Banach spaces under affine invariant majorant condition // J. Comput. Appl. Math. — 2015. — Vol. 279. — P. 318–335.
24. **Bittencourt T., Ferreira O.P.** Kantorovich's theorem on Newton's method under majorant condition in Riemannian manifolds // J. Global Optimization. — 2017. — Vol. 68, № 2. — P. 387–411.
25. **Ferreira O.P., Svaiter B.F.** A robust Kantorovich's theorem on the inexact Newton method with relative residual error tolerance // J. Complexity. — 2012. — Vol. 28, № 3. — P. 346–363.
26. **Argyros I.K., Jidesh P., George S.** Ball convergence for second derivative free methods in Banach space // Inter. J. Applied and Computational Mathematics. — 2017. — Vol. 3. — P. 713–720.
27. **Jaiswal J.P.** Existence and uniqueness theorems for a three-step Newton-type method under L-average conditions // J. Nonlinear Modeling and Analysis. — 2022. — Vol. 4, № 4. — P. 650–657.
28. **Ferreira O.P., Svaiter B.F.** Kantorovich's majorants principle for Newton's method // J. Comput. Appl. Math. — 2009. — Vol. 42, № 2. — P. 213–229.
29. **Li C., Ng K.F.** Majorizing functions and convergence of the Gauss–Newton method for convex composite optimization // SIAM J. Optimization. — 2007. — Vol. 18, № 2. — P. 613–642.
30. **Wang J., Hu Y., Wai Yu C.K., Li C., Yang X.** Extended Newton methods for multi-objective optimization: majorizing function technique and convergence analysis // SIAM J. Optimization. — 2019. — Vol. 29, № 3. — P. 2388–2421.

31. **Ling Y., Liang J., Lin W.** On semilocal convergence analysis for two-step Newton method under generalized Lipschitz conditions in Banach spaces // Numerical Algorithms. — 2022. — Vol. 90. — P. 577–606.

32. **Li C., Hu N., Wang J.** Convergence behavior of Gauss-Newton's method and extensions of the Smale point estimate theory // J. Complexity. — 2010. — Vol. 26, № 3. — P. 268–295.

33. **Hiriart-Urruty J.B., Lemaréchal C.** Convex Analysis and Minimization Algorithms I: Fundamentals. — Springer Science & Business Media, 1993.

34. **Ling Y., Xu X.** On the semilocal convergence behavior for Halley's method // Computational Optimization and Applications. — 2014. — Vol. 58, № 3. — P. 597–618.

*Поступила в редакцию 30 августа 2023 г.*
*После исправления 20 октября 2023 г.*
*Принята к печати 27 октября 2023 г.*