

УДК 533.06; 517.958

## ГРУППОВОЕ РАССЛОЕНИЕ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТРАНСЗВУКОВОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

С. В. Головин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследуются точные решения уравнения Кармана — Гудерлея, описывающего в околосзвуковом приближении пространственные течения газа. Построено групповое расслоение уравнения по бесконечномерной части допускаемой группы. Получены новые инвариантные и частично инвариантные решения. Для инвариантных подмоделей с одной независимой переменной проанализирована возможность существования непрерывных во всем пространстве решений. Построено решение уравнения Кармана — Гудерлея типа двойной волны.

Ключевые слова: трансзвуковое течение, инвариантные решения, двойные волны, групповое расслоение.

**1. Постановка задачи.** Одной из распространенных моделей, используемых при описании околосзвуковых течений газа, является уравнение Кармана — Гудерлея

$$-\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0. \quad (1.1)$$

Это уравнение описывает малые возмущения звукового потока, движущегося вдоль оси  $Ox$ . Вывод данного уравнения и примеры решения конкретных газодинамических задач имеются в [1–3]. Наиболее подробно исследован случай двух независимых переменных. При этом уравнение (1.1) эквивалентно системе двух уравнений первого порядка, которая линеаризуется преобразованием годографа. Групповые свойства и точные решения такой системы изучены в [4]. В пространственном случае в основном исследованы автомодельные решения уравнения (1.1). Применение методов группового анализа к уравнению Кармана — Гудерлея позволяет дополнить список его точных решений.

При классификации решений оказалось полезным построение группового расслоения уравнения (1.1) по бесконечномерной части допускаемой группы. На основе группового расслоения получены и приведены все инвариантные подмодели с одной и двумя независимыми переменными. Для подмоделей, в которых инвариантная независимая переменная линейно зависит от полярного угла, проанализирована возможность существования непрерывных во всем пространстве решений. Построено частично инвариантное решение уравнения (1.1) типа двойной волны, обладающее произволом в четыре функции одного аргумента. Остальные частично инвариантные решения могут быть получены с использованием построенной в настоящей работе оптимальной системы подгрупп для конечномерной части допускаемой группы.

**2. Групповые свойства уравнения Кармана — Гудерлея.** Непосредственным вычислением показано, что уравнение (1.1) допускает бесконечномерную алгебру преоб-

разований  $L_6 \oplus L_\infty$ . Ее конечная часть  $L_6$  порождается следующими операторами:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \partial_x, & Y_2 &= \partial_y, & Y_3 &= \partial_z, & Y_4 &= z\partial_y - y\partial_z, \\ Y_5 &= y\partial_y + z\partial_z - 2\varphi\partial_\varphi, & Y_6 &= x\partial_x + 3\varphi\partial_\varphi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Бесконечномерной части  $L_\infty$  допускаемой алгебры соответствует оператор

$$X_\infty = f(y, z)\partial_\varphi, \quad \Delta f(y, z) = 0. \quad (2.2)$$

Нетривиальных контактных преобразований, допускаемых уравнением (1.1), не существует. Целью данной работы является построение инвариантно-групповых решений уравнения (1.1) на основе допускаемой группы, соответствующей алгебре Ли  $L_6 \oplus L_\infty$ . Бесконечномерность допускаемой группы преобразований не позволяет конструктивно описать множество классов ее сопряженных подгрупп. Для решения этой проблемы ниже строится групповое расслоение уравнения (1.1) по бесконечномерной части  $L_\infty$  допускаемой группы. Данное преобразование уравнения Кармана — Гудерлея позволяет представить его в виде эквивалентного объединения двух систем: автоморфной и разрешающей. Автоморфная система обладает следующим свойством: любые два ее решения лежат на орбите одного из них, т. е. переводятся одно в другое с помощью группового преобразования. Напротив, разрешающая система не допускает группы, по которой строится расслоение, и, таким образом, “различает” орбиты существенно различных решений. Разрешающая система наследует лишь конечномерную часть исходной допускаемой группы, ее решения классифицируются на основе известного алгоритма [5]. Решения исходного уравнения восстанавливаются интегрированием автоморфной системы. Подробные сведения об автоморфных системах дифференциальных уравнений и алгоритм построения группового расслоения по заданной группе содержатся в [6].

Первый этап построения группового расслоения состоит в вычислении базиса дифференциальных инвариантов для преобразования, порождаемого алгеброй  $L_\infty$ .

**Лемма 1.** *Базис дифференциальных инвариантов для преобразования, порождаемого оператором  $X_\infty$ , может быть выбран следующим:*

$$x, y, z, \varphi_x, \varphi_{yy} + \varphi_{zz}. \quad (2.3)$$

*Операторами инвариантного дифференцирования являются операторы полного дифференцирования по независимым переменным  $x, y, z$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** леммы проводится следующим образом. Сначала показывается, что функции (2.3) являются инвариантами продолженного оператора  $X_\infty$ . Затем, вычислив размерности продолженного пространства и ранг продолженной группы, можно убедиться, что дифференцированием функций (2.3) по независимым переменным можно получить любой инвариант сколь угодно высокого порядка.

**Лемма 2.** *Групповое расслоение уравнения (1.1) задается автоморфной системой, состоящей из двух уравнений*

$$\varphi_x = a, \quad \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = aa_x \quad (2.4)$$

*и разрешающего уравнения, определяющего функцию  $a(x, y, z)$ :*

$$-aa_{xx} - a_x^2 + a_{yy} + a_{zz} = 0. \quad (2.5)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для построения группового расслоения необходимо назначить два инварианта из базиса функциями оставшихся трех. В данном случае в качестве независимых переменных выбираются инварианты  $x, y, z$ . С учетом исходного уравнения (1.1) получаем систему (2.4). Единственным условием ее совместности является уравнение (2.5), задающее разрешающую часть группового расслоения. Автоморфность системы (2.4) (как

Таблица 1

Номер оператора	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
$X_1$	0	0	0	0	0	$X_1$
$X_2$	0	0	0	$-X_3$	$X_2$	0
$X_3$	0	0	0	$X_2$	$X_3$	0
$X_4$	0	$X_3$	$-X_2$	0	0	0
$X_5$	0	$-X_2$	$-X_3$	0	0	0
$X_6$	$-X_1$	0	0	0	0	0

