Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 2

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ НЕИЗОЭНТРОПИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ТИПА ДВОЙНОЙ ВОЛНЫ

УДК 517.944 + 519.46

С. В. Мелешко

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Неизоэнтропические нестационарные пространственные двойные волны изучались в работах [1–5], где были выписаны некоторые частные решения уравнений двойных волн.

В данной работе приведена классификация пространственных неизоэнтропических двойных волн с произвольным уравнением состояния $\tau = \tau(p, S)$ при наличии функционального произвола в общем решении задачи Коши, которые не редуцируются к инвариантным решениям.

Рассматриваются нестационарные неизобарические неизоэнтропические двойные волны, не редуцируемые к инвариантным решениям, для уравнений движения идеального газа в пространственном случае

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \tau\nabla p = 0, \quad \frac{d\tau}{dt} - \tau \operatorname{div}\mathbf{V} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0. \tag{1}$$

Предполагается, что уравнение состояния $\tau = \tau(p, S)$ обладает свойствами $\tau_p \neq 0$, $\tau_S \neq 0$. Здесь $\mathbf{V} = (u_1, u_2, u_3)$ — скорость; p — давление; S — энтропия; τ — удельный объем; $d/dt = \partial/\partial t + u_\alpha\partial/\partial x_\alpha$ (по повторяющемуся греческому индексу проводится суммирование от 1 до 3, если не оговорено особо).

Если p и S функционально зависимы на решении системы (1), то $p = p(S)$, $\tau = \tau(S)$ и система (1) записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{V} = 0, \tag{2}$$

где $\varphi = \varphi(S)$ находится из $\varphi'(S) = \tau(S)p'(S) \neq 0$.

Выберем в качестве параметров двойной волны φ и функцию λ, которая функционально от нее не зависит. Из первых двух уравнений системы (2) получим

$$\varphi_{x_i}\partial u_j/\partial\lambda - \varphi_{x_j}\partial u_i/\partial\lambda = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j). \tag{3}$$

После продолжения (3) D/Dt $(D/Dt = D_t + u_\alpha D_\alpha)$ и подстановки в них производных $D\varphi_{x_i}/Dt = -\varphi_{x_\alpha}((\partial u_\alpha/\partial\lambda)(\partial\lambda/\partial x_i) + (\partial u_\alpha/\partial\varphi)(\partial\varphi/\partial x_i))$, $\varphi_{x_i} = -(\partial u_i/\partial\lambda)(d\lambda/dt)$ имеем

$$\frac{\partial u_i}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} + \frac{d\lambda}{dt}\Big(\frac{\partial^2 u_j}{\partial\lambda^2}\frac{\partial u_i}{\partial\lambda} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial\lambda^2}\frac{\partial u_j}{\partial\lambda}\Big) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j). \tag{4}$$

Из запрета на редукцию к инвариантным решениям [6] следует, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов при производных $d\lambda/dt$, $\partial\lambda/\partial x_i$ $(i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$ в уравнениях (4) и пятом уравнении системы (2) , должен быть меньше либо равен 2. Отсюда находим уравнение $\partial u_i/\partial\lambda = 0$ ($i = 1, 2, 3$), что противоречит неизоэнтропичности течения. Поэтому надо рассматривать течения, для которых p, S функционально независимы.

Выберем в качестве параметров двойной волны давление и энтропию , т. е. положим $u_i = u_i(p, S)$ ($i = 1, 2, 3$). После введения новой зависимой переменной $\varphi = (\operatorname{div}\mathbf{V})/\tau_p$ систему (1) приведем к виду ($H = \tau_p + u_{\alpha p}u_{\alpha p}$)

$$\frac{dp}{dt} - \tau\varphi = 0, \quad S_0 = \frac{dS}{dt} = 0, \quad R_1 = u_{\alpha S}S_{x_\alpha} - H\varphi = 0, \qquad \Phi_i = p_{x_i} + u_{ip}\varphi = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Продифференцировав полным образом D_i по пространственной переменной x_i и составив указанные ниже комбинации, из уравнений (5) получим

$$D_i\Phi_j - D_j\Phi_i = u_{jp}\varphi_{x_i} - u_{ip}\varphi_{x_j} + (u_{jpS}S_{x_i} - u_{ipS}S_{x_j}) - \varphi^2(u_{jpp}u_{ip} - u_{ipp}u_{jp}) = 0; \tag{6}$$

$$R_2 = \frac{D(H\varphi - u_{\alpha S}S_{x_\alpha})}{Dt} = H\frac{d\varphi}{dt} - \varphi(\tau u_{\alpha pS} + u_{\alpha p}u_{\beta p}u_{\beta S})S_{x_\alpha} + \varphi^2(H^2 + \tau H_p) = 0; \tag{7}$$

$$D(\Phi_i)/Dt = u_{ip}d\varphi/dt + \tau\varphi_{x_i} + \varphi\zeta S_{x_i} - \varphi^2(u_{ip}H - \tau u_{ipp}) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j), \tag{8}$$

где $\zeta = \tau_S + u_{\alpha p}u_{\alpha S}$; $\xi = \tau_S + 2u_{\alpha p}u_{\alpha S}$; $D/Dt = D_t + u_\alpha D_\alpha$.

Исключив из (6) производные φ_{x_i}, φ_{x_j} при помощи уравнений (8), находим

$$(\zeta u_{ip} - \tau u_{ipS})S_{x_j} - (\zeta u_{jp} - \tau u_{jpS})S_{x_i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j). \tag{9}$$

В дальнейшем, так же как в стационарных и плоских течениях, необходимо различать два случая: $H \neq 0$ и $H = 0$.

