

ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ
НЕСТАЦИОНАРНОГО ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. А. Сыровой

(Москва)

В работах [1,2] введено понятие инвариантно-группового решения (Н-решения) и разработан общий метод получения таких решений. В ряде работ [2-7] исследованы групповые свойства систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих различные физические явления. Ниже рассмотрены уравнения нерелятивистского моноэнергетического нестационарного пучка заряженных частиц с одним и тем же значением и знаком удельного заряда η в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле $\mathbf{H}$. Предполагается, что в каждой точке вектор скорости является однозначной функцией. Найдена основная группа G_t уравнений пространственного пучка, оказавшаяся более широкой при $\mathbf{H} = 0$ (§ 2). Подробно разобраны плоские течения, описываемые Н-решениями ранга 1 и ранга 2 (§ 3, 4). Сделаны некоторые замечания о регулярных по Габору пучках (§ 5). Указаны пространственные Н-решения, представляющие наибольший интерес (§ 6). Приведен ряд аналитических решений, описывающих некоторые процессы в устройствах с плоской, цилиндрической и сферической геометрией (§ 3, 6). Для нескольких нестационарных пучков определены фокусирующие электроды (§ 7). Приводятся некоторые результаты, связанные с вычислением основной группы уравнений релятивистского пучка в том случае, когда излучением движущихся зарядов можно пренебречь (§ 8).

§ 1. Основные уравнения. Моноэнергетический нерелятивистский пучок заряженных частиц с одним и тем же значением и знаком удельного заряда η в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле описывается системой дифференциальных уравнений, которая в тензорной форме имеет вид

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma_{pk}^i v^p \right) = g^{il} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^l} + V_g^- e_{mnl} v^m H^n \right) \quad (1.1)$$

$$(S) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{V_g^-} \frac{\partial}{\partial x^i} (V_g^- g^{ik} \rho v_k) = 0, \quad \frac{1}{V_g^-} \frac{\partial}{\partial x^i} (V_g^- g^{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}) = \rho \quad (1.2)$$

Уравнения пучка (S) записаны в безразмерных переменных, введенных по формулам

$$\begin{aligned} t &= \frac{a}{U_0} t^\circ, \quad r = ar^\circ, \quad V = U_0 V^\circ, \quad \Phi = -\frac{U_0^2}{\eta} \Phi^\circ, \quad A = \frac{cU_0}{\eta} A^\circ \\ \hat{r} &= \frac{U_0^2}{4\pi\eta a^2} \hat{r}^\circ, \quad H = \frac{cU_0}{\eta a} H^\circ \end{aligned}$$

причем символ безразмерной величины (например, Φ°) опущен; все индексы пробегает значения 1, 2, 3; при этом приняты следующие обозначения: $\mathbf{V}$ — вектор скорости частицы, Φ — скалярный потенциал, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, ρ — плотность пространственного заряда, $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, a и U_0 — постоянные, имеющие размерности длины и скорости, соответственно, c — скорость света.

Предполагается, что действием собственного магнитного поля [8] и электрического поля, вызванного изменением во времени внешнего магнитного поля, можно пренебречь по сравнению с электрическими силами самосогласованного поля $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$.

Будем называть пучок регулярным, если для обобщенного импульса P имеет место условие [9]

$$e^{ikl} \frac{\partial P_i}{\partial x^k} = 0 \quad (P_i = v_i + A_i) \quad (1.3)$$

Учитывая (1.3), имеем для регулярных пучков вместо уравнений движения

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{2} g_{kl} v^k v^l - \Phi \right) = 0, \quad H^l = \frac{1}{Vg} e^{ikl} \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \quad (1.4)$$

Таким образом, регулярный пучок описывается уравнениями (1.2), (1.4). Внешние магнитные поля, которые могут быть реализованы без специальных поддерживающих устройств в пучке, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (Vg g^{ik} H_k) = 0, \quad e^{ikl} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} = 0 \quad (1.5)$$

Уравнения регулярного пучка (1.2), (1.4) могут быть сведены к единственному уравнению относительно W — действия, отнесенного к массе частицы. Уравнения (1.3) позволяют записать

$$v_i = \frac{\partial W}{\partial x^i} - A_i$$

Далее, используя (1.2), (1.4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[Vg g^{lm} \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - A_i \right) \left(\frac{\partial W}{\partial x^k} - A_k \right) \right] - \frac{\partial A_m}{\partial t} \right) \right] + \right. \\ \left. + g^{lp} \left(\frac{\partial W}{\partial x^p} - A_p \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \left[Vg g^{jn} \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - A_i \right) \left(\frac{\partial W}{\partial x^k} - A_k \right) \right] - \frac{\partial A_n}{\partial t} \right) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

В работе [10] уравнение (1.6) было выписано для случая однородного магнитного поля в терминах оператора ∇ . По сути дела это уравнение [10] описывает плоский пучок, ибо регулярное течение в однородном магнитном поле не может быть пространственным. Действительно, не ограничивая общности, можно считать, что однородное магнитное поле направлено по оси z . Если течение трехмерно, $w \neq 0$, то существует z -компонента электрического поля

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Следовательно, эквипотенциальные поверхности не могут быть цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси z . Отсюда на поверхностях $\Phi = \text{const}$ имеется нормальная компонента магнитного поля, т. е. пучок не является регулярным. Предполагалось, что частицы покидают эмиттер с нулевой скоростью.