Таблица 2

$A_i$	$\bar{x}^1$	$\bar{x}^2$	$\bar{x}^3$
$A_1$	$x^1 - \alpha_1 x^6$	$x^2$	$x^3$
$A_2$	$x^1$	$x^2 - \alpha_2 x^5$	$x^3 + \alpha_2 x^4$
$A_3$	$x^1$	$x^2 - \alpha_3 x^4$	$x^3 - \alpha_3 x^5$
$A_4$	$x^1$	$x^2 \cos \alpha_4 + x^3 \sin \alpha_4$	$-x^2 \sin \alpha_4 + x^3 \cos \alpha_4$
$A_5$	$x^1$	$\alpha_5 x^2$	$\alpha_5 x^3$
$A_6$	$\alpha_6 x^1$	$x^2$	$x^3$

системы для функции  $\varphi$  при заданной функции  $a$ ) следует из того, что произвол в решении ее первого уравнения есть аддитивная функция, зависящая от  $y$  и  $z$ , а произвол в решении второго уравнения — аддитивная функция переменных  $x, y, z$ , гармоническая по  $y, z$ . Таким образом, общий произвол в решении системы (2.4) есть аддитивная гармоническая функция переменных  $y, z$ . Этот произвол исчерпывается преобразованием, порождаемым оператором  $X_\infty$ .

Вычисление группы касательных преобразований, допускаемых уравнением (2.5), показало, что оно допускает лишь конечномерную алгебру Ли  $L_6$ , изоморфную алгебре (2.1). Базис ее операторов можно выбрать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y, & X_3 &= \partial_z, & X_4 &= z\partial_y - y\partial_z, \\ X_5 &= y\partial_y + z\partial_z - 2a\partial_a, & X_6 &= x\partial_x + 2a\partial_a. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Конечномерность алгебры (2.6) позволяет построить ее оптимальную систему подалгебр и дать полное описание инвариантно-групповых решений уравнения (2.5). Исходная функция  $\varphi$  восстанавливается интегрированием инволютивной системы (2.4) с известной функцией  $a(x, y, z)$ .

**3. Оптимальная система подалгебр.** Для построения оптимальной системы подалгебр  $\Theta L_6$  используется двухшаговый алгоритм, основанный на композиционном ряде идеалов алгебры [5]. Коммутационные соотношения алгебры (2.6) приведены в табл. 1.

Группа внутренних автоморфизмов  $\text{Int } L_6$  порождается набором однопараметрических групп  $A_i$ , построенных для каждого базисного вектора  $X_i$ . Их действие на произвольный элемент  $X = x^i X_i \in L_6$  описывается действием соответствующих матриц  $A_i(\alpha_i) = \exp(\alpha_i \text{ad } X_i)$  на вектор-столбец  $\mathbf{x} = (x^i)$  (табл. 2). Координаты  $x^4, x^5, x^6$  являются инвариантами группы внутренних автоморфизмов. В силу инволюций  $x \rightarrow -x$  и  $(y, z) \rightarrow -(y, z)$  можно считать, что параметры  $\alpha_5$  и  $\alpha_6$  принимают как положительные, так и отрицательные значения. Используется композиционный ряд идеалов

$$\{X_1\} \subset \{X_1, X_2, X_3\} \subset \{X_1, X_2, X_3, X_4\} \subset \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} \subset L_6, \quad (3.1)$$

на каждом шаге которого возможно разложение идеал — подалгебра.

В координатном представлении каждой  $r$ -мерной подалгебре  $M \subset L_6$  соответствует  $(r \times 6)$ -матрица  $M = \{\xi_j^i\}$ , строки которой содержат координаты ее базисных элементов. Между строками  $H_j = (\xi_j^1, \dots, \xi_j^6)$  должны выполняться условия подалгебры  $[H_p, H_q] = K_{pq}^s H_s$ ,  $p, q = 1, \dots, r$ , где коммутатор  $[H_p, H_q]$  вычисляется по формуле  $[H_p, H_q]^l = C_{ij}^l \xi_p^i \xi_q^j$  ( $C_{ij}^l$  — структурный тензор алгебры  $L_6$  (см. табл. 1);  $K_{p,q}^s$  — структурный тензор алгебры  $M$ ). На множестве матриц  $M$  действуют преобразования базиса (произвольные преобразования строк) и внутренние автоморфизмы (преобразования столбцов, определенные в табл. 2). Построение оптимальной системы подалгебр сводится к перечислению с точностью до указанных преобразований всех матриц  $M$ , отвечающих условиям подалгебры.

В соответствии с композиционным рядом (3.1) оптимальная система  $\Theta L_6$  строится следующим образом: используется базовое разложение  $L_6 = J \oplus N$  с идеалом  $J = \{X_1, X_2, X_3\}$  и подалгеброй  $N = \{X_4, X_5, X_6\}$ . Сначала конструируются оптимальные системы  $\Theta N$  и  $\Theta J$ .

Поскольку операторы  $X_4, X_5, X_6$  являются инвариантами группы  $\text{Int } L_6$ , подалгебры  $N$  классифицируются только относительно преобразований базиса. Оптимальную систему  $\Theta N$  можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} & \{X_4, X_5, X_6\}, \\ & \{X_5 + \alpha X_6, X_4 + \beta X_6\}, \quad \{X_4 + \alpha X_5, X_6\}, \quad \{X_5, X_6\}, \\ & \{X_4 + \alpha X_5 + \beta X_6\}, \quad \{X_5 + \alpha X_6\}, \quad \{X_6\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для построения оптимальной системы  $\Theta J$  можно использовать все преобразования  $\text{Int } L_6$ . В результате получим

$$\begin{aligned} & \{X_1, X_2, X_3\}, \\ & \{X_1 + X_2, X_3\}, \quad \{X_1, X_3\}, \quad \{X_2, X_3\}, \\ & \{X_1 + X_2\}, \quad \{X_1\}, \quad \{X_3\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