1. Пусть $H \neq 0$. Если φ выразить из третьего уравнения системы (5) и подставить эту величину в остальные уравнения системы, то вместе с (9) получим однородную систему семи квазилинейных дифференциальных уравнений относительно p и S. Из запрета на редукцию двойных волн к инвариантным решениям [6] следует

$$\tau u_{ipS} - \zeta u_{ip} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{10}$$

Если $u_{ip} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, то

$$p = h(t), \quad \varphi = h'/\tau, \quad S_t + u_\alpha(S)S_{x_\alpha} = 0, \tag{11}$$

где $u_i(S)$ — произвольные функции; $h(t)$ — функция, удовлетворяющая уравнению

$$h'' = -(h')^2\,\partial\ln(|\tau_p|)/\partial p. \tag{12}$$

Так как p и S функционально независимы, то из последнего равенства вытекает $\partial^2\ln(|\tau_p|)/\partial p\partial S = 0$, откуда

$$\tau = A_1(S)\,g(p) + A_2(S) \tag{13}$$

($A_1(S)$, $A_2(S)$, $g(p)$ — произвольные функции). После подстановки последнего выражения для τ в (12) и его интегрирования по переменной t имеем $g(h(t)) = c_1t + c_2$ (c_1, c_2 — произвольные постоянные, $c_1 \neq 0$). Без ограничения общности можно считать $c_2 = 0$.

Таким образом, для уравнения состояния вида (13) существуют двойные волны, в которых $u_i(S)$ — произвольные функции энтропии, давление p определяется из уравнения $g(p) = c_1t$, а энтропия S удовлетворяет системе из двух дифференциальных уравнений в частных производных:

$$dS/dt = 0, \quad u'_\alpha S_{x_\alpha} = c_1A_1/(c_1t\,A_1 + A_2). \tag{14}$$

Система (14) находится в инволюции и имеет произвол в одну функцию двух аргументов. Например, для $A_2 = 0$ ее решением будет

$$tu_1(S) - x_1 + \psi(tu_2(S) - x_2,\ tu_3(S) - x_3) = 0$$

($\psi(\xi, \zeta)$ — произвольная функция).

Рассмотрим теперь случай, когда $u_{\alpha p}u_{\alpha p} \neq 0$ (для определенности считается $u_{1p} \neq 0$). Из (10) вытекает существование таких функций $F_i = F_i(p)$ ($i = 0, 2, 3$), что

$$\tau = F_0 u_{1p}^2 - u_\alpha u_{\alpha p}, \quad u_{ip} = F_i u_{1p} \quad (i = 2, 3). \tag{15}$$

Исключив из уравнений (8) производные $d\varphi/dt$ с помощью уравнения (7), получим

$$\begin{gathered}\Psi_i = \tau H \varphi_{x_i} + \varphi(H\zeta S_{x_i} + u_{ip}\xi\, u_{\alpha p} S_{x\alpha}) - \varphi^2 c_i = 0,\\ c_i = 2u_{ip}H^2 + \tau H_p u_{ip} - \tau H u_{ipp} \quad (i = 1, 2, 3).\end{gathered} \tag{16}$$

Из комбинации

$$\tau\,\varphi\,\xi\, u_{\alpha p}\, D_\alpha R_1 - u_{\alpha S}(D\Psi_\alpha/Dt - \tau D_\alpha R_2) + \varphi(\xi\, u_{\alpha p}u_{\alpha S} + \zeta H)\, u_{\beta p} D_\beta S_0 = 0$$

находим еще одно уравнение первого порядка на зависимые переменные:

$$R_3 = H(u_{\alpha p}S_{x\alpha})[\tau\xi(u_{\beta SS}S_{x\beta}) + \varphi(2H\xi u_{\alpha p}u_{\alpha S} - 2\xi\tau u_{\alpha pp}u_{\alpha S} - H\tau\xi_S)] + \varphi^2 b = 0. \tag{17}$$

Вид функции $b = b(p, S)$ довольно громоздкий, а для дальнейших рассуждений он будет не нужен.

Если $u_{\alpha p}S_{x\alpha} = 0$, то двойная волна имеется только в случае, когда $u_i = u_i(S)$ ($i = 2, 3$). Действительно, после дифференцирования последнего уравнения вдоль траектории частицы и учета сохранения энтропии в частице получим $D(u_{\alpha p}S_{x\alpha})/Dt = \tau\varphi u_{\alpha pp}S_{x\alpha} = 0$. Тогда из запрета на редукцию к инвариантному решению следует необходимость выполнения

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} u_{1p} & u_{2p} & u_{3p} \\ u_{1pp} & u_{2pp} & u_{3pp} \end{Vmatrix} \leqslant 1.$$

В этом случае $F_2' = F_3' = 0$, и поворотом осей координат можно добиться того, что $u_i = u_i(S)$ ($i = 2, 3$). Но тогда из уравнения $u_{\alpha p}S_{x\alpha} = 0$ вытекает $S_{x_1} = 0$, а из соотношения $D_1 R_1 = 0$ имеем $\varphi_{x_1} = H_p u_{1p}\varphi^2/H$. Подставив последнее соотношение в (16) при $i = 1$, получим $2u_{1p}H - \tau u_{1pp} = 0$. Отсюда, из $\tau = u_{1p}(F_0 - u_1)$ и (15) следует

$$2u_{1p}F_0' + u_{1pp}(F_0 - u_1) = 0.$$

При этом система уравнений (5), (7), (16) вместе с уравнением $u_{\alpha p}S_{x\alpha} = 0$ находится в инволюции и имеет произвол в одну функцию одного аргумента.

Рассмотрим случай $u_{\alpha p}S_{x\alpha} \neq 0$. Пусть сначала считается $\xi \neq 0$. Покажем, что тогда у системы уравнений (5) нет решений, имеющих функциональный произвол в общем решении задачи Коши.

Если

$$r = \operatorname{rang}\begin{Vmatrix} u_{1p} & u_{2p} & u_{3p} \\ u_{1S} & u_{2S} & u_{3S} \end{Vmatrix} = 1,$$

то либо происходит редукция к инвариантному решению, либо получается противоречие условию $H \neq 0$. Поэтому считается $r = 2$.

Введем новую зависимую переменную $\lambda = u_{\alpha p} S_{x_\alpha}$ (с точки зрения теории совместности пространство зависимых переменных частично продолжается, т. е. рассматривается продолженное пространство, но не полное, а лишь некоторое его подпространство).

Так как $\xi \neq 0$, то из уравнений

$$R_{3+i} = -\tau D_i R_2 + D\Psi_i/Dt - \varphi\xi\, u_{ip}\, u_{\alpha p}\, D_\alpha\, S_0 - \varphi\zeta H D_i S_0 = 0$$

вытекает

$$L_i = \lambda_{x_i} - a_{i\alpha}(p,\, S)\, S_{x_\alpha} - c(p,\, S,\, \lambda,\, \varphi) = 0 \quad (i = 1,\, 2,\, 3)$$

с функциями $a_{ij} = a_{ij}(p,\, S)$, $c = c(p,\, S,\, \lambda, \varphi)$ $(i,\, j = 1,\, 2,\, 3)$. Кроме того,

$$L_0 = \frac{D}{Dt}(\lambda - u_{\alpha p} S_{x_\alpha}) = \frac{d\lambda}{dt} - \tau\varphi u_{\alpha pp} S_{x_\alpha} + \tau_p \varphi\lambda = 0.$$

Для зависимых переменных p, S, φ, λ получается переопределенная система дифференциальных уравнений, в которой параметрической производной будет либо S_{x_2}, либо S_{x_3}.

Выделим коэффициенты при вторых производных в следующих продолжениях уравнений $(i = 1,\, 2,\, 3)$:

$$D_i R_1 = u_{\alpha S} S_{x_\alpha x_i} + \ldots = 0, \quad D_i R_3 = \tau\,\lambda\, H\,\xi\, u_{\alpha SS} S_{x_\alpha x_i} + \ldots = 0,$$

$$\frac{DL_i}{Dt} - D_i L_0 + a_{i\alpha} D_\alpha S_0 = \tau\varphi u_{\alpha pp} S_{x_\alpha x_i} + \ldots = 0, \quad D_i(\lambda - u_{\alpha p} S_{x_\alpha}) = u_{\alpha p} S_{x_\alpha x_i} + \ldots = 0.$$

Здесь выписаны только члены, содержащие вторые производные.

Поскольку $H\,\lambda\,\varphi\,\xi \neq 0$ и параметрическими производными могут быть только производные $S_{x_i x_j}$ $(i,\, j = 1,\, 2,\, 3)$, то для решения, имеющего функциональный произвол, необходимо, чтобы в этой системе ранг матрицы при них не был равен числу этих производных. Отсюда получим

$$r_0 = \operatorname{rang} \begin{Vmatrix} u_{1p} & u_{2p} & u_{3p} \\ u_{1S} & u_{2S} & u_{3S} \\ u_{1SS} & u_{2SS} & u_{3SS} \\ u_{1pp} & u_{2pp} & u_{3pp} \end{Vmatrix} \leqslant 2.$$

Если

$$\begin{Vmatrix} u_{1p} & u_{2p} & u_{3p} \\ u_{1S} & u_{2S} & u_{3S} \\ u_{1pp} & u_{2pp} & u_{3pp} \end{Vmatrix} = 0,$$

то после интегрирования по S он принимает вид

$$(F_2' F_3 - F_3' F_2)\, u_1 + F_3' u_2 - F_2' u_3 = g(p) \tag{18}$$

с произвольной функцией $g(p)$. После дифференцирования последнего уравнения по p имеем

$$(F_2'' F_3 - F_3'' F_2)\, u_1 + F_3'' u_2 - F_2'' u_3 = g'(p). \tag{19}$$

Из (18) и (19) получим соотношения

$$\begin{gathered} (F_2' F_3'' - F_3' F_2'')(u_3 - F_3 u_1) = F_3' g'(p) - F_3'' g(p), \\ (F_2' F_3'' - F_3' F_2'')(u_2 - F_2 u_1) = F_2' g'(p) - F_2'' g(p). \end{gathered} \tag{20}$$

Если $F_2' F_3'' - F_3' F_2'' \neq 0$, то из уравнений (20) находим $u_i = u_i(p)$ $(i = 1, 2, 3)$, а это в силу уравнения $R_1 = 0$ противоречит условию $H\varphi \neq 0$. Поэтому $F_2' F_3'' - F_3' F_2'' = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $F_3 = 0$. Но тогда либо $F_2' = 0$, либо $u_{3S} = 0$. В обоих случаях рассмотрение соотношения $r_0 = 0$ приводит к редукции (плоским течениям).

Поэтому далее исследуется случай $\xi = 0$. При этом из (10) и $\xi = 0$ вытекает $\tau = f_0 u_{1p}^2$ с $f_0 = f_0(p)$. Рассматриваются комбинации

$$D_{x_i}\Psi_j - D_{x_j}\Psi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3,\ i \neq j),$$

из которых имеем уравнения первого порядка:

$$S_{x_i} a_j - S_{x_j} a_i = -\varphi(u_{ip} d_j - u_{jp} d_i) \quad (i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j),$$

$$a_1 = \tau H u_{1p}[(H_p/H)_S - 2(u_{1pp}/u_{1p})_S + 2(H/\tau)_S], \tag{21}$$

$$a_i = F_i a_1, \quad d_i = F_i d_1 + F_i'(u_{1p}(2H^2 + \tau H_p) - 2\tau H u_{1pp}) - \tau H u_{1p} F_i'' \quad (i = 2, 3).$$

Из (21) и $R_1 = 0$, для того чтобы решение имело функциональный произвол, необходимо вытекает выполнение соотношений $a_i(u_{\alpha S} a_\alpha) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Так как $\tau_S \neq 0$, то отсюда следует $a_1 = 0$, а из (21) $d_i = F_i d_1$ $(i = 2, 3)$, т. е.

$$(H_p/H)_S - 2(u_{1pp}/u_{1p})_S + 2(H/\tau)_S = 0; \tag{22}$$

$$F_i'(u_{1p}(2H^2 + \tau H_p) - 2\tau H u_{1pp}) - \tau H u_{1p} F_i'' = 0 \quad (i = 2, 3). \tag{23}$$

Из уравнений

$$D\Psi_i/Dt - \tau D_i R_2 + \varphi H\, u_{\alpha p}\, u_{\alpha S} D_i S_0 = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

в силу (22) вытекает соотношение

$$2\tau^2 H u_{1ppp} - 2\tau u_{1pp}(2H^2 + \tau H_p) + u_{1p} H(4H^2 - \tau H_p + \tau\tau_{pp}) = 0. \tag{24}$$

Уравнения (22)–(24) и

$$\xi = \tau_S + 2\, u_{\alpha p}\, u_{\alpha S} = 0 \tag{25}$$

оказываются достаточными для инволютивности переопределенной системы уравнений (5), (7), (16) с произволом в две функции одного аргумента. Исследование совместности системы уравнений (22)–(25) состоит из двух этапов: $F_2' = F_3' = 0$ и $(F_2')^2 + (F_3')^2 \neq 0$.

А. Пусть $(F_2')^2 + (F_3')^2 \neq 0$. Так как $\tau H u_{1p} \neq 0$, то из (23) следует $(F_2' F_3'' - F_3' F_2'') = 0$. Без ограничения общности можно считать $F_2' \neq 0$, $F_3 = 0$ и $u_3 = u_3(S)$ — произвольной функцией. Тогда (22) выполняется тождественно в силу (23) $(i = 2)$.

Из уравнений (15), (25) и $\tau = f_0 u_{1p}^2$ имеем первые производные

$$u_{2S} = -(f_0\, u_{1pS} + u_{1S})/F_2, \quad u_{2p} = F_2\, u_{1p}, \tag{26}$$

откуда после приравнивания смешанных производных и интегрирования по S определим

$$u_{1pp} = -(u_{1p}(F_2 f_0' - f_0 F_2' + F_2(1 + F_2^2)) - u_1 F_2' + F_4)/(f_0 F_2),$$

где $F_4 = F_4(p)$ — произвольная функция. Ввиду громоздкости выкладок указывается лишь путь дальнейшего исследования. После дифференцирования u_{1pp} по p находим u_{1ppp}, после подстановки производных u_{1pp} и u_{1ppp} в (23), (24) следует, что $F_4 = cF_2'$ $(c = \text{const})$, а для $u_1 = u_1(p, S)$ получим уравнение вида

$$a u_{1p} + (u_1 - c) = 0$$

с функцией $a = a(p)$. Без ограничения общности можно считать $c = 0$. Из последнего уравнения находим $u_1 = h_1(p)\,A(S)$. После этого из (26) получим $u_2 = h_2(p)\,A(S)$, а из условия $\tau = f_0 u_{1p}^2$ вытекает, что уравнение состояния представляется в виде $\tau = g(p)\,A^2(S)$. Здесь $A = A(S)$ — произвольная функция, а для функций $g = g(p)$ и $h_i = h_i(p)$ $(i = 1,\ 2)$ имеется два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$F_2F_2''\,((h_1')^2(1+F_2^2)+g') = 2\,(F_2')^2h_1'\,(g'h_1-h_1'g)+$$
$$+F_2F_2'\,g\,g''+2\,((F_2')^2g+(h_1')^2F_2F_2'\,(1+F_2^2))\,((h_1')^2\,(1+F_2^2)+g'); \qquad (27)$$
$$F_2\,g\,h_1'' = F_2\,(1+F_2^2)\,(h_1')^3-F_2'h_1\,(h_1')^2+h_1'\,(F_2\,g'-g\,F_2') \qquad (28)$$

$(F_2 = h_2'/h_1')$. Здесь, из-за того что $\tau + u_\alpha u_{\alpha p} = 0$, давление также не зависит от времени t. Функция $u_3 = u_3(S)$ остается произвольной.

Замечание 1. В [1–3] для политропного газа с функцией $u_3 = c\,A(S)$ $(c = \mathrm{const})$ приведено другое представление полученного здесь решения. А именно: если искать решение в виде $u_1^2 = \psi(p)\,A^2(S)$, то для функций $F_2(p)$ и $\psi(p)$ имеется система двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$g\,(2\psi\psi''-(\psi')^2)/(2\psi\psi') = g'+(1+F_2^2)\,(\psi')^2/(4\psi)-(g+\psi'/2)\,F_2'/F_2; \qquad (29)$$
$$g\,(g'+(1+F_2^2)\,(\psi')^2/(4\psi)) = (1+F_2^2)^2(\psi')^2/(8\psi^2)+$$
$$+(g'\,(1+F_2^2)+gF_2F_2')\,\psi'/(2\psi)+\psi'\,g'\,F_2'/F_2+g\,(g''+2\,g'\,F_2'/F_2). \qquad (30)$$

Замечание 2. В стационарных пространственных двойных волнах уравнение $\tau + u_\alpha u_{\alpha p} = 0$ обеспечивает тождественное выполнение уравнения (24) в силу (23), если $(F_2')^2+(F_3')^2 \neq 0$.

Б. Пусть $F_2' = F_3' = 0$. Без ограничения общности можно считать $F_2 = F_3 = 0$, что соответствует $u_2 = u_2(S)$, $u_3 = u_3(S)$. Тогда из условия $\xi = 0$ получим $u_1 = h_1(p)\,A(S)+\psi(p)$, а из $\tau = f_0u_{1p}^2$ вытекает $f_0 = -h_1/h_1'$. Из анализа уравнений (22) и (24) (без ограничения общности) следует

$$u_1 = h_1(p)\,A(S), \qquad \tau = g(p)\,A^2(S), \qquad (31)$$

где $g = -h_1h_1'$. При этом функции $u_2(S)$ и $u_3(S)$ остаются произвольными.

В [1–3] эти функции связаны с $A(S)$, что является следствием дополнительного требования на вид двойной волны.

2. Пусть $H = 0$. Так как p и S функционально независимы, то из запрета на редукцию к инвариантным решениям системы (5), (7), (9) вытекает

$$\mathrm{rang}\begin{Vmatrix} u_{1S} & u_{2S} & u_{3S} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & -b_1 & 0 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ b_3 & 0 & -b_1 \end{Vmatrix} \leqslant 2,$$

где $b_i = \tau u_{ipS} - \zeta u_{ip}$, $a_i = b_i - \xi u_{ip}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Поэтому при $b_\alpha b_\alpha \neq 0$ должны выполняться соотношения

$$b_\alpha a_\alpha = 0, \qquad u_{\alpha S}b_\alpha = 0. \qquad (32)$$

Для дальнейшего исследования делается переход к новым независимым переменным p, S, x_3, t (без ограничения общности считается выполненным неравенство $p_{x_1}S_{x_2} - p_{x_2}S_{x_1} \neq 0$), т. е. $x_1 = P(p,\ S,\ x_3,\ t)$, $x_2 = Q(p,\ S,\ x_3,\ t)$.

Уравнения (1) после этого перехода запишем в виде

$$\begin{gathered}
BP_p - AQ_p = 0, \quad -u_{1p}BP_S + (\tau + u_{1p}A)\,Q_S = 0, \quad (\tau + u_{2p}B)\,P_S - u_{2p}AQ_S = 0,\\
(u_{3p}B - \tau Q_{x_3})\,P_S - (u_{3p}A - \tau P_{x_3})\,Q_S = 0,\\
(u_{2S} - u_{3S}Q_{x_3})\,P_p - (u_{1S} - u_{3S}P_{x_3})\,Q_p = 0,\\
A = u_1 - u_3P_{x_3} - P_t, \quad B = u_2 - u_3Q_{x_3} - Q_t,
\end{gathered} \tag{33}$$

причем

$$P_pQ_S - P_SQ_p \neq 0. \tag{34}$$

Изучение системы (33) разбивается на два случая:
а) существуют такие i и j $(i \neq j)$, что $u_{ipS}u_{jp} - u_{jpS}u_{ip} \neq 0$,
б) $u_{ipS}u_{jp} - u_{jpS}u_{ip} = 0$ $(i,\, j = 1,\, 2,\, 3,\; i \neq j)$.

Рассмотрим случай *а*. Для определенности считается, что $\Delta_3 = u_{2pS}u_{1p} - u_{1pS}u_{2p} \neq 0$. Введем обозначения

$$\Delta_1 = u_{3pS}u_{2p} - u_{2pS}u_{3p}, \quad \Delta_2 = u_{1pS}u_{3p} - u_{3pS}u_{1p}.$$

Тогда систему уравнений (33) приведем к следующей:

$$P = \left(x_3\Delta_1 + t\begin{Vmatrix} \psi & u_{2p}\\ \psi_S & u_{2pS}\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \chi & u_{2p}\\ \chi_S & u_{2pS}\end{Vmatrix}\right)\Big/\Delta_3; \tag{35}$$

$$Q = \left(x_3\Delta_2 - t\begin{Vmatrix} \psi & u_{1p}\\ \psi_S & u_{1pS}\end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} \chi & u_{1p}\\ \chi_S & u_{1pS}\end{Vmatrix}\right)\Big/\Delta_3; \tag{36}$$

$$(u_2 - u_3Q_{x_3} - Q_t)\,P_p - (u_1 - u_3P_{x_3} - P_t)\,Q_p = 0 \tag{37}$$

$(\psi = \tau + u_\alpha u_{\alpha p},\ \chi = \chi\,(p,\, S))$.

После подстановки (35) и (36) в (37) получим линейное по x_3 и t соотношение. При расщеплении его относительно x_3 и t вытекают уравнения: при свободном члене линейное гиперболическое уравнение второго порядка на функцию $\chi = \chi\,(p,\, S)$ вида

$$\tau\chi_{pS} - \zeta\chi_p + q_1\chi_S + q_2\chi = 0 \tag{38}$$

(функции $q_1 = q_1\,(p,\, S)$ и $q_2 = q_2\,(p,\, S)$ выражаются через τ и $u_i\,(p,\, S)$ $(i = 1,\, 2,\, 3)$); при x_3 и t

$$\Delta_\alpha b_{\alpha p} = 0, \quad (u_{\alpha p}b_\alpha)\,\Delta_3 + b_1b_{2p} - b_2b_{1p} = 0. \tag{39}$$

Таким образом, если $H = 0$, то в случае *а* течения будут с прямыми линиями уровня, а функции $\tau\,(p,\, S)$ и $u_i\,(p,\, S)$ $(i = 1,\, 2,\, 3)$ удовлетворяют переопределенной системе, состоящей из пяти дифференциальных уравнений: (32), (39) и $H = 0$. Анализ этой переопределенной системы в общем случае оказывается затруднительным, но если считать $\psi = 0$, то течения становятся стационарными. А для стационарных течений газа с уравнением состояния вида $\tau = g\,(p)\,A^2(S)$ показано, что эта система совместна только в частном случае уравнения состояния политропного газа с показателем политропы $\gamma = 2$ и имеет произвол в одну функцию одного аргумента.

В случае *б* без ограничения общности считается, что $u_{1p} \neq 0$. Тогда

$$u_{ip} = F_iu_{1p} \quad (i = 2,\, 3), \tag{40}$$

где $F_i = F_i(p)$ $(i = 2, 3)$. При этом нахождение решения системы (33) в силу неравенства (34) сводится к интегрированию системы двух линейных уравнений относительно одной неизвестной функции $Q(p, S, x_3, t)$:

$$\omega Q_p + \beta(u_3 Q_{x_3} + Q_t - u_2) = 0; \quad \omega_S Q_p + \beta(u_{3S} Q_{x_3} - u_{2S}) = 0. \tag{41}$$

Здесь

$$\begin{gathered} P = -F_2 Q - x_3 F_3 + tF_4 + F_0, \\ \omega = u_1 + u_2 F_2 + u_3 F_3 - F_4, \quad \beta = F_0' - F_2' Q - x_3 F_3' + tF_4', \quad \tau = -\omega u_{1p}; \end{gathered} \tag{42}$$

$F_0 = F_0(p)$, $F_4 = F_4(p)$ — произвольные пока функции. Заметим, что из уравнения (42) вытекает

$$x_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3 + tF_4 = F_0,$$

а из условия обратимости (34) с подстановкой в него (42) следует $\beta Q_S \neq 0$. Кроме того, так как $\tau = -\omega u_{1p}$, то $\omega \neq 0$ и $\xi = -\omega^2 (u_{1p}/\omega)_S$. Тогда после исключения Q_p из (41) в силу того, что $\beta \neq 0$, получим

$$(u_3/\omega)_S Q_{x_3} + (1/\omega)_S Q_t = (u_2/\omega)_S. \tag{43}$$

Покажем, что $\omega_S \neq 0$. Действительно, пусть $\omega_S = 0$, тогда $u_{3S} \neq 0$, а если $u_{3S} = 0$, то из (43) находим $u_{2S} = 0$ и, следовательно, $u_{1S} = 0$, что противоречит условию $\tau_S \neq 0$. Так как $u_{3S} \neq 0$, то (43) интегрируется по x_3:

$$Q = x_3(u_{2S}/u_{3S}) + G(t, p, S).$$

После подстановки этого соотношения в первое уравнение (41) и расщепления его относительно x_3 имеем

$$\omega(u_{2S}/u_{3S})_p - (F_2'(u_{2S}/u_{3S}) + F_3')(u_3(u_{2S}/u_{3S}) + G_t - u_2) = 0; \tag{44}$$

$$\omega G_p + (F_0' - F_2' G + tF_4')(u_3(u_{2S}/u_{3S}) + G_t - u_2) = 0. \tag{45}$$

Если $F_2' u_{2S} + F_3' u_{3S} = 0$, то из (44) находим $(u_{2S}/u_{3S})_p = 0$, а это также приводит к противоречивому равенству $\tau_S = 0$.

Продифференцировав по p соотношение $\tau + \omega u_{1p} = 0$ с использованием условия $H = 0$, получим

$$F_2' u_2 + F_3' u_3 - F_4' = -\omega(u_{1pp}/u_{1p}), \tag{46}$$

а из того, что $\omega_S = 0$, следует

$$F_2' u_{2S} + F_3' u_{3S} = -\omega(u_{1pp}/u_{1p})_S.$$

С другой стороны, $\omega_S = u_{1S} + u_{2S}F_2 + u_{3S}F_3 = 0$. После дифференцирования последнего соотношения по p и использования (40) имеем $F_2' u_{2S} + F_3' u_{3S} = -u_{1pS}(1 + F_2^2 + F_3^2)$. Но тогда $(\tau u_{1p}/u_{1pS})_p = 0$. Так как $\tau = -\omega u_{1p}$, то

$$u_{1p} = 1/(\omega g + \lambda), \tag{47}$$

где $g = g(S)$; $\lambda = \lambda(p)$. При этом $\tau = -\omega/(\omega g + \lambda)$, и, значит, $g'\lambda \neq 0$, а если $g'\lambda = 0$, то $\tau_S \tau_p = 0$. Подстановка τ и u_{1p} в $H = 0$ дает $1 + F_2^2 + F_3^2 = \lambda^2(\omega/\lambda)_p$, поэтому $(\omega/\lambda)_p \neq 0$. Так как $(F_2')^2 + (F_3')^2 \neq 0$, то пусть, например, $F_3' \neq 0$. Из (46) следует

$$u_3 = (-F_2' u_2 + F_4' - \omega(u_{1pp}/u_{1p}))/F_3'. \tag{48}$$

Дифференцируя (48) по p и используя (40), находим

$$u_2\,(F_2'/F_3')' = -u_{1p}\,(F_2F' + F_3F_3')/F' + [F_4' - \omega\,(u_{1pp}/u_{1p})/F_3']_p. \qquad (49)$$

Если $(F_2'/F_3')' = 0$, то можно считать $F_2 = 0$. Тогда после подстановки (47) в (48) получим квадратичный полином относительно $g\,(S)$. Поскольку $g' \neq 0$, то коэффициенты при g должны обращаться в нуль. Отсюда $(\omega/\lambda)_p = 0$, а это противоречит принятому предположению. Значит, $(F_2'/F_3')' \neq 0$, но тогда из (49) определим u_2, и аналогичные выкладки, как и при $(F_2'/F_3')' = 0$, приводят к такому же противоречию. Поэтому $\omega_S \neq 0$.

После интегрирования (44) с учетом (46) имеем соотношение

$$Q = t\,\frac{(u_2/\omega)_S}{(1/\omega)_S} + G\,(p, S, \lambda) \quad \Big(\lambda = x_3 - t\,\frac{(u_2/\omega)_S}{(1/\omega)_S}\Big),$$

подставив которое в (45) и расщепив его относительно t, получим

$$k_2 - k_3G_\lambda = 0; \qquad (50)$$

$$G_p - G_\lambda\,(F_0' - F_2'G - F_3'\lambda)\,u_{3S}/\omega_S = (F_0' - F_2'G - F_3'\lambda)\,u_{2S}/\omega_S, \qquad (51)$$

где $k_i = F_i\omega_S\,(u_{1p}^2/\tau)_S + u_{iS}\,(\ln(\tau/u_{1p}^2))_S \quad (i = 2,\ 3)$.

Предположим, что $k_3 = 0$, тогда и $k_2 = 0$, откуда

$$F_2\,\omega_S\,(u_{1p}^2/\tau)_S + u_{2S}\,(\ln(\tau/u_{1p}^2))_S = 0, \quad F_3\,\omega_S\,(u_{1p}^2/\tau)_S + u_{3S}\,(\ln(\tau/u_{1p}^2))_S = 0. \quad (52)$$

Далее необходимо рассматривать два случая.

1. Пусть $F_2u_{3S} - F_3u_{2S} \neq 0$. Тогда из (52) находим $(u_{1p}^2/\tau)_S = 0$, т. е. $\tau = \varphi\,(p)\,u_{1p}^2$, а из $H = 0$ вытекает

$$\tau = g\,(p)\,A^2(S), \quad u_i = A(S)\,(h_i(p) + g_i(S)) \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Дальнейший анализ приводит к тому, что (без ограничения общности) функции $g\,(p)$ и $h_i\,(p)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ удовлетворяют уравнениям

$$g' + h_\alpha' h_\alpha' = 0, \quad g + h_\alpha h_\alpha' = 0, \qquad (53)$$

а координаты скорости представляются в виде

$$u_i = A\,(S)\,h_i\,(p) \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

либо

$$u_i = A\,(S)\,h_i\,(p) \quad (i = 1,\ 2), \quad u_3 = u_3\,(S),$$

где $u_3\,(S)$ — произвольная функция; $h_2'h_3 - h_3'h_2 \neq 0$.

2. Пусть $F_2u_{3S} - F_3u_{2S} = 0$. В этом случае двойная волна существует только тогда, когда имеет место (53) и

$$u_1 = A\,(S)\,h_1\,(p), \quad u_i = u_i\,(S) \quad (i = 2,\ 3)$$

($u_3(S)$, $u_2(S)$ — произвольные функции).

Предположим теперь, что $k_3 \neq 0$. После интегрирования (50) $G = \lambda(k_2/k_3) + \Phi(p,\ S)$, а после подстановки последнего соотношения в (51) и расщепления относительно λ получим

$$k_3k_{2p} - k_2k_{3p} + (k_2F_2' + k_3F_3')\,(F_2u_{3S} - F_3u_{2S})\,(u_{1p}/\tau)_S = 0; \qquad (54)$$

$$\Phi_p + (F_0' - F_2'\Phi)\Big(\frac{u_{2S}}{\omega_S} - \frac{u_{3S}}{\omega_S}\,\frac{k_2}{k_3}\Big) = 0. \qquad (55)$$

Если продифференцировать по p соотношение $\tau + \omega u_{1p} = 0$ и использовать условие $H = 0$, то

$$u_2 F_2 + u_3 F_3 = F_4 - u_1 - \tau / u_{1p}, \quad u_2 F_2' + u_3 F_3' = F_4' + \tau u_{1pp} / u_{1p}^2. \tag{56}$$

При этом, если $F_2 F_3' - F_2' F_3 = 0$, то без ограничения общности можно считать $F_2 = F_3 = 0$, т. е. $u_2(S)$ и $u_3(S)$ — произвольные функции, а $u_1(p, S)$ и $\tau(p, S)$ определим из уравнений

$$\tau = (F_4 - u_1) u_{1p}, \quad u_{1pp}(F_4 - u_1) + F_4' u_{1p} = 0.$$

Если $F_2 F_3' - F_2' F_3 \neq 0$, то из (56) вытекают

$$\begin{aligned} u_2 &= [F_3' (F_4 - u_1 - \tau / u_{1p}) - F_3 (F_4' + \tau u_{1pp} / u_{1p})] / (F_2 F_3' - F_2' F_3), \\ u_3 &= [-F_2' (F_4 - u_1 - \tau / u_{1p}) + F_2 (F_4' + \tau u_{1pp} / u_{1p})] / (F_2 F_3' - F_2' F_3). \end{aligned} \tag{57}$$

Остается удовлетворить уравнениям (54) и

$$\frac{\partial u_2}{\partial p} = F_2 u_{1p}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial p} = F_3 u_{1p} \tag{58}$$

с подставленными в них из (57) функциями u_2 и u_3. С помощью ЭВМ было проверено, что

$$F_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial p} - F_2 u_{1p} \right) + F_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial p} - F_3 u_{1p} \right) = 0,$$

т. е. в (58) есть всего одно независимое уравнение. Следовательно, для функций $\tau(p, S)$ и $u_1(p, S)$ имеется только два уравнения.

Таким образом, подводя итог проделанным выкладкам, отметим, что пространственные неизоэнтропические неизобарические нестационарные течения идеального газа типа двойной волны, не редуцируемые к инвариантным решениям с функциональным произволом, имеются лишь следующих видов (в порядке их вывода).

1. Двойные волны с произволом в одну функцию двух аргументов с уравнением состояния (13). При этом $u_i = u_i(S)$ $(i = 1, 2, 3)$ — произвольные функции энтропии, давление определяется из уравнения $g(p) = c_1 t$, а энтропия находится из системы в инволюции, состоящей из двух дифференциальных уравнений (14).

