ЛИТЕРАТУРА

1. **Serizawa A., Kataoka I., Michiyoshi I.** Turbulence structure of air-water bubbly flow.— Int. J. Multiphase Flow, 1975, vol. 2, p. 235.
2. **Nakorvakov V. E. et al.** Local characteristics of upward gas-liquid flows.— Int. J. Multiphase Flow, 1981, vol. 7, p. 63.
3. **Исследование** турбулентных течений двухфазных сред/Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск: изд. ИТФ СО АН СССР, 1973.
4. **Бурдуков А. П., Валукина Н. В., Накоряков В. Е.** Особенности течения газожидкостной пузырьковой смеси при малых числах Рейнольдса.— ПМТФ, 1975, № 4.
5. **Кашинский О. Н., Малков В. А., Мухин В. А.** Исследование начальной стадии отрыва пограничного слоя электродиффузионным методом.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1976, № 8, вып. 2.
6. **Арманд А. А.** Сопротивление при движении двухфазной системы по горизонтальным трубам.— Изв. ВТИ, 1946, № 1.
7. **Cognet G., Lebouche M., Souhar M.** Utilisation des techniques electrochimiques pour la mesure de frottement parietal dans les ecoulements diphasiques.— Houille blanche, 1978, N 5.
8. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

УДК 517.946

МЕТАСТАБИЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ПРОЦЕССАХ ПЕРЕНОСА, ОПИСЫВАЕМЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫМ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

К. А. Волосов, К. Б. Павлов, А. С. Романов, И. А. Федотов

(*Москва*)

1. В настоящее время широко обсуждаются решения квазилинейного параболического уравнения вида

$$(1.1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}^{k}\right|^{n-1}\frac{\partial u^k}{\partial x}\right)-\gamma u^m\equiv Lu,\ k,\gamma>0,\ m\geqslant 0,\ kn>1,$$

применяемого для описания различных нелинейных процессов переноса. Зависимость коэффициентов переноса и поглощения от переносимой величины u и ее градиента $\partial u/\partial x$ аппроксимируется здесь степенной функцией. В частности, при $n=1$, $k\neq 1$ уравнение (1.1) совпадает с уравнением нелинейной теплопроводности, рассмотренным в [1]; при $k=1$, $n\neq 1$ оно является уравнением переноса импульса в неньютоновской нелинейно вязкой жидкости [2], случай $k=2$, $m=0$ соответствует движению указанной электропроводной жидкости в ламинарном пограничном слое в поперечном магнитном поле [3]. В общем случае произвольных значений n, k, m уравнение (1.1) известно как уравнение турбулентной фильтрации [1, 4] с нелинейным стоком.

Существенной особенностью процессов переноса, описываемых уравнением (1.1), является возможность существования фронтовой поверхности $S(x, t)=0$, которая разделяет область с $u(x, t)=0$ и область пространственной локализации переносимой величины $u(x, t)>0$ (см., например, [1—4]). Вид функции $S=S(x, t)$ в случае задачи Коши для уравнения (1.1) исследовался в работе [5], где вслед за [6, 7] показана возможность метастабильных состояний решения. При таком состоянии функция $S(x, t)$ в течение конечного промежутка времени $t\in[0, T]$ зависит только от координаты x, $S(x, t)\equiv S(x)$.

Метастабильные состояния возможны, в частности, при переходе с одного стационарного решения на другое стационарное решение. В этой связи показана возможность существования метастабильных состояний краевой задачи для уравнения (1.1) и даны оценки времени метастабильного состояния, которые подтверждены прямыми численными расчетами.

Рассмотрим уравнение (1.1) на множестве

(1.2) $$G = R_- \times R_+ = \{(x, t) : x \in R_-,\ t \in R_+\},$$

где $R_+ = \{t : t \geqslant 0\}$, $R_- = \{x : x \leqslant 0\}$.