На последнем этапе оптимальные системы (3.2) и (3.3) “сращиваются” обычным способом. Подалгебры  $L_6$  описываются  $(r \times 6)$ -матрицами ( $r = 1, \dots, 6$ ), которые преобразованиями базиса всегда можно привести к блочному виду

$$M = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь блоки  $\xi, \eta, \zeta$  — матрицы, содержащие по три столбца. Блок  $\eta$  соответствует представителям  $\Theta N$ , блок  $\zeta$  — подалгебрам  $J$ , блок  $\xi$  — матрице с неопределенными коэффициентами. После подстановки конкретных элементов  $J_k \in \Theta J$  и  $N_l \in \Theta N$  в матрицу  $M$  блок  $\xi$  максимально упрощается с помощью преобразований базиса, не меняющих блок  $\eta$ , и внутренних автоморфизмов. Затем для строк матрицы  $M$  проверяются условия подалгебры, которые дают дополнительные ограничения на произвольные элементы, оставшиеся в блоке  $\xi$ . Полученную оптимальную систему необходимо привести к нормализованной, т. е. использовать произвол в выборе представителей классов эквивалентности таким образом, чтобы вместе с каждой подалгеброй  $M$  в оптимальной системе  $\Theta L_6$  содержался ее нормализатор  $\text{Nor}_{L_6} M$ .

Нормализованная оптимальная система подалгебр  $\Theta L_6$  приведена в п. 7.

**4. Инвариантные подмодели.** Для построения инвариантных подмоделей используются одномерные и двумерные представители оптимальной системы  $\Theta L_6$ . Инвариантное представление для функции  $\varphi$  получим следующим образом. Для каждого представителя

$H \subset \Theta L_6$  проверяются условия существования инвариантного решения уравнения (2.5). Записывается представление для функции  $a$ , по которому восстанавливается представление для  $\varphi$  интегрированием автоморфной системы (2.4). Применим описанный алгоритм к подмодели, описывающей течения газа с винтовыми поверхностями уровня.

**Подмодель 2.4.** Порождающая подалгебра задается операторами  $L_{2.4} = \{X_1 + X_4, X_5\}$ . В цилиндрической системе координат  $(x, r, \theta)$  базисные операторы подалгебры записываются в виде

$$L_{2.4} = \{\partial_x + \partial_\theta, r\partial_r - 2a\partial_a - 2\varphi\partial_\varphi\}$$

(здесь объединены представления (2.1) и (2.6)). Инварианты  $L_{2.4}$ :

$$\lambda = x - \theta, \quad r^2\varphi, \quad r^2a. \quad (4.1)$$

Представление решения:  $a = r^{-2}b(\lambda)$ . Подставляя представление решения в уравнение (2.5), получим уравнение для инвариантной функции  $b(\lambda)$

$$(b - 1)b'' + b'^2 - 4b = 0.$$

Восстанавливаем функцию  $\varphi$  интегрированием автоморфной системы (2.4), из первого уравнения которой следует

$$\varphi = \frac{1}{r^2} \int b(\lambda) dx = \frac{1}{r^2} \int b(\lambda) d\lambda = \frac{1}{r^2} B(\lambda) + \varphi^0(r, \theta). \quad (4.2)$$

Здесь  $b(\lambda) = B'(\lambda)$ ;  $\varphi^0$  — некоторая пока произвольная функция. Подставляем представление (4.2) во второе уравнение (2.4). Группируя слагаемые, зависящие от разных переменных, получаем уравнение

$$\frac{1}{r^4}(B'' - B'B'' + 4B) + \varphi_{rr}^0 + \frac{1}{r}\varphi_r^0 + \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}^0 = 0. \quad (4.3)$$

Разделяя переменные в (4.3), находим

$$(1 - B')B'' + 4B = C, \quad \varphi_{rr}^0 + \frac{1}{r}\varphi_r^0 + \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}^0 = -\frac{C}{r^4}, \quad C = \text{const}. \quad (4.4)$$

В силу автоморфности системы (2.4) любые два ее решения связаны групповым преобразованием (2.2), поэтому для определения функции  $\varphi^0$  достаточно найти любое частное решение второго уравнения (4.4). Например, можно взять решение

$$\varphi^0 = -C/(4r^2). \quad (4.5)$$

Из сравнения (4.2) и (4.5) следует, что с точностью до выбора функции  $B(\lambda)$  представление функции  $\varphi$  эквивалентно представлению  $\varphi = r^{-2}B(\lambda)$ . Такое же представление можно получить, отыскивая инвариантное  $L_{2.4}$ -решение для исходного уравнения (1.1).

Для большинства представителей  $H \subset \Theta L_6$  инвариантные подмодели, полученные описанным выше способом, совпадают с  $H$ -инвариантными решениями уравнения (1.1). Это не выполняется для подмоделей 2.8, 2.18 и 2.19. В этих случаях алгоритм, связанный с интегрированием разрешающего уравнения и автоморфной системы, дает более широкий класс решений.

Все инвариантные подмодели, зависящие от одной и двух независимых переменных, приведены в табл. 3, 4. В первой графе указаны номера подмоделей в соответствии с номерами порождающих подалгебр в  $\Theta L_6$ . Во второй графе приведено представление решения. Инвариантная функция  $B$  зависит от инвариантных независимых переменных  $\lambda, \mu$  в случае подмоделей ранга 2 и от одной переменной  $\lambda$  в случае подмоделей ранга 1. В третьей графе приведено уравнение для определения функции  $B$ . В большинстве подмоделей инвариантная независимая переменная выбрана таким образом, чтобы полученное уравнение

Таблица 3

Номер подмодели	Представление решения	Уравнения подмодели
2.1	$\varphi = x^3 r^{-2} B(\lambda),$ $\lambda = \alpha\theta + \beta \ln r - \ln  x $	$(\alpha^2 + \beta^2 - 3B + B')B'' - 5(B')^2 +$ $+ (-4\beta + 21B)B' + 4B - 18B^2 = 0$
2.2	$\varphi = r^{-2} B(\lambda), \lambda = x$	$B' B'' = 4B$
2.3	$\varphi = r^{-2} B(\lambda), \lambda = x - \alpha\theta - \ln r$	$(1 + \alpha^2 - B')B'' + 4B' + 4B = 0$
2.4	$\varphi = r^{-2} B(\lambda), \lambda = x - \theta$	$(1 - B')B'' + 4B = 0$
2.5	$\varphi = x^3 r^{-2} B(\lambda), \lambda = \alpha\theta - \ln r$	$(1 + \alpha^2)B'' + 4B' + 4B - 18B^2 = 0$
2.6	$\varphi = x^3 r^{-2} B(\lambda), \lambda = \theta$	$B'' + 4B - 18B^2 = 0$
2.8	$\varphi = z(B(\lambda) + C \ln  z ),$ $\lambda = (x - y)/z$	$B''(B' - 1 - \lambda^2) = C$
2.9	$\varphi = x^3 y^{-2} B(\lambda), \lambda = x y^{-\alpha}$	$(\alpha^2 - 3B - \lambda B')\lambda^2 B'' + (5\alpha + \alpha^2 -$ $- 24B)\lambda B' - 6\lambda^2 (B')^2 - 18B^2 + 6B = 0$
2.10	$\varphi = y^{-2} B(\lambda), \lambda = x$	$B' B'' = 6B$
2.11	$\varphi = y^{-2} B(\lambda), \lambda = x - \ln  y $	$(1 - B')B'' + 5B' + 6B = 0$
2.14	$\varphi = x^3 B(\lambda), \lambda = y$	$B'' = 18B^2$
2.15	$\varphi = x^3 B(\lambda), \lambda = y - \ln  x $	$(1 - 3B + B')B'' - 5(B')^2 + 21BB' - 18B^2 = 0$
2.18	$\lambda = x - z$	$\varphi = x + \text{sign}(x - y) y^2 / 4 \pm 2 x - y ^{3/2} / 3$
2.19	$\lambda = z$	$\varphi = \pm  x ^{3/2} + 9 \text{sign}(x) y^2 / 16$

для функции  $B$  было автономным. Указаны только те подмодели, в которых функция  $\varphi$  зависит от переменной  $x$ .

**5. Подмодели ранга 1.** Для выяснения характера движения, описываемого инвариантными подмоделями, большую роль играет вид поверхностей уровня  $\lambda = \text{const}$ . Такие важные характеристики течения, как звуковая поверхность, форма ударной волны, инвариантные характеристики, предельная поверхность, задаются уравнением  $\lambda = C$  с некоторой константой  $C$ , определяемой из дополнительных условий. Из табл. 3 следует, что вид поверхностей уровня может быть достаточно нетривиальным.

В подмоделях 2.1, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 инвариантная независимая переменная  $\lambda$  линейно зависит от полярного угла  $\theta$ . Это обстоятельство накладывает ограничение на возможный вид функции  $B$ : для непрерывности решения во всем пространстве функция  $B$  должна быть периодической с полупериодом

$$T = \pi/N, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

Анализ особых точек на фазовой плоскости  $(B', B)$  для всех перечисленных подмоделей показал, что особые точки типа "центр" имеют лишь подмодели 2.4 и 2.6. Проверим для них возможность выполнения условия (5.1).

Таблица 4

Номер подмодели	Представление решения	Уравнение подмодели
1.1	$\varphi = r^{-2}B(\lambda, \mu),$ $\lambda = \alpha\theta - \ln r, \mu = x - \theta$	$(1 + \alpha^2)B_{\lambda\lambda} + (1 - B_\mu)B_{\mu\mu} - 2\alpha B_{\lambda\mu} +$ $+ 4B_\lambda + 4B = 0$
1.2	$\varphi = x^3r^{-2}B(\lambda, \mu), \lambda = \alpha\theta - \ln r,$ $\mu = \ln r - k \ln  x , k = \alpha/\beta$	$(1 + \alpha^2)B_{\lambda\lambda} + (1 - 3k^2B + k^3B_\mu) B_{\mu\mu} - 2B_{\lambda\mu} +$ $+ 4B_\lambda + (21kB - 4)B_\mu - 5k^2B_\mu^2 - 18B^2 + 4B = 0$
1.3	$\varphi = r^{-2}B(\lambda, \mu), \lambda = \alpha\theta - \ln r, \mu = x$	$(1 + \alpha^2)B_{\lambda\lambda} - B_\mu B_{\mu\mu} + 4B_\lambda + 4B = 0$
1.4	$\varphi = r^{-2}B(\lambda, \mu), \lambda = \theta, \mu = x - \ln r$	$B_{\lambda\lambda} + (1 - B_\mu)B_{\mu\mu} + 4B_\mu + 4B = 0$
1.5	$\varphi = x^3r^{-2}B(\lambda, \mu), \lambda = \theta,$ $\mu = \ln  x  - \alpha \ln r$	$B_{\lambda\lambda} + (\alpha^2 - 3B - B_\mu)B_{\mu\mu} - 5B_\mu^2 +$ $+ (4\alpha - 21B)B_\mu - 18B^2 + 4B = 0$
1.6	$\varphi = r^{-2}B(\lambda, \mu), \lambda = \theta, \mu = x$	$B_{\lambda\lambda} - B_\mu B_{\mu\mu} + 4B = 0$
1.7	$\varphi = x^3B(\lambda, \mu),$ $\lambda = z, \mu = y - \ln  x $	$B_{\lambda\lambda} + (1 - 3B + B_\mu)B_{\mu\mu} -$ $- 5B_\mu^2 + 21B B_\mu = 18B^2$
1.8	$\varphi = x^3B(\lambda, \mu), \lambda = x, \mu = y$	$B_{\lambda\lambda} + B_{\mu\mu} = 18B^2$
1.9	$\varphi = B(\lambda, \mu), \lambda = x - y, \mu = x$	$(1 - B_\lambda) B_{\lambda\lambda} + B_{\mu\mu} = 0$
1.10	$\varphi = B(\lambda, \mu), \lambda = x, \mu = y$	$B_\lambda B_{\lambda\lambda} - B_{\mu\mu} = 0$

Подмодель 2.4. Представление решения в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\varphi = B(\lambda)/r^2, \quad \lambda = x - \theta. \quad (5.2)$$

Функция  $B(\lambda)$  удовлетворяет уравнению

$$(1 - B')B'' + 4B = 0. \quad (5.3)$$

В параметрическом виде общее решение уравнения (5.3) задается формулами

$$\lambda = \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{(p+1) dp}{\sqrt{C + 2p^3 - 3p^2}}, \quad B = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{C + 2p^3 - 3p^2}$$