Как будет показано ниже, среди нестационарных течений, описываемых Н-решениями, электростатические течения ($H = 0$) занимают, с групповой точки зрения, гораздо более важное место, чем в стационарных пучках. Уравнение (1.6) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[Vg g^{lm} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial W}{\partial x^i} \frac{\partial W}{\partial x^k} \right) \right] + \right. \\ \left. + g^{lp} \frac{\partial W}{\partial x^p} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[Vg g^{jn} \frac{\partial}{\partial x^n} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial W}{\partial x^i} \frac{\partial W}{\partial x^k} \right) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Все параметры потока могут быть выражены через действие W . Для потенциала, плотности пространственного заряда, физических компонент скорости, напряженности поля и плотности тока имеем

соответственно следующие формулы (h — фиксирующий индекс):

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial W}{\partial x^i} \frac{\partial W}{\partial x^k} \\ \rho &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\sqrt{g} g^{jl} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial W}{\partial x^i} \frac{\partial W}{\partial x^k} \right) \right] \\ V_h &= \frac{1}{\sqrt{g_{hh}}} \frac{\partial W}{\partial x^h}, \quad E_h = \frac{1}{\sqrt{g_{hh}}} \frac{\partial}{\partial x^h} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial W}{\partial x^i} \frac{\partial W}{\partial x^k} \right) \\ J_h &= \frac{1}{\sqrt{g_{hh}g}} \frac{\partial W}{\partial x^h} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\sqrt{g} g^{jl} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial W}{\partial x^i} \frac{\partial W}{\partial x^k} \right) \right]\end{aligned} \quad (1.8)$$

Видно, что (1.7), (1.8) при $\partial/\partial t \rightarrow 0$ переходят в соответствующие выражения для стационарных пучков [6]. Уравнение для действия в стационарном случае приводилось в работах [11, 12].

В работе [7] было показано, что инвариантно-групповые решения получаются лишь в четырех ортогональных системах координат: декартовой x, y, z ; цилиндрической R, ψ, z ; спиральной цилиндрической q_1, q_2, z ; сферической r, θ, ψ . Декартова и цилиндрическая системы координат являются предельными случаями спиральной цилиндрической системы координат [13, 6].

Утверждение о четырех координатных системах имеет следующий смысл. Пытаясь найти решения, удовлетворяющие определенным граничным условиям, обнаруживаем, что эти условия могут быть выполнены лишь на нескольких поверхностях. Естественно, что рассмотрение удобно вести в той системе координат, в которой эмиттирующая поверхность будет одной из координатных поверхностей. Так возникают четыре ортогональные системы координат, о которых говорилось выше. Для уравнений пучка эти системы координат выделены из всей бесконечной совокупности различных координатных систем.

Уравнение для действия в плоском случае в декартовых координатах:

$$\begin{aligned}& W_{2t2x} + W_{2t2y} + 2W_x(W_{t3x} + W_{tx2y}) + 2W_y(W_{t3y} + W_{t2xy}) + \\& + W_{tx}(W_{3x} + W_{x2y}) + W_{ty}(W_{3y} + W_{2xy}) + W_{2x}(3W_{t2x} + W_{t2y}) + \\& + W_{2y}(3W_{t2y} + W_{t2x}) + 4W_{xy}W_{txy} + W_x^2W_{4x} + W_y^2W_{4y} + \\& + 2W_xW_y(W_{3xy} + W_{x3y}) + (W_x^2 + W_y^2)W_{2x2y} + (4W_xW_{2x} + W_xW_{2y} + \\& + W_yW_{xy})W_{3x} + (4W_yW_{2y} + W_yW_{2x} + W_xW_{xy})W_{3y} + (3W_yW_{2x} + \\& + 5W_xW_{xy} + 2W_yW_{2y})W_{2xy} + (3W_xW_{2y} + 5W_yW_{xy} + 2W_xW_{2x})W_{x2y} + \\& + (W_{2x} + W_{2y})(W_{2x}^2 + 2W_{xy}^2 + W_{2y}^2) = 0\end{aligned} \quad (1.9)$$

($W_{t2xy} = \partial^4 W / \partial t \partial x^2 \partial y$ и т. д.)

§ 2. Групповые свойства уравнений пучка. Решение определяющих уравнений для координат инфинитезимальных операторов основной группы G_t уравнений пучка (S) при $H \neq 0$ показывает, что алгебра Ли основной группы порождается следующими линейно независимыми инфинитезимальными операторами:

$$\begin{aligned}X_1 &= t \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{r} \nabla - 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \mathbf{H} \nabla_n \\ X_2 &= -t \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla_v + 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{H} \nabla_n \\ X_3 &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v} - H_y \frac{\partial}{\partial H_x} + H_x \frac{\partial}{\partial H_y} \\ X_4 &= -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z} - w \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial w} - H_z \frac{\partial}{\partial H_x} + H_x \frac{\partial}{\partial H_z} \\ X_5 &= -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} - w \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial w} - H_z \frac{\partial}{\partial H_y} + H_y \frac{\partial}{\partial H_z} \\ X_6 &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_7 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_8 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_9 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_{10} = S(t) \frac{\partial}{\partial \varphi}\end{aligned} \quad (2.1)$$

В электростатическом случае группа G_t оказывается более широкой. К операторам (2.1), в которых следует положить $\mathbf{H} