

УДК 532.62:536.421.4

ГИДРОТЕРМОДИНАМИКА ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ С КРИСТАЛЛАМИ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА В ПОТОКЕ ВОЗДУХА, СОДЕРЖАЩЕМ ЧАСТИЦЫ ЛЬДА

А. В. Кашеваров*, А. Л. Стасенко*,**

* Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского,
140180 Жуковский, Россия

** Московский физико-технический институт, 140180 Жуковский, Россия
E-mails: a.v.kash@yandex.ru, stasenko@serpantin.ru

Приведена физико-математическая модель воздействия потока воздуха, содержащего кристаллы льда, на пленку воды, движущуюся по поверхности твердого тела. Численные исследования проведены для случая цилиндра, находящегося в поперечном потоке. Изучено влияние эффективной вязкости суспензии кристаллов в несущей воде и конечного времени их плавления на гидротермодинамику отвердевающей пленки. В этом случае используемая модель является нелокальной.

Ключевые слова: водно-кристаллическая суспензия, плавление кристаллов, барьерный лед.

DOI: 10.15372/PMTF20170211

Введение. Теоретическому и экспериментальному исследованию динамики жидкой пленки, движущейся вдоль поверхности твердого тела под действием высокоскоростного газодисперсного потока, посвящено большое количество работ (см., например, [1–4]).

В настоящей работе предложены математические модели процессов, происходящих в пленке воды на поверхности цилиндра, находящегося в потоке воздуха с кристаллами льда. Эти модели позволяют предсказать скорость обледенения элементов конструкции летательного аппарата в облаках, встречающихся на высоте до 13 км и содержащих большое количество кристаллов [5]. Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что в отличие от случая воздушно-капельного потока [4, 6] появление в пленке кристаллов может привести к изменению эффективной вязкости смеси (суспензии), кроме того, для их плавления требуется определенное время, что приводит к нелокальности модели.

Рассматриваемый случай представляет собой задачу моделирования формирования так называемого барьерного льда, наиболее опасного вида обледенения, возникающего в труднопредсказуемой области обтекаемого элемента летательного аппарата. Возникновение ледяного барьера обусловлено отвердеванием движущихся по поверхности тела фрагментов жидкости, в частности пленки воды, образующейся, например, при использовании нагревателей для устранения наледи на кромках наветренной стороны крыла, стабилизатора и т. д. или в результате плавления части кристаллов на нагретых лопатках входной

Работа выполнена в рамках проекта НАИС программы ЕС (№ 314314) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00766).

© Кашеваров А. В., Стасенко А. Л., 2017

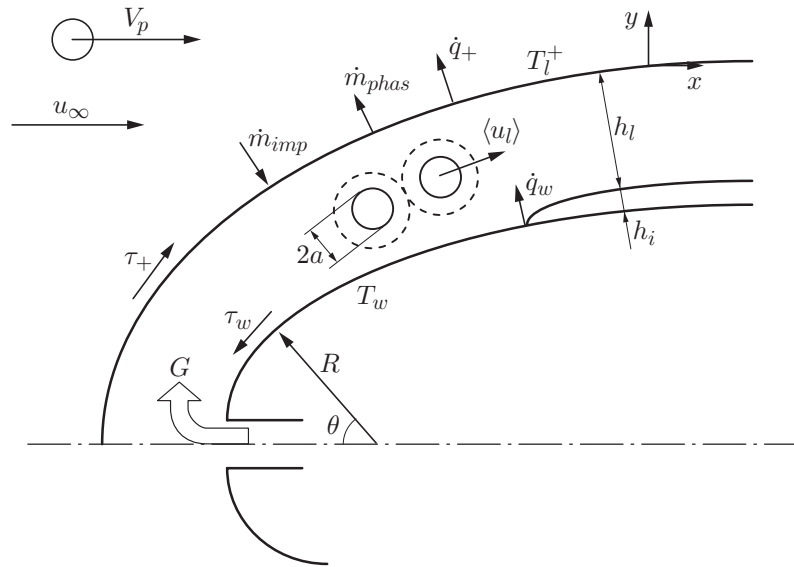


Рис. 1. Схема задачи

секции двигателя. Поэтому определение координат области, в которой начинается обледение, т. е. области, в которой достигается температура замерзания (плавления) текущей пленки, является важным этапом решения задачи.

В условиях лабораторного эксперимента [7] контролируется расход воды в пленке вдоль линии растекания на профиле. Кроме того, кристаллы летят практически по прямолинейным траекториям, что при математическом описании исследуемых процессов упрощает определение коэффициента орошения.

1. Постановка задачи. Оценка характерных времен. Схема задачи приведена на рис. 1 (\dot{m} , τ , \dot{q} — векторы плотности потока массы, импульса и энергии соответственно). Площадь орошения тела падающими частицами зависит от искривления их траекторий перед столкновением. Степень влияния этого процесса определяется значением числа Стокса

$$St = \frac{2}{9} \frac{\rho_i a^2}{\mu_a 2R/u_\infty},$$

являющегося отношением характерного времени скоростной релаксации частицы в несущем газе к характерному времени обтекания тела $2R/u_\infty$. Здесь R — характерный размер тела; u_∞ — скорость набегающего потока; ρ_i , a — плотность частицы (льда) и ее радиус; μ_a — динамическая вязкость воздуха.

Время скоростной (стоксовой) релаксации частицы внутри пленки можно оценить по формуле

$$\tau_l^{St} = (2/9)\rho_l a^2/\mu_l,$$

где ρ_l , μ_l — плотность и динамическая вязкость жидкости.

Время прогрева частицы (по ее объему W) в пленке определяется следующим образом:

$$\tau_W = \rho_i c_i a^2/\lambda_i.$$

Здесь c_i — теплоемкость материала частицы (льда); λ_i — теплопроводность льда.

Еще один временной масштаб характеризует таяние кристалла внутри пленки:

$$\tau_L \sim \frac{\rho_i a^2 L_s}{\lambda_l (T_l - T_f)}.$$

Здесь L_s — скрытая теплота фазового перехода лед — вода; λ_l — теплопроводность жидкости; T_l , T_f — температуры пленки и плавления льда ($T_f = 273$ K).

Лабораторный эксперимент [7] проводился при следующих значениях параметров: $R = 1,5$ см, $u_\infty = 50$ м/с, $\mu_a \approx 1,5 \cdot 10^{-5}$, $\mu_l = 10^{-3}$ кг/(м·с), $T_l - T_f \approx 3$ К. Принимая $a = 50$ мкм, $St \approx 50 \gg 1$, получаем значения характерных времен $\tau_l^{St} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ с, $\tau_W \approx 5 \cdot 10^{-3}$ с, $\tau_L \approx 0,5$ с. Эти оценки позволяют пренебречь искривлением траекторий частиц, падающих на тело. Можно считать, что скорость и температура частиц мгновенно становятся равными скорости и температуре пленки, однако процесс таяния кристалла внутри пленки требует значительного времени.

Заметим, что процесс обтекания любого тела воздухом и поведение частиц в несущем газе до столкновения с телом можно описать с помощью алгоритмов, предложенных в работах [8–10].

2. Задача Стефана для отдельного кристалла и кристалла, находящегося в условиях стесненности. Плавление отдельного кристалла при наличии теплообмена с окружающей средой через изменяющуюся со временем границу фазового раздела описывается задачей Стефана [11]. При исследовании взаимодействия летательного аппарата с кристаллическим облаком эта задача решается с помощью упрощающего предположения о мгновенном плавлении кристаллов льда при соприкосновении с поверхностью, покрытой глянцеви́тым льдом или пленкой воды [12]. Это предположение используется в данной работе.

Задача формулируется следующим образом. Требуется решить уравнение

$$\rho_j c_j \frac{\partial T_j}{\partial t} = \frac{\eta}{a} \frac{da}{dt} \frac{\partial T_j}{\partial \eta} + \frac{1}{a^2 \eta^2} \lambda_j \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^2 \frac{\partial T_j}{\partial \eta} \right),$$

где индекс $j \equiv i$ соответствует льду, $j \equiv l$ — жидкости; ρ_j , c_j , λ_j — плотность, теплоемкость и теплопроводность льда и жидкости; T_j — температура. В переменных t , η ($\eta = r/a(t)$; r — радиальная координата) межфазная граница неподвижна ($\eta = 1$). Считается, что кристалл имеет форму шара радиусом $a(t)$.

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \eta = 0: \quad \frac{\partial T_i}{\partial \eta} &= 0, & \eta \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial T_l}{\partial \eta} &= 0, \\ \eta = 1: \quad T_i = T_l = T_r, & \quad \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial \eta} - \lambda_i \frac{\partial T}{\partial \eta} &= -\rho_i L_s a \frac{da}{dt}. \end{aligned}$$

Здесь T_r — температура поверхности кристалла. В начальный момент температура поверхности меньше температуры плавления льда; $T_r < T_f$, поэтому в течение некоторого промежутка времени скорость изменения радиуса кристалла da/dt равна нулю, а величина T_r возрастает. Достигая значения, равного температуре плавления, температура поверхности не меняется, при этом радиус частицы уменьшается.

Данные граничные условия соответствуют отдельному кристаллу в безграничной водной среде. При учете стесненности кристаллов, т. е. конечности объема жидкости, приходящейся на один кристалл, каждому кристаллу ставится в соответствие объем ячейки радиусом r_c (штриховая линия на рис. 1), определяемый соотношением

$$4\pi r_c^3/3 = n^{-1},$$

где n — числовая концентрация кристаллов в пленке. В этом случае объемная доля β_i кристаллов в смеси равна $(a/r_c)^3$. Граничное условие на бесконечности переносится на границу ячейки $\eta = \eta_c$ и принимает вид

$$\eta = \eta_c: \quad \frac{\partial T_l}{\partial \eta} = 0.$$

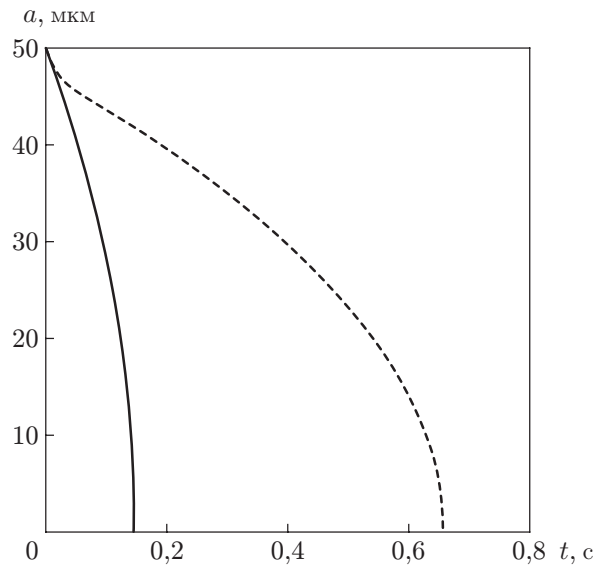


Рис. 2. Зависимость радиуса кристалла в пленке от времени: сплошная линия — одиночный кристалл, штриховая — кристалл, находящийся в условиях стесненности

На рис. 2 приведены зависимости радиуса кристалла в жидкости от времени, полученные при численном решении задачи Стефана. Расчеты выполнены для начального радиуса кристалла $a_0 = 50$ мкм, начальной температуры $T_{i0} = 263$ К, температуры жидкости $T_l = 276$ К. На рис. 2 видно, что для одиночного кристалла время плавления составляет приблизительно 0,15 с, для стесненного ($\beta_i = 0,125$) — приблизительно 0,65 с. Кроме того, из рис. 2 следует, что время нагрева кристалла до температуры, равной температуре плавления, существенно меньше времени его таяния. Эти результаты свидетельствуют о том, что закон изменения размера кристалла со временем близок к закону Срезневского [13]

$$a/a_0 = (1 - t/\tau_L)^{1/2}. \quad (1)$$

3. Эффективная вязкость. Известно, что смесь жидкости с твердыми частицами обладает вязкостью μ_l , превышающей вязкость несущей среды μ_l^0 . В работе [3] приведены экспериментальные данные о зависимости вязкости от объемной доли частиц, полученные для различных жидкостей, содержащих частицы с различными размером и формой. В настоящей работе принята интерполяция

$$\mu_l/\mu_l^0 = (1 - \beta_i)^{-2,5},$$

которая при малых значениях β_i переходит в известную формулу Эйнштейна.

Для того чтобы оценить влияние объема диспергированной фазы на эффективную вязкость суспензии, начальные температуры кристалла и пленки примем равными $T_{i0} = -50$ °С, $T_{l0} = 50$ °С. Тогда из равенства энтальпий до и после внедрения кристаллов в воду

$$(1 - f_i)(c_l T_{l0} + H_0) + f_i(c_i T_{i0} + H_0) = c_l T_f + H_0$$

(H_0 — энтальпия образования вещества) следует, что для замерзания пленки необходима массовая доля f_i кристаллов в ней, приближенно равная 25 %. При этом согласно указанным выше экспериментальным данным эффективная вязкость может увеличиться в 2,5–3 раза.

4. Система уравнений гидротермодинамики пленки, взаимодействующей с потоком воздуха, содержащим кристаллы льда. Для описания гидротермодинамики пленки использованы уравнения пограничного слоя, осредненные по толщине пленки h_l . Оператор осреднения любой величины X имеет вид

$$\langle X(x, t) \rangle = \frac{1}{h_l(x, t)} \int_0^{h_l(x, t)} X(x, y; t) dy,$$

где x, y — координаты вдоль поверхности и по нормали к ней, причем y отсчитывается от поверхности тела или слоя льда.

Система уравнений включает уравнения неразрывности, импульсов, энергии пленки и уравнения эволюции концентрации частиц в ней:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l h_l \langle u_l \rangle}{\partial x} = -\rho_i \frac{\partial h_i(x, t)}{\partial t} - \dot{m}_{phas} + \dot{m}_{imp}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_l h_l \langle u_l \rangle}{\partial t} = -h_l \frac{dp}{dx} + \tau_+ - \tau_w + \dot{m}_{imp} u_p; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_l h_l \langle \Theta \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l h_l \langle u_l \Theta \rangle}{\partial x} = \dot{q}_+ - \dot{q}_w - \dot{m}_{phas} L_v + \dot{m}_{imp} \left(\frac{V_p^2}{2} + c_i (T_i - T_f) \right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial h_l n^{(j)}}{\partial t} + \frac{\partial h_l n^{(j)} \langle u_l \rangle}{\partial x} = \begin{cases} \dot{m}_{imp} / (4\pi a_0^3 \rho_i / 3), & x = x_j, \\ 0, & x > x_j. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\langle u_l \rangle$ — средняя скорость течения пленки; \dot{m}_{phas} — плотность потока массы воды (см. рис. 1), испаряющейся из пленки; \dot{m}_{imp} — плотность потока массы падающих на пленку частиц; ρ_l — плотность пленки, являющаяся переменной, так как текущая пленка с падающими в нее кристаллами представляет собой суспензию. Выражение для плотности пленки можно представить в виде

$$\rho_l = (1 - \beta_i) \rho_l^0 + \beta_i \rho_i,$$

где ρ_l^0 — плотность воды.

Часть текущей по поверхности воды может превращаться в лед, поэтому в уравнении (2) появляется сток (первое слагаемое в правой части). Скорость увеличения толщины слоя льда h_i определяется из баланса тепла, выделяющегося при фазовом переходе, и тепла, отводимого пленкой от слоя льда за счет конвекции:

$$\frac{\partial h_i(x, t)}{\partial t} = -\frac{\alpha_l (T_l^+ - T_f)}{\rho_i L_s} \quad (6)$$

(α_l — коэффициент теплоотдачи льда пленке; T_l^+ — температура на внешней границе пленки).

В уравнении импульсов (3) пренебрегается инерцией (p — давление в пленке, определяемое ее обтеканием; τ_+, τ_w — напряжения трения на внешней и внутренней границах пленки; последнее слагаемое учитывает импульс падающих на пленку частиц; u_p — скорость частиц вдоль пленки).

В уравнении энергии (4) учтено, что температура кристаллов в пленке быстро достигает температуры плавления, поэтому удельная энтальпия пленки равна $\Theta = c_l^0 (1 - f_i) T_l + c_i f_i T_f$. Предпоследний член в (4) учитывает отвод тепла за счет испарения (L_v — скрытая теплота фазового перехода вода — пар), а последний описывает вклад падающих

частиц в энтальпию пленки (V_p — модуль скорости частиц при ударе). Члены \dot{q}_+ и \dot{q}_w представляют собой плотности потока тепла на внешней и внутренней границах пленки:

$$\dot{q}_{+,w} = \lambda_l \left(\frac{\partial T_l}{\partial y} \right)_{+,w},$$

причем $\lambda_l = (1 - f_i)\lambda_l^0 + f_i\lambda_i$, где λ_l^0 — теплопроводность воды.

В уравнении (5) учтено, что водно-кристаллическая смесь является полидисперсной. Кристаллы внедряются в пленку в различных точках и начинают плавиться неодновременно, поэтому в пленке присутствуют кристаллы разного размера и концентрации кристаллов $n^{(j)}$ каждой фракции j различаются. Поэтому объемная доля кристаллов льда в пленке определяется по формуле

$$\beta_i = \frac{4}{3}\pi \sum_j n^{(j)} a^{(j)3}.$$

Предполагается, что изменение радиуса кристалла j -й фракции происходит согласно закону Срезневского (1) с учетом принятого характерного времени плавления. Время t движения кристалла вместе с пленкой от точки падения с координатой x_j до точки с координатой x можно оценить следующим образом:

$$t = \int_{x_j}^x \frac{dx}{\langle u_l \rangle}.$$

5. Математическая модель для случая обтекания цилиндра. Разработанная модель использовалась при моделировании течения водяной пленки по поверхности кругового цилиндра в случае, когда пленка образуется в результате введения воды через горизонтальную щель, совпадающую с передней критической линией цилиндра. Такой способ создания пленки использовался в экспериментах [7].

Расчеты с помощью системы уравнений (2)–(5) проводились в предположении $\partial/\partial t = 0$ при отсутствии замерзания пленки. В этом случае возможно существование стационарного режима. При наличии условий обледенения это допущение справедливо только на его начальной стадии. В [14] полагается, что эта стадия определяет дальнейшее обледенение элементов конструкции авиационного двигателя. Для расчета данного процесса можно применять квазистационарный многоступенчатый подход, требующий пересчета геометрии тела и последующего решения задачи его обтекания через некоторые промежутки времени.

Для тонкой пленки принят параболический закон распределения скорости по толщине

$$u_l(y) = y \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{h_l} \right) \frac{\tau_w}{\mu_l} + \frac{1}{2} \frac{y^2 \tau_+}{h_l \mu_l}, \quad (7)$$

причем коэффициенты распределения подобраны таким образом, что выполняются граничные условия

$$\mu_l \left. \frac{\partial u_l}{\partial y} \right|_w = \tau_w, \quad \mu_l \left. \frac{\partial u_l}{\partial y} \right|_+ = \tau_+.$$

Квадратичная зависимость скорости пленки (7) следует из уравнения безынерционного пограничного слоя при постоянном значении вязкости.

Исключая τ_w с помощью (3), получаем

$$u_l(y) = y(D_l + \varepsilon_l h_l) - \varepsilon_l y^2 / 2, \quad (8)$$

где $D_l = \mu_l^{-1} \tau_+$; $\varepsilon_l = -\mu_l^{-1} dp/dx$.

Вследствие малости толщины пленки и скорости ее движения давление p в пленке определялось в предположении потенциальности процесса обтекания сухого цилиндра:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{2\rho_\infty u_\infty^2}{R} \sin\left(\frac{2x}{R}\right) \quad (9)$$

(ρ_∞ — плотность воздуха на бесконечности).

Распределению давления (9) соответствует известное выражение для напряжения сдвига τ_+ в виде ряда Блазиуса.

Полагая, что инерционность падающих частиц велика, т. е. считая, что их скорость не изменяется в процессе движения и равна скорости набегающего потока, получаем

$$\dot{m}_{imp} = \rho_p u_\infty \cos(x/R),$$

где ρ_p — массовая концентрация кристаллов в набегающем потоке.

Скорость частиц вдоль пленки равна $u_p = u_\infty \sin(x/R)$, поэтому их плотность потока импульса вдоль поверхности тела равна

$$\dot{m}_{imp} u_p = (\rho_p u_\infty^2 / 2) \sin(2x/R).$$

Следовательно, первое и последнее слагаемые в правой части уравнения (3) могут быть объединены и выражение для ε_l в (8) принимает вид

$$\varepsilon_l = -\frac{1}{\mu_l} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{R}{h_l} \frac{\rho_p}{\rho_\infty}\right) \frac{dp}{dx}.$$

Интегрируя (8) по толщине пленки, нетрудно получить связь между $\langle u_l \rangle$ и h_l :

$$\langle u_l \rangle = h_l D_l / 2 + \varepsilon_l h_l^2 / 3. \quad (10)$$

Таким образом, задача об изменении толщины h_l и скорости $\langle u_l \rangle$ пленки вдоль образующей цилиндра сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения (2), которое решается с использованием алгебраической связи (10). Одновременно рассчитывается эволюция числовой концентрации кристаллов различных фракций в пленке с использованием выражения (5), которое представляет собой не одно уравнение, а набор из $N - 1$ уравнений, где N — число точек дискретизации расчетной области $0 \leq x \leq \pi R/2$. Решение задачи Коши для уравнения (5) позволяет найти изменение объемной доли кристаллов в пленке и уточнить значения плотности ρ_l и вязкости μ_l пленки. Кроме того, численное интегрирование уравнений (2), (5) проводится совместно с интегрированием уравнения энергии (4).

Профиль температуры в поперечном сечении пленки задавался аналогично (7):

$$T_l(y) = T_w + y \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{h_l}\right) \frac{\partial T_l}{\partial y} \Big|_w + \frac{1}{2} \frac{y^2}{h_l} \frac{\partial T_l}{\partial y} \Big|_+. \quad (11)$$

Выражения для плотностей потоков энергии \dot{q}_+ , \dot{q}_w приняты в виде

$$\dot{q}_+ = \alpha_a (T_\infty - T_l^+), \quad \dot{q}_w = \alpha_l (T_l^+ - T_w),$$

где α_a , α_l — коэффициенты теплоотдачи от поверхности пленки к воздушному потоку и от стенки (или образующегося бесконечно тонкого слоя льда) к жидкости; T_w — температура поверхности стенки.

Для определения коэффициента теплоотдачи α_a на внешней границе пленки использовалось выражение

$$\alpha_a = \frac{\lambda_a}{R} \sqrt{\text{Re}_\infty} \left[1,336 - 0,2721 \left(\frac{x}{R}\right)^2 - 0,03083 \left(\frac{x}{R}\right)^4 \right] \sqrt{\frac{\sin(x/R)}{x/R}}$$

(λ_a — теплопроводность воздуха), полученное на основе приведенной в [15] зависимости для расчета локальной теплоотдачи в доотрывной области цилиндра. Поверхность цилиндра считалась теплоизолированной: $\alpha_l = 0$.

На основе (8), (11) для величины $\langle u_l T_l \rangle$, входящей в уравнение энергии (4), получаем выражение

$$\langle u_l T_l \rangle = \langle u_l \rangle T_w + \frac{h_l^2 \alpha_a}{8\lambda_l} \left[D_l \left(1 + \frac{h_l \alpha_l}{3\lambda_l} \right) + \frac{3}{5} \varepsilon_l h_l \left(1 + \frac{7h_l \alpha_l}{18\lambda_l} \right) \right] \frac{T_\infty - T_w}{1 + h_l(\alpha_a - \alpha_l)/(2\lambda_l)},$$

из которого следует, что решение задачи Коши для уравнения (4) позволяет найти температуру стенки T_w . Обледенение начинается в области $x > x_f$, где x_f — координата, при которой температура T_w становится меньше температуры T_f . Как известно, фазовый переход происходит при постоянной температуре. При этом уравнение (4) не является избыточным, так как поверхность слоя льда, которая теперь представляет собой границу пленки, нельзя считать теплоизолированной. Коэффициент теплоотдачи α_l не равен нулю и определяется по вычисленному значению $\langle u_l T_l \rangle$:

$$\frac{\alpha_l h_l}{\lambda_l} = \frac{8(\langle u_l T_l \rangle - \langle u_l \rangle T_f)(1 + 0,5h_l \alpha_a / \lambda_l) - (D_l + 3\varepsilon_l h_l / 5)(T_\infty - T_f)h_l^2 \alpha_a / \lambda_l}{4(\langle u_l T_l \rangle - \langle u_l \rangle T_f) + (D_l + 0,7\varepsilon_l h_l)(T_\infty - T_f)h_l^2 \alpha_a / (3\lambda_l)}.$$

Далее по формуле (6) вычислялась скорость обледенения $\partial h_i / \partial t$.

Для определения величины плотности потока испаряющейся массы воды \dot{m}_{phas} , входящей в (5), использована тройная аналогия Рейнольдса процессов переноса (в частности, процессов тепло- и массообмена) [16]:

$$\dot{m}_{phas} = \frac{\alpha_a D_v}{\lambda_a} [\rho_{vs}(T_l^+) - \rho_{v\infty}].$$

Здесь D_v — коэффициент диффузии пара; $\rho_{vs}(T_l^+)$ — плотность насыщенного пара при температуре T_l^+ ; $\rho_{v\infty}$ — плотность пара в атмосфере. Плотность пара связана с его давлением через уравнение состояния.

6. Результаты расчетов. Размеры цилиндра, для которого проводились расчеты, были близки к реальным размерам экспериментальной модели с передней цилиндрической кромкой: радиус цилиндра $R = 1,5$ см, его длина равна 15 см. Вычисления проведены для значений расхода воды через щель $G = 1, 10, 100$ г/с.

Давление насыщенного пара над поверхностями воды и льда задавалось аппроксимационными формулами

$$p_{vs} = \begin{cases} 610 \exp(19,6 - 5350/T), & T \geq T_f, \\ 610 \exp(22,25 - 6075/T), & T < T_f. \end{cases}$$

Для коэффициента диффузии пара принято значение $D_v = 2,16 \cdot 10^{-5}$ м²/с.

В качестве начального профиля скорости пленки выбрана линейная зависимость. Значение $\langle u_l T_l \rangle_0$ в начальном сечении может быть вычислено с использованием профиля температуры при заданной начальной температуре стенки T_{w0} .

Уравнения решались численно методом конечных разностей с помощью явной разностной схемы. Шаг интегрирования Δx составлял $0,1\pi/180$, т. е. $0,1^\circ$ по азимутальному углу θ .

Предварительные расчеты показали, что вблизи критической точки x_0 толщина пленки неограниченно увеличивается с уменьшением Δx . Действительно, при $x \rightarrow 0$ значения τ^+ , dp/dx и скорость пленки u_l стремятся к нулю. Таким образом, при заданном расходе вытекающей воды толщина пленки стремится к бесконечности. В случае если

пленка образуется путем введения воды, имеется дополнительный перепад давления внутри пленки, который не учитывается в предлагаемой модели.

Сингулярность в точке x_0 устраняется следующим образом. Выражение для скорости внешнего течения на границе пленки при x_0 задается в виде

$$u = 2u_\infty \sin(x/R) + u_{l0}^+,$$

где u_{l0}^+ — некоторая изначально неизвестная продольная скорость внешней границы пленки при x_0 . Далее это выражение используется для всего расчетного диапазона. Для перепада давления имеем

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{2\rho_\infty u_\infty^2}{R} \sin\left(\frac{2x}{R}\right) + \frac{2u_\infty u_{l0}^+}{R} \cos\left(\frac{x}{R}\right).$$

Таким образом, градиент давления в начальной точке становится отличным от нуля, что позволяет избежать сингулярности. На большей части расчетного интервала предложенная регуляризирующая поправка u_{l0}^+ пренебрежимо мала и не вносит искажений в результаты расчетов. При расчете с регуляризацией начальное значение толщины пленки определяется методом пристрелки, т. е. подбирается такое значение h_{l0} , при котором начальная температура стенки, найденная путем экстраполяции расчетных значений T_w в точку x_0 , совпадает с заданной температурой T_{w0} .

На рис. 3, 4 представлены расчетные зависимости толщины пленки и скорости течения от угла θ при различных значениях расхода воды (скорость набегающего потока $u_\infty = 50$ м/с, температура воздуха $T = 263$ К, начальная температура стенки $T_{w0} = 276$ К) в отсутствие кристаллов льда в набегающем потоке. Видно, что при расходе воды $G = 100$ г/с образуется пленка достаточно большой толщины.

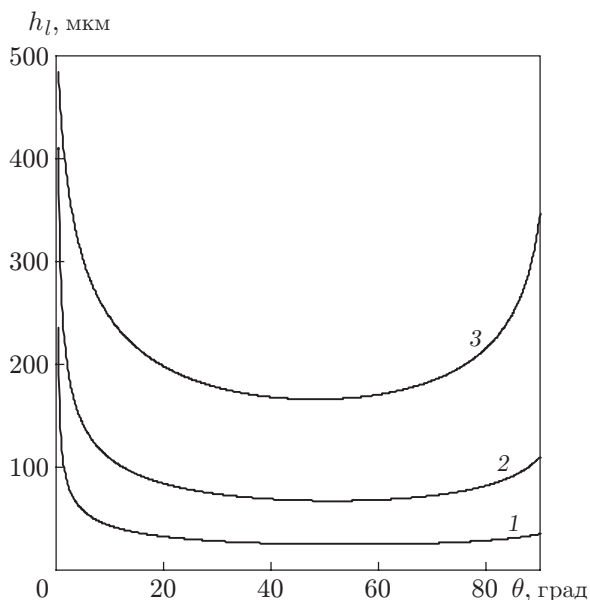


Рис. 3

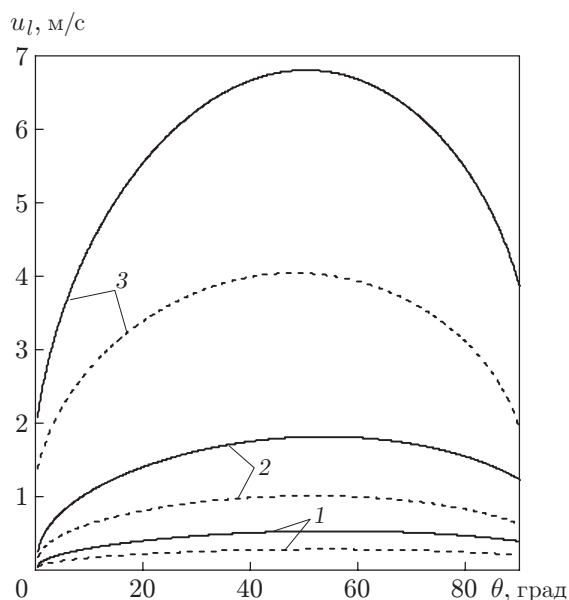


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость толщины пленки от угла θ при различных значениях расхода воды через щель:

1 — $G = 1$ г/с, 2 — $G = 10$ г/с, 3 — $G = 100$ г/с

Рис. 4. Зависимость скорости пленки от угла θ :

сплошные линии — u_l^+ , штриховые — $\langle u_l \rangle$; остальные обозначения те же, что на рис. 3

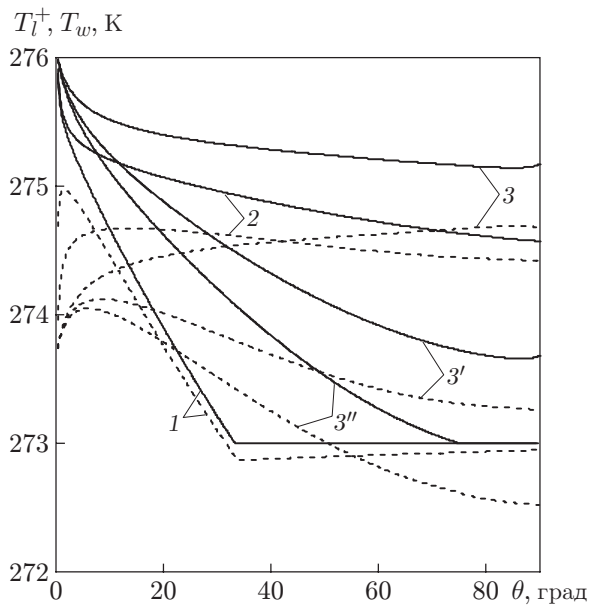


Рис. 5

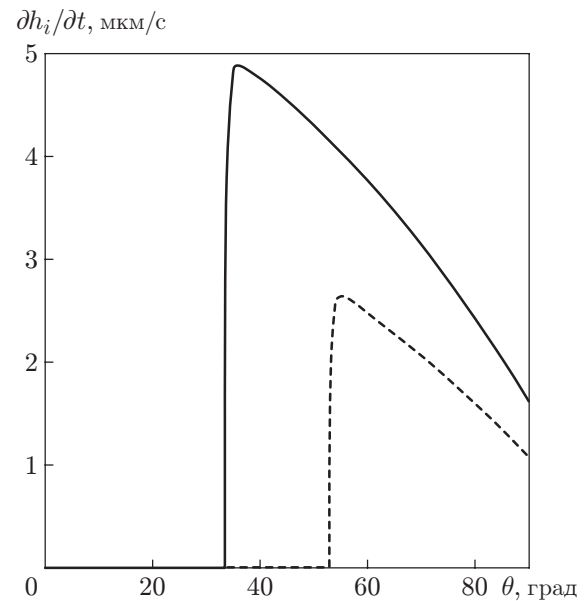


Рис. 6

Рис. 5. Зависимости температуры пленки от угла θ при различных значениях расхода воды через щель:

сплошные линии — температура на нижней границе (стенке) T_w , штриховые — температура на верхней границе T_l^+ ; 1–3 — в отсутствие кристаллов в набегающем потоке ($\rho_p = 0$) (1 — $G = 1$ г/с, 2 — $G = 10$ г/с, 3 — $G = 100$ г/с), 3' — $\rho_p = 10$ г/м³, 3'' — $\rho_p = 15$ г/м³

Рис. 6. Зависимость скорости нарастания слоя льда от угла θ при $G = 1$ г/с: сплошная линия — с учетом испарения пленки, штриховая — без учета испарения пленки

На рис. 5 приведены зависимости температуры на внутренней и внешней границах пленки от угла θ . Кривые 1–3 получены при отсутствии кристаллов в набегающем потоке. При значениях расхода $G = 10, 100$ г/с пленка остается “теплой”. Для тонкой пленки температура на ее нижней границе (стенке) становится равной температуре замерзания воды при $\theta \approx 35^\circ$ (кривая 1) и далее не изменяется. При этом температура на внешней границе пленки меньше T_f . Таким образом, пленка оказывается в переохлажденном состоянии, вследствие чего может начаться обледенение. На рис. 6 показана зависимость скорости нарастания слоя льда от угла θ . Видно, что испарение воды оказывает существенное влияние на скорость обледенения.

Кривые 3' и 3'' на рис. 5 получены для воздушного потока, содержащего кристаллы с массовой концентрацией $\rho_p = 10, 15$ г/м³. Начальный радиус кристаллов составлял 50 мкм. Проникание кристаллов в пленку приводит к уменьшению ее температуры до температуры замерзания, после чего может начаться образование барьерного льда.

Попадающие в пленку кристаллы оказывают слабое влияние на ее толщину и скорость движения, так как для принятых в работе значений параметров объемная доля кристаллов в пленке не превышает 2 % (рис. 7).

Заключение. В работе решена задача Стефана для отдельного плавящегося кристалла в безграничной жидкости и кристалла, находящегося в условиях стесненности, что позволило провести моделирование этого процесса с помощью закона Срезневского, включенного в систему уравнений гидротермодинамики суспензии на поверхности тела при его

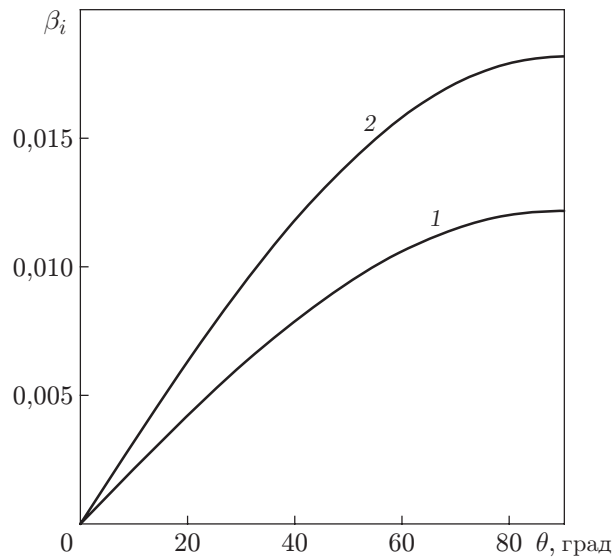


Рис. 7. Зависимость объемной доли кристаллов в пленке от угла θ :
 1 — $\rho_p = 10$ г/м³, 2 — $\rho_p = 15$ г/м³

обтекании воздушно-кристаллическим потоком. Исследовано влияние конечного времени плавления кристалла и зависимости эффективной вязкости суспензии от массовой доли диспергированной фазы на процессы, происходящие в пленке. Проведены численные исследования при значениях определяющих параметров, соответствующих параметрам экспериментов в аэрохолодильной установке.

Разработанный алгоритм может быть использован для определения координаты точки начала образования барьерного льда на поверхности элементов конструкции летательного аппарата в холодных облаках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дейч М. Е. Газодинамика двухфазных сред / М. Е. Дейч, Г. А. Филиппов. М.: Энергоатомиздат, 1981.
2. Бетяев С. К. Скин-эффект при обтекании профиля крыла дисперсной жидкостью // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 1. С. 49–55.
3. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
4. Алексеенко С. В., Приходько А. А. Численное моделирование обледенения цилиндра и профиля. Обзор моделей и результаты расчетов // Учен. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та. 2013. Т. 44, № 6. С. 25–57.
5. Mason J. G., Strapp J. W., Chow P. The ice particle threat to engine in flight. Reno, 2006. (Paper / AIAA; N 2006-206).
6. Messinger B. J. Equilibrium temperature of an unheated icing surface as a function of air speed // J. Aeronaut. Sci. 1953. V. 20, N 1. P. 29–42.
7. Miller A. B., Potapov Yu. F., Stasenko A. L. Experimental and theoretical investigations of aircraft icing in the case of crystal and mixed-phase flow // Proc. of the 29th congress of the Intern. council of the aeronaut. sci. (ICAS), St-Petersburg (Russia), 7–12 Sept. 2014. S. 1., 2014. Paper 0576.
8. Башкин В. А. Численное моделирование вязкого совершенного газа / В. А. Башкин, И. В. Егоров. М.: Физматлит, 2012.

9. **Стасенко А. Л., Толстых А. И., Ширококов Д. А.** К моделированию оледенения самолета: динамика капель и поверхность смачивания // Мат. моделирование. 2001. Т. 13, № 6. С. 81–86.
10. **Кашеваров А. В.** Приближенные конформные отображения в приложении к проблеме оледенения прямого крыла в переохлажденном облаке // Тр. 56-й науч. конф. Моск. физ.-техн. ин-та: Всерос. науч. конф. “Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе”, Всерос. молодежной науч.-инновац. конф. “Физ.-мат. науки: актуальные проблемы и их решения”. Аэродинамика и летательная техника, Москва; Долгопрудный; Жуковский, 25–30 нояб. 2013 г. М.: Моск. физ.-техн. ин-т, 2013. С. 82–83.
11. **Stefan J.** Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung // Sitzungsber. Wiener Acad. Math. Naturwiss. 1889. Bd 98, N 2a. S. 473–484.
12. **Nilamdeen S., Habashi W. G.** Multiphase approach toward simulating ice crystal injection in jet engines // J. Propulsion Power. 2001. V. 27, N 5. P. 959–969.
13. **Срезневский Б. И.** Об испарении жидкостей. СПб.: Тип. В. Демакова, 1883.
14. **Buttsworth D., Khalid Seleh, Talal Yusaf.** Discrete particle simulation for the initial stages of ice accretion in aircraft engines: initial model development // Proc. of the 3rd Intern. conf. on energy and environment (ICEE 2009), Malacca (Malaysia), 7–8 Dec. 2009. S. 1., 2009. P. 136–139.
15. **Жукаускас А. А.** Конвективный перенос в теплообменниках. М.: Наука, 1982.
16. **Кутателадзе С. С.** Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979.

*Поступила в редакцию 7/VII 2015 г.,
в окончательном варианте — 21/III 2016 г.*