и может быть представлено в терминах эллиптических функций. Однако поведение функции  $B(\lambda)$  удобно описывать по картине интегральных кривых на фазовой плоскости  $(p, B)$ ,  $p = B'$ , которые задаются уравнением

$$-2p^3 + 3p^2 + 12B^2 = C. \quad (5.4)$$

Согласно классификации Ньютона кривая (5.4) представляет собой расходящуюся параболу. Кривые (5.4) при различных значениях  $C$  представлены на рис. 1. Имеется два критических значения  $C = 0$  и  $C = 1$ . В первом случае кривая (5.4) представляет собой кривую (штриховая линия на рис. 1) и точку  $(0, 0)$ . При  $0 < C < 1$  точка “разрастается” в замкнутые кривые, и при  $C = 1$  кривые справа и замкнутые кривые вокруг точки  $(0, 0)$  смыкаются, образуя петлю (жирная линия на рис. 1). Периодическим решениям уравнения (5.3) соответствуют значения  $0 \leq C \leq 1$ . Полупериод решения есть

$$T = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{p_1}^{p_2} \frac{(p+1) dp}{\sqrt{C + 2p^3 - 3p^2}}, \quad (5.5)$$

где  $p_i$  — корни уравнения  $C = -2p^3 + 3p^2$ , упорядоченные по возрастанию (рис. 2).

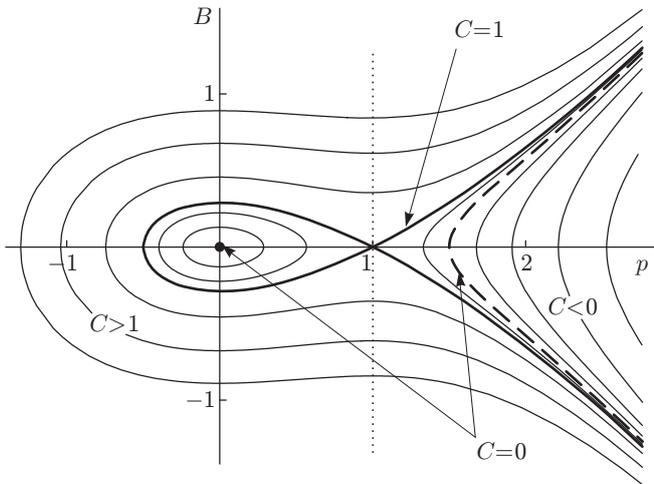


Рис. 1

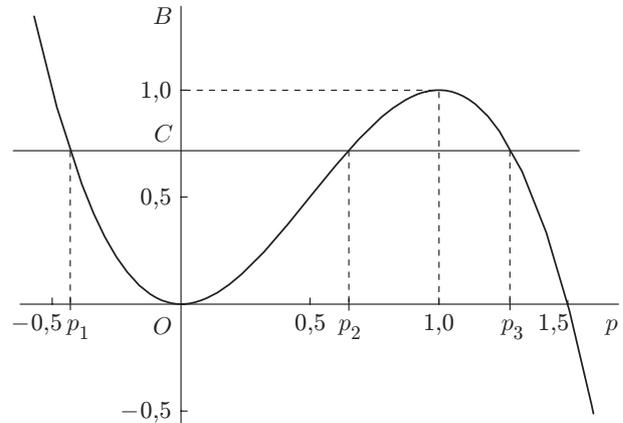


Рис. 2

Рассмотрим предельные случаи  $C \rightarrow 0$  и  $C \rightarrow 1$ . В первом случае  $p_1, p_2 \rightarrow 0, p_3 \rightarrow 3/2$ . Совершая в (5.5) предельный переход при  $C \rightarrow 0$ , получаем

$$T = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \int_{p_1}^{p_2} \frac{p+1}{\sqrt{p_3-p}} \frac{dp}{\sqrt{(p_2-p)(p-p_1)}} \xrightarrow{C \rightarrow 0} \frac{\pi}{2}.$$

В случае  $C \rightarrow 1$  решение уравнения (5.3) вычисляется явно:

$$B = \lambda(4\lambda^2/9 - 1)/2.$$

Его полупериод есть  $T = 3/2$ . При промежуточных значениях  $0 < C < 1$  функция  $T(C)$  монотонно убывает. Таким образом,

$$3/2 \leq T \leq \pi/2. \quad (5.6)$$

Для непрерывности решения во всем пространстве необходимо выполнение равенства (5.1). Из (5.1) и (5.6) следует, что  $N = 2$ . Но тогда  $C = 0$ , что соответствует  $\varphi \equiv 0$ . Таким образом, нетривиальных непрерывных во всем пространстве движений газа вида (5.2) не существует.

**Подмодель 2.6.** Представление решения имеет вид  $\varphi = x^3 r^{-2} B(\theta)$ . Уравнение подмодели:

$$B'' + 4B + 18B^2 = 0.$$

Уравнение кривых на фазовой плоскости  $(p, B)$ :

$$p^2 + 4B^2 + 12B^3 = 4C.$$

Эти кривые также представляют собой расходящуюся параболу. Замкнутым кривым соответствуют значения  $0 < C < 4/243$ . Полупериод решения:

$$T = \frac{1}{2} \int_{B_2}^{B_3} \frac{dB}{\sqrt{C - 3B^3 - B^2}}.$$

Здесь  $B_i$  — корни уравнения  $3B^3 + B^2 = C$ , упорядоченные по возрастанию. Предельные значения:  $T \rightarrow \pi/2$  при  $C \rightarrow 0$  и  $T \rightarrow +\infty$  при  $C \rightarrow 4/243$ . При  $0 < C < 4/243$  полупериод  $T$  монотонно возрастает. Таким образом,

$$\pi/2 \leq T \leq +\infty.$$

Существует два значения  $T$ , удовлетворяющих (5.1) при  $N = 1$  и  $N = 2$ . Случай  $N = 2$  соответствует тривиальному решению  $\varphi \equiv 0$ . Таким образом, единственным нетривиальным непрерывным во всем пространстве решением является  $2\pi$ -периодическое решение, получаемое при  $C \approx 0,016\,436$ .

**6. Кратные волны.** Решения с вырожденным годографом, или кратные волны, с точки зрения группового анализа дифференциальных уравнений являются нерегулярными частично инвариантными решениями, построенными на полной группе переносов пространства независимых переменных [6]. Для уравнений газовой динамики большое количество решений типа кратных волн приведено в [7]. Достаточно полно изучен случай потенциальных течений газа. Ниже описаны решения типа кратных волн для уравнения (1.1).

Для получения частично инвариантных решений необходимо рассмотреть первое продолжение базового пространства. В уравнении (1.1) введем обозначения

$$u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y, \quad w = \varphi_z, \quad (6.1)$$

в уравнении (2.5) —

$$u = a_x, \quad v = a_y, \quad w = a_z. \quad (6.2)$$

В обоих случаях должно выполняться равенство

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0. \quad (6.3)$$

**6.1. Простая волна.** Решение типа простой волны для уравнения трансзвуковых движений газа (1.1) является классическим. В пространственном случае оно задается соотношениями

$$v = v(u), \quad w = w(u), \quad u = u(x, y, z). \quad (6.4)$$

Подставляя (6.4) в (1.1) и (6.3), получим переопределенную систему для определения инвариантных функций  $v(u)$  и  $w(u)$  и “лишней” функции  $u(x, y, z)$ . Эта система оказывается совместной. Ее общее решение задается следующим набором конечных соотношений:

$$\begin{aligned} -u + v'^2(u) + w'^2(u) &= 0, \\ -x + yv'(u) + zw'(u) + f'(u) &= 0, \\ \varphi &= -xu + yv(u) + zw(u) - f(u). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Решение определено с произволом в две функции одного аргумента. Например, можно задать произвольно функции  $v(u)$  и  $f(u)$ . Тогда функция  $w(u)$  находится из первого уравнения (6.5). Зависимость  $u(x, y, z)$  определяется неявно вторым уравнением (6.5). Подставляя полученные функции в последнее соотношение (6.5), получим выражение для функции  $\varphi(x, y, z)$ . Свойства простой волны описаны в [6, с. 299] (поверхности уровня простой волны являются характеристическими плоскостями). Следует отметить, что простая волна (6.5) существует лишь в области гиперболичности уравнения (1.1):  $\varphi_x > 0$ .

Простая волна для разрешающего уравнения (2.5) редуцируется к инвариантному решению, задаваемому подмоделью 2.18.

**6.2. Двойная волна.** При анализе двойных волн важную роль играет теорема о редукции двойных волн, доказанная в [6, с. 302]. Для ее формулировки для параметров двойной волны введем обозначения  $\lambda(\mathbf{x})$ ,  $\mu(\mathbf{x})$ . Предположим, что в результате анализа уравнений двойной волны удалось выделить подсистему первого порядка, линейную и однородную по производным от  $\lambda$ ,  $\mu$ :

$$A_\nu^i(\lambda, \mu)\lambda_i + B_\nu^i(\lambda, \mu)\mu_i = 0 \quad (\nu = 1, \dots, N). \quad (6.6)$$

**Теорема.** Если в системе (6.6) число независимых уравнений  $N = 2n - 1$  ( $n$  — количество независимых переменных, являющихся компонентами вектора  $\mathbf{x}$ ), то двойная волна есть инвариантное решение относительно некоторой подгруппы группы переносов пространства  $\mathbb{R}^n$ , расширенной гомотетией.

В рассматриваемом случае  $n = 3$ , поэтому в силу теоремы действует “запрет пятого уравнения”: если в результате анализа переопределенной системы для “лишних” функций появляются пять уравнений вида (6.6), то соответствующее решение редуцируется к инвариантному.

С учетом обозначений (6.1) представление решения выбираем в виде

$$u = u(v, w), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \quad (6.7)$$

Функция  $u$  является инвариантной, функции  $v$  и  $w$  — “лишними”. Подставляя представление (6.7) в (1.1) и (6.3), получим четыре уравнения, которые после некоторых преобразований записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v_y(1 + uu_v^2) + w_z(1 - uu_w^2)}{2uu_v}, & w_x &= \frac{v_y(1 - uu_v^2) + w_z(1 + uu_w^2)}{2uu_w}, \\ v_z &= \frac{v_y(1 - uu_v^2) + w_z(1 - uu_w^2)}{2uu_v u_w}, & w_y &= \frac{v_y(1 - uu_v^2) + w_z(1 - uu_w^2)}{2uu_v u_w}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Для нередуцируемости двойной волны условия совместности (6.8) должны выполняться тождественно. Дифференцируя уравнения (6.8) по переменным  $x, y, z$ , получим систему 12 уравнений, содержащую 12 вторых производных от функций  $v$  и  $w$ . Матрица коэффициентов при вторых производных имеет ранг, равный 10. Таким образом, существует две линейные комбинации уравнений, при которых вторые производные исключаются из системы. Одна из этих комбинаций оказывается тождеством, т. е. не дает новых уравнений на первые производные от функций  $v$  и  $w$ . Исключая вторые производные с помощью другой линейной комбинации, получаем уравнение, которое выполняется в одном из двух случаев:

$$\text{а) } ((1 - uu_v^2)v_y + (1 - uu_w^2)w_z)^2 = 4u^2 u_v^2 u_w^2 v_y w_z; \quad (6.9)$$

$$\text{б) } (1 - uu_w^2)u_{vv} + (1 - uu_v^2)u_{ww} + 2uu_v u_w u_{vw} = 0. \quad (6.10)$$

В случае “а” имеем пятое уравнение, линейно связывающее производные от функций  $v$  и  $w$ . В силу теоремы это означает редукцию решения к инвариантному. Уравнение (6.10) (случай “б”) дает условие только на инвариантную функцию  $u(v, w)$ . Пятого уравнения для “лишних” функций не появляется, значит, решение не редуцируется. Проверяем инволютивность системы (6.8), (6.10). Характеры Картана [8] для этой системы равны  $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$ . Число Картана  $Q = 2$ . Среди всех вторых производных от “лишних” функций  $u, v$  только две являются свободными в силу продолженной системы (6.8). Если имеет место уравнение (6.10), то продолженная система не дает дополнительных ограничений на первые производные. Таким образом, критерий Картана выполнен, и система (6.8) находится в инволюции. Ее решение определяется с произволом в две функции одного аргумента.

Проинтегрируем полученную систему. Отметим, что уравнения (6.8) эквивалентны следующим:

$$\varphi_x = u(\varphi_y, \varphi_z), \quad (1 - uu_v^2)\varphi_{yy} + (1 - uu_w^2)\varphi_{zz} = 2uu_v u_w \varphi_{yz}. \quad (6.11)$$

Второе уравнение (6.11) получено исключением производных  $\varphi_x$  и  $\varphi_{xx}$  из (1.1) с использованием первого уравнения (6.11). Первое уравнение (6.11) интегрируется методом Ко-

ши [9]. В параметрическом виде его решение определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} \varphi &= u(p_1, p_2)x + p_1y + p_2z + \psi^0(p_1, p_2), \\ \frac{\partial u}{\partial p_1}x + y + \frac{\partial \psi^0}{\partial p_1} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial p_2}x + z + \frac{\partial \psi^0}{\partial p_2} = 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Здесь  $p_1, p_2$  — параметры;  $\psi^0(p_1, p_2)$  — произвольная функция. Записывая второе уравнение (6.11) с учетом (6.12), получаем

$$\left(1 - u \frac{\partial u}{\partial p_1}\right) \frac{\partial p_1}{\partial y} + \left(1 - u \frac{\partial u}{\partial p_2}\right) \frac{\partial p_2}{\partial z} = u \frac{\partial u}{\partial p_1} \frac{\partial u}{\partial p_2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\partial p_2}{\partial y}\right). \quad (6.13)$$

Вычисляя производные  $(p_i)_y$  и  $(p_i)_z$ , подставляя в уравнение (6.13) и расщепляя полученное выражение по переменной  $x$ , получим два уравнения. Одно из них определяет функцию  $u$  и совпадает с полученным при анализе условий совместности уравнением (6.10). Второе является ограничением для функции  $\psi^0(p_1, p_2)$ :

$$\left(1 - u \frac{\partial u}{\partial p_2}\right) \frac{\partial \psi^0}{\partial p_1^2} + \left(1 - u \frac{\partial u}{\partial p_1}\right) \frac{\partial \psi^0}{\partial p_2^2} + 2u \frac{\partial u}{\partial p_1} \frac{\partial u}{\partial p_2} \frac{\partial \psi^0}{\partial p_1 \partial p_2} = 0. \quad (6.14)$$

Таким образом, для построения решения типа двойной волны необходимо определить функцию  $u$  из решения уравнения (6.10), а затем найти функцию  $\psi^0$  как решение линейного уравнения (6.14). Искомый потенциал  $\varphi(x, y, z)$  определяется параметрически по формулам (6.12). Произвол в решении — четыре функции одного аргумента.

В отличие от построенного решения двойная волна для разрешающего уравнения (2.5) оказывается редуцируемой. Действительно, дифференцирование уравнений для функций  $u, v, w$  и исключение вторых производных в этом случае всегда дает пятое уравнение, линейно связывающее первые производные от  $v, w$ . Это означает редукцию к инвариантному решению в силу приведенной выше теоремы.

**7. Результат построения оптимальной системы  $\Theta L_6$ .** Ниже приведена нормализованная оптимальная система подалгебр  $\Theta L_6$ . Представители оптимальной системы нумеруются парой чисел, первое из которых означает размерность  $r$ , второе — номер  $N$ . В первой графе табл. 5 указан номер представителя в данной размерности, во второй — базисные операторы подалгебры (вместо базисных операторов  $X_i$  записаны только их номера  $i$ ). В третьей графе приведена ссылка (в формате “размерность.номер”) на подалгебру, являющуюся нормализатором в  $L_6$ . Если в указанном в качестве нормализатора представителе оптимальной системы содержатся произвольные параметры, то их значения в алфавитном порядке  $(\alpha, \beta)$  перечислены в верхнем индексе. Так, для подалгебры  $L_{1,1}$  в третьей графе указан номер  $3.3^{0,0}$ . Это означает, что ее нормализатором является подалгебра  $\{X_1, X_4, X_5\}$  (представитель  $L_{3,3}$ , в котором надо выбрать  $\alpha = \beta = 0$ ). Знак “=” обозначает самонормализованную подалгебру. В четвертой графе для каждой подалгебры приведен список ее конечных инвариантов. Поскольку алгебры (2.1) и (2.6) изоморфны, одновременно приведены инварианты в терминах функций  $a$  и  $\varphi$ . В некоторых подалгебрах для записи инвариантов применены полярные координаты в плоскости  $(y, z)$ :  $y = r \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$ . Подалгебры размерностей 4, 5 и 6 не имеют конечных инвариантов.

**Заключение.** Применение группового расслоения для анализа инвариантных решений уравнения Кармана — Гудерлея позволило не проводить классификацию подалгебр для бесконечномерной допускаемой алгебры Ли. При этом класс инвариантных решений расширился по сравнению с тем, который можно получить непосредственно из уравнения (1.1) без интегрирования автоморфной системы. Проверена возможность существования непрерывного во всем пространстве решения в подмоделях с линейной зависимостью независимой переменной от полярного угла. Построено частично инвариантное решение

Таблица 5

Номер представителя	Базис	$\text{Nor}_{L_6}$	Инварианты
$r = 6$			
1	1, 2, 3, 4, 5, 6	= 6.1	
$r = 5$			
1	1, 2, 4, 5, 6	= 5.1	
2	1, 2, 3, 4 + $\alpha$ 6, 5 + $\beta$ 6	6.1	
3	1, 2, 3, 4 + $\alpha$ 5, 6	6.1	
4	1, 2, 3, 5, 6	6.1	
$r = 4$			
1	1, 4, 5, 6	= 4.1	
2	2, 3, 4 + $\alpha$ 6, 5 + $\beta$ 6; $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$	5.1	
3	3, 4, 4, 5	6.1	
4	2, 3, $\alpha$ 1 + 4, 1 + 5	5.2 <sup>0,0</sup>	
5	2, 3, 1 + 4, 5	5.2 <sup>0,0</sup>	
6	2, 3, 4 + $\alpha$ 5, 6	5.1	
7	2, 3, 5, 6	= 4.7	
8	2, 3, 5, 6	5.1	
9	1, 2, 3, 4 + $\alpha$ 5 + $\beta$ 6	6.1	
10	1, 2, 3, 5 + $\alpha$ 6	6.1	
11	1, 2, 3, 6	6.1	
$r = 3$			
1	4, 5, 6	= 3.1	$r^2 x^{-2} a, r^2 x^{-3} \varphi$
2	3, 5, 6	= 3.2	$y^2 x^{-2} a, y^2 x^{-3} \varphi$
3	1, 4 + $\alpha$ 6, 5 + $\beta$ 6	4.1	$r^{2(1-\beta)} e^{-2\alpha\theta} a, r^{2-3\beta} e^{-3\alpha\theta} \varphi$
4	1, 4 + $\alpha$ 5, 6	4.1	$r e^{-\alpha\theta}$
5	1, 5, 6	4.1	$\theta$
6	2, 3, 4 + $\alpha$ 5 + $\beta$ 6; $\beta \neq 0$	5.1	$x^{2(\alpha-\beta)/\beta} a, x^{(2\alpha-3\beta)/\beta} \varphi$
7	2, 3, 4 + $\alpha$ 5	6.1	$x$
8	2, 3, 1 + 4 + $\alpha$ 5	5.2 <sup>0,0</sup>	$e^{2\alpha x} a, e^{2\alpha x} \varphi$
9	1, 3, 5 + $\alpha$ 6	4.7	$y^{2(1-\alpha)} a, y^{2-3\alpha} \varphi$
10	1 + 2, 3, 5 + 6	= 3.10	$a, (x - y)^{-1} \varphi$
11	2, 3, 5 + $\alpha$ 6; $\alpha \neq 0$	5.1	$x^{2(1-\alpha)/\alpha} a, x^{(2-3\alpha)/\alpha} \varphi$
12	2, 3, 5	6.1	$x$
13	2, 3, 1 + 5	5.2 <sup>0,0</sup>	$e^{2x} a, e^{2x} \varphi$
14	1, 3, 6	5.4	$y$
15	1, 3, 2 + 6	4.11	$e^{-2y} a, e^{-3y} \varphi$
16	2, 3, 6	5.1	$x^{-2} a, x^{-3} \varphi$
17	1, 2, 3	6.1	$a, \varphi$
$r = 2$			
1	4 + $\alpha$ 6, 5 + $\beta$ 6; $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$	3.1	$xr^{-\beta} e^{-\alpha\theta}, r^2 x^{-2} a, r^2 x^{-3} \varphi$
2	4, 5	4.1	$x, r^2 a, r^2 \varphi$
3	$\alpha$ 1 + 4, 1 + 5	3.3 <sup>0,0</sup>	$r e^{\alpha\theta-x}, r^2 a, r^2 \varphi$
4	1 + 4, 5	3.3 <sup>0,0</sup>	$x - \theta, r^2 a, r^2 \varphi$
5	4 + $\alpha$ 5, 6	3.1	$r e^{-\alpha\theta}, r^2 x^{-2} a, r^2 x^{-3} \varphi$
6	5, 6	3.1	$\theta, r^2 x^{-2} a, r^2 x^{-3} \varphi$
7	1, 4 + $\alpha$ 5 + $\beta$ 6	4.1	$r e^{-\alpha\theta}, e^{2(\alpha-\beta)\theta} a, e^{(2\alpha-3\beta)\theta} \varphi$
8	1 + 2, 5 + 6	= 2.8	$(x - y)/z, a, z^{-1} \varphi$
9	3, 5 + $\alpha$ 6; $\alpha \neq 0$	3.2	$xy^{-\alpha}, y^2 x^{-2} a, y^2 x^{-3} \varphi$

Окончание табл. 5

Номер представителя	Базис	$\text{Nor}_{L_6}$	Инварианты
10	3, 5	4.7	$x, y^2 a, y^2 \varphi$
11	3, 1 + 5	3.9 <sup>0</sup>	$x - \ln  y , y^2 a, y^2 \varphi$
12	1, 5 + $\alpha 6$	4.1	$\theta, r^{2(1-\alpha)} a, r^{2-3\alpha} \varphi$
13	1, 3	5.4	$y, a, \varphi$
14	3, 6	4.8	$y, x^{-2} a, x^{-3} \varphi$
15	3, 2 + 6	3.16	$x e^{-y}, x^{-2} a, x^{-3} \varphi$
16	1, 6	6.1	$y, z$
17	1, 2 + 6	4.11	$z, e^{-2y} a, e^{-3y} \varphi$
18	1 + 2, 3	4.10 <sup>1</sup>	$x - y, a, \varphi$
19	2, 3	6.1	$x, a, \varphi$
$r = 1$			
1	1 + 4 + $\alpha 5$	3.3 <sup>0,0</sup>	$x - \theta, r e^{\alpha \theta}, r^2 a, r^2 \varphi$
2	4 + $\alpha 5 + \beta 6; \beta \neq 0$	3.1	$r x^{-\alpha/\beta}, r e^{-\alpha \theta}, r^2 x^{-2} a, r^2 x^{-3} \varphi$
3	4 + $\alpha 5$	4.1	$x, r e^{-\alpha \theta}, r^2 a, r^2 \varphi$
4	1 + 5	3.3 <sup>0,0</sup>	$x - \ln  r , \theta, r^2 a, r^2 \varphi$
5	5 + $\alpha 6; \alpha \neq 0$	3.1	$\theta, x r^{-\alpha}, r^{2(1-\alpha)} a, r^{2-3\alpha} \varphi$
6	5	4.1	$x, \theta, r^2 a, r^2 \varphi$
7	2 + 6	3.16	$z, x e^{-y}, e^{-2y} a, e^{-3y} \varphi$
8	6	5.1	$y, z, x^{-2} a, x^{-3} \varphi$
9	1 + 2	4.10 <sup>1</sup>	$x - y, z, a, \varphi$
10	3	5.4	$x, y, a, \varphi$
11	1	6.1	$y, z, a, \varphi$

типа двойной волны. Это решение представлено в параметрическом виде и определяется с произволом в четыре функции одного аргумента.

Дальнейшее построение точных решений уравнения Кармана — Гудерлея возможно при систематическом изучении частично инвариантных решений, порождаемых подалгебрами  $M \in \Theta L_6$ ,  $\dim M \geq 3$ . Кроме того, необходима физическая интерпретация решений, полученных в данной работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989.
3. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
4. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Новосибир. ун-т, 1962.
5. Овсянников Л. В. Об оптимальных системах подалгебр // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.
6. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
8. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
9. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

Поступила в редакцию 25/XI 2002 г.