При этом обозначим через $\Omega = \{(x, t) \in G;\ u(x, t) > 0\}$ область локализации переносимой величины, $G \setminus \Omega = \{(x, t) \in G\colon u(x, t) = 0\}$. Граничное условие зададим монотонным и ограниченным:

(1.3) $$u(0, t) = \varphi(t),\ \varphi(t_2) \geqslant \varphi(t_1),\ \text{если } t_2 > t_1,\ U_0 = \max \varphi(t) < \infty.$$

Начальное условие будем считать финитным и заданным «естественным» образом:

(1.4) $$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} A\left(1 - \dfrac{x}{x_0}\right)^{\frac{n+1}{kn-m}}, & x_0 < x \leqslant 0,\ kn > m, \\ 0, & -\infty < x \leqslant x_0, \end{cases}$$

где $A = \left[\dfrac{\gamma (kn-m)^{n+1} (-x_0)^{n+1}}{n(k+m)(kn+k)^n}\right]^{1/(kn-m)}$,

а функция $u(x, 0)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $Lu_0 = 0$. Будем считать, что в области Ω производная $\partial u^k/\partial x \geqslant 0$; при этом условии уравнение (1.1) записывается в виде

(1.5) $$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x}\right)^n + \gamma u^m = 0.$$

Покажем, что решение задачи (1.3)—(1.5) метастабильно локализовано и время метастабильной локализации T удовлетворяет неравенству $T \geqslant \dfrac{U_0^{kn-m}}{A_1^{kn-1}} \dfrac{(k+m)(kn-1)^n}{\gamma(k+1)(kn-m)^{n+1}}$, если $m \in [1, kn[$, $A_1(k, n, t_0, x_0) = \text{const}$.

Сначала докажем, что решение задачи (1.3)—(1.5) метастабильно локализовано, если $m \in [1, kn[$. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу для уравнения вида

(1.6) $$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \omega^k}{\partial x}\right)^n = 0$$

с начальным условием

(1.7) $$\omega(x, 0) = A_1(1 - x/x_0)^{(n+1)/(kn-1)},\ x \in\ ]x_0, 0]$$

и граничным условием

(1.8) $$\omega(0, t) = A_1(1 - t/t_0)^{-1/(kn-1)},$$

$$A_1 = \left\{\left[\frac{kn-1}{kn+k}\right]^n \frac{(-x_0)^{n+1}}{n(k+1)t_0}\right\}^{\frac{1}{kn-1}},\ \omega(x_0, t) = 0,\ \left(\frac{\partial \omega^k}{\partial x}\right)^n (x_0, t) = 0.$$

Решение вспомогательной задачи (1.6)—(1.8) имеет вид [6]

(1.9) $$\omega(x, t) = \begin{cases} A_1\left[\left(1 - \dfrac{x}{x_0}\right)^{n+1}\left(1 - \dfrac{t}{t_0}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{kn-1}}, \\ 0, \end{cases}$$

где $t \in [0, t_0[$, $x \in\ ]x_0, 0]$. Как видно, решение (1.9) метастабильно локализовано при $t \in [0, t_0]$. В силу монотонной зависимости решения $u(x, t)$ задачи (1.3)—(1.5) от начального и граничного условия и величины $\gamma > 0$ функция (1.9) мажорирует решение этой задачи при соответствующем задании параметра t_0, которое следует из сопоставления $U_0 = A$ и A_1. Следовательно, решение задачи (1.3)—(1.5) метастабильно локализовано, если $m \in [1, kn]$.

Из сравнения граничных условий (1.3), (1.8) может быть получена оценка снизу времени метастабильной локализации в задаче (1.3)—(1.5)

$t \in [0,\ T],\ \ T \geqslant t_0$:

$$T \geqslant t_0 = \left(\frac{U_0^{kn-m}}{A_1^{kn-1}}\right)\frac{(k+m)\,(kn-1)^n}{\gamma\,(kn-m)^{n+1}\,(k+1)}. \tag{1.10}$$

С помощью теорем сравнения [8] можно показать, что граница области локализации в задаче (1.3)—(1.5) обязательно приходит в движение $S(x,\ t) \neq S(x)$ при $t > t_0$, т. е. решение задачи действительно является метастабильным. Наиболее просто это сделать в случае $\gamma = 0$. Для этого рассмотрим краевую задачу для уравнения (1.6) для функции $\omega_1 = \omega_1(x,\ t)$ с граничным и начальным условиями

$$\omega_1(x,\ 0) = 0,\ \omega_1(0,\ t) = U_1 = \text{const} > 0,\ U_1 < \min\varphi(t). \tag{1.11}$$

Краевая задача (1.6), (1.11) $\gamma = 0$ автомодельна [9]. Если ввести автомодельную переменную $\eta = x/x_f(t)$, где $x_f(t)$ — граница носителя решения, определяемая уравнением $S(x_f(t),\ t) = 0$, и новую зависимую переменную $\omega_1 = U_1 f_1(\eta)$, то задача (1.5), (1.11) сводится к следующей:

$$\beta\eta\frac{df_1}{d\eta} + \frac{d}{d\eta}\left[\operatorname{sign} x_f\,\frac{df_1^k}{d\eta}\right]^n = 0,\ \eta \in [0,1],\ f_1(0) = 1,\ f_1(1) = 0. \tag{1.12}$$

Из условия автомодельности имеем

$$x_f = -\left[(n+1)\,\beta U_1^{kn-1} t\right]^{1/(n+1)}.$$

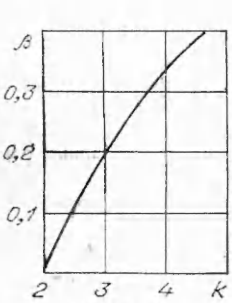
Постоянную $\beta > 0$ в задаче (1.12) находим из условия отсутствия потока на фронте $df_1^k(1)/d\eta = 0$. Результаты численного расчета параметра $\beta = \beta(k,\ n)$ в частном случае $n = 1$, полученные методом коллокации после предварительной квазилинеаризации, приведены на фиг. 1.

В силу теорем сравнения [8] выполняются неравенства $u(x,t) > \omega_1(x,\ t)$, $U_1 < \min\varphi(t)$. Поэтому из неравенства $x_f(t_1) \leqslant x_0$ следует оценка сверху для времени метастабильной локализации решения $T \leqslant t_1 = (-x_0)^{n+1}/\beta\,(n+1)\,U_1^{kn-1}$.

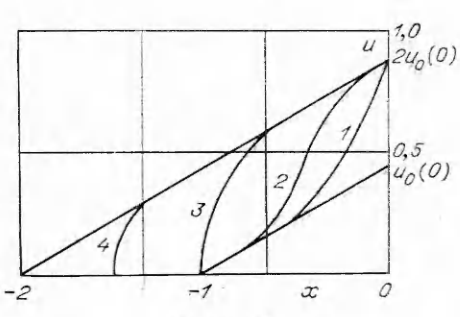
Существование метастабильных состояний для функции $\omega_2 = \omega_2(x,\ t)$ в случае $\gamma \neq 0$ может быть показано при численном решении краевой задачи, составленной из уравнения (1.6), условий

$$\omega_2(0,\ t) = \psi(t),\ \psi(t_2) \geqslant \psi(t_1),\ \text{если}\ t_2 > t_1,\ \varphi(t) > \psi(t) \tag{1.13}$$

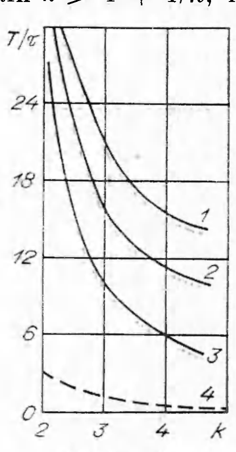
и начального условия (1.4). В силу теоремы сравнения по начальным и граничным условиям решение задачи (1.3)—(1.5) мажорирует сверху решение задачи (1.4), (1.5), (1.13) $u\ (x,\ t) \geqslant \omega_2(x,\ t)$. Если $k > 1 + 1/n$, то численное решение задачи (1.4), (1.5), (1.13) показывает, что при временах $t > T$ фронт слабого разрыва приходит в движение. Следовательно, решение задачи (1.3)—(1.5) является метастабильным.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

2. Для подтверждения полученных оценок проведены численные расчеты. При этом использовалась неявная разностная схема [10]. Положение фронта определялось приближенно там, где решение становилось порядка ошибки вычислений. Шаги по времени τ и по пространству h задавались соответственно равными 0,0364; 0,04. На фиг. 2 в качестве примера показана эволюция решения задачи (1.3)—(1.5) при $n = 3$, $k = 2$, $\gamma = 1$, $m = 2$, $x_0 = -1$, $\varphi(t) = 2u_0(0) = 0{,}878$ (кривые *1—4* соответствуют $t = \tau$, $t = 3\tau$, $t \equiv T = 10\tau$, $t = 20\tau$). Из приведенного графика видно, что момент начала движения поверхности может быть определен с точностью $O(h)$ по изменению производной $\partial u/\partial x$ при $x \to x_f(t)_{+0}$. При $t \to \infty$ решение переходит в новое стационарное, соответствующее измененному граничному условию.

Ясно, что время существования метастабильного режима T существенно зависит от вида функции $\varphi(t)$ при одних и тех же $\varphi(0)$ и $\varphi(\infty)$. В этой связи были проведены расчеты времени метастабильного состояния T для различных $\varphi = \varphi(t)$. Результаты этих расчетов приведены на фиг. 3 для $n = 1$, $\gamma = 1$, $m = 1$, $x_0 = -1$. Кривые *1—3* соответствуют следующим граничным условиям:

$$\varphi(t) = \begin{cases} u_0(0)\left(1 + \dfrac{t}{4}\right), & t \in \Gamma, \\ 2u_0(0), & t \overline{\in} \Gamma; \end{cases}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} u_0(0)\exp\left(\dfrac{\tau t}{4h}\right), & t \in \Gamma, \\ 2u_0(0), & t \overline{\in} \Gamma; \end{cases}$$

$$\varphi(t) = 2u_0(0), \quad t \in \Gamma,$$

где $\Gamma = \{t : t > 0,\ \varphi(t) < 2u_0(0)\}$. Штриховая кривая на фиг. 2 соответствует оценке времени метастабильного состояния по соотношению (1.10). Все численные расчеты находятся в хорошем соответствии с полученными оценками и подтверждают качественный анализ проблемы.

Поступила 16 IX 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры.— В кн.: К 70-летию А. Ф. Иоффе. М.: Изд. АН СССР, 1950.
2. **Уилкинсон У. Л.** Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964.
3. **Павлов К. Б.** О магнитогидродинамическом течении несжимаемой вязкой жидкости, вызванной деформацией плоской поверхности.— Магнитн. гидродинамика, 1974, № 4.
4. **Баренблатт Г. И.** О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде.— ПММ, 1952, т. 16, № 1.
5. **Павлов К. Б., Романов А. С.** Об изменении области локализации возмущений в процессах нелинейного переноса.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6.
6. **Самарский А. А., Змитренко П. Б., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.** Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.— ДАН СССР, 1975, т. 223, № 6.
7. **Калашников А. С.** О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением.— ЖВММФ, 1974, т. 14, № 4.
8. **Покровский Л. Д., Тараненко С. Н.** Пространственная локализация решений нелинейных уравнений параболического типа.— В кн.: Сборник трудов кафедры высшей математики, посвященный 150-летию МВТУ, 1980, № 336.
9. **Баренблатт Г. И.** Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде.— ПММ, 1952, т. 16, № 6.
10. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.