2. Двойные волны с произволом в одну функцию одного аргумента, в которых $u_i = u_i(S)$ $(i = 2, 3)$ — произвольные функции энтропии, а $u_1 = u_1(p, S)$ и $\tau(p, S)$ определяются из уравнений

$$\tau = u_{1p} (F_0 - u_1), \quad 2 u_{1p} F_0' + u_{1pp} (F_0 - u_1) = 0 \tag{59}$$

с произвольной функцией $F_0(p)$. Исключив $u_1(p, S)$ из (59), получим, что такие двойные волны имеются только для уравнений состояния, которые удовлетворяют соотношению $(\alpha^2 = 1)$

$$\tau \tau_{pp} [-\alpha (F_0')^3 + 3 \alpha \tau_p F_0' + (\tau_p - (F_0')^2) \sqrt{(F_0')^2 - 4\tau_p}] +$$
$$+ \tau \tau_p F_0'' [\alpha (F_0') - 2\alpha \tau_p + F_0 \sqrt{(F_0')^2 - 4\tau_p}] + 2 F_0' \tau_p^2 [\alpha (F_0')^2 - 4\alpha \tau_p + F_0' \sqrt{(F_0')^2 - 4\tau_p}] = 0.$$

Функции $p = p(x_1, t)$, $S = S(x_2, x_3, t)$ находятся из переопределенной системы в инволюции (5), (7), (16).

3. Двойные волны с произволом в две функции одного аргумента и уравнением состояния $\tau = g(p) A^2(S)$, в которых $u_1 = h_1(p) A(S)$, а другие координаты скорости u_2,

u_3 имеют вид либо $u_2 = h_2(p)\, A(S)$, $u_3 = u_3(S)$, либо $u_2 = u_2(S)$, $u_3 = u_3(S)$. В первом случае функции $h_1(p)$, $h_2(p)$ и $g(p)$ удовлетворяют системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений ((27), (28) или (29), (30)) $(h_1 h_1'' + h_2 h_2' \neq 0)$, $u_3(S)$ — произвольная функция. Во втором случае $u_2 = u_2(S)$, $u_3 = u_3(S)$ — произвольные функции, а $h_1(p)$ и $g(p)$ связаны соотношением $g + h_1 h_1' = 0$ $(h_1 h_1'' \neq 0)$. В этих двойных волнах давление стационарно. Такие решения для политропного газа рассматривались в [1–3], но там функции $u_2(S)$ и $u_3(S)$ связаны с $A(S)$ линейной зависимостью. Здесь же они произвольные.

4. Двойные волны с прямыми линиями уровня с произволом в две функции одного аргумента. Произвол определяется произвольными функциями из решения уравнения (38). Для $\tau(p, S)$, $u_i(p, S)$ $(i = 1, 2, 3)$ имеется переопределенная система, состоящая из пяти дифференциальных уравнений: (32), (39) и $H = 0$. Анализ этой переопределенной системы в общем случае уравнений состояния затруднителен. Но в частном случае уравнения состояния политропного газа с показателем политропы $\gamma = 2$ и при дополнительном условии $\tau + u_\alpha u_{\alpha p} = 0$ (что соответствует стационарным течениям) эта система совместна и имеет решение с произволом в одну функцию одного аргумента.

5. Двойные волны с произволом в одну функцию двух аргументов. Произвол определяется произвольной функцией из решения уравнения (51). Давление в таких течениях стационарно. Функции $g(p)$, $h_i(p)$ $(i = 1, 2, 3)$ связаны уравнением (53), где $\tau = g(p)\, A^2(S)$ и $u_1 = h_1(p)\, A(S)$, а остальные координаты скорости либо $u_i = h_i(p)\, A(S)$ $(i = 2, 3)$ $(h_2' h_3 - h_2 h_3' \neq 0)$, либо $u_2 = h_2(p)\, A(S)$, $u_3 = u_3(S)$ — произвольная функция, либо $u_2 = u_2(S)$ и $u_3 = u_3(S)$ — произвольные функции.

6. Двойные волны с произволом в одну функцию одного аргумента, которая является произвольной функцией решения уравнения (55). Функции $\tau(p, S)$ и $u_i(p, S)$ $(i = 1, 2, 3)$ определяются следующим образом: либо $u_2 = u_2(S)$, $u_3 = u_3(S)$ — произвольные функции, $u_1 = F_0 - \alpha\tau/\sqrt{-\tau_p}$, а для $\tau = \tau(p, S)$

$$2\,\alpha\, F_0'\, \tau_p \sqrt{-\tau_p} + \tau\, \tau_{pp} = 0$$

$(\alpha^2 = 1$, F_0 — произвольная функция), либо u_2 и u_3 определяются соотношениями (57), а $\tau = \tau(p, S)$ и $u_1 = u_1(p, S)$ находятся из двух уравнений: одного из системы (58) и уравнения (54).

Тем самым установлена справедливость

Теорема. *Пространственные неизоэнтропические неизобарические нестационарные течения идеального газа типа двойной волны, не редуцируемые к инвариантным решениям с функциональным произволом, имеются лишь шести видов, указанных выше.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17361).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зубов Е. Н.** Об одном классе точных решений уравнений газовой динамики с переменной энтропией // Численные и аналитические методы решения задач механики сплошной среды. Свердловск, 1981. С. 41–67.
2. **Зубов Е. Н.** О двойных волнах уравнений газовой динамики для пространственных нестационарных течений идеального газа с переменной энтропией // Докл. АН СССР. 1981. Т. 263, № 5. С. 1087–1091.
3. **Зубов Е. Н.** О некоторых точных решениях уравнений газовой динамики для пространственных нестационарных течений идеального газа с переменной энтропией //

Точные и приближенные методы исследования задач механики сплошной среды. Свердловск, 1983. С. 53–68.

4. **Комаровский Л. В.** Об одном точном решении уравнений пространственного неустановившегося течения газа типа двойной волны // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135, № 1. С. 33–35.
5. **Комаровский Л. В.** О пространственных течениях газа с вырожденным годографом // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 3. С. 491–495.
6. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 9/I 1995 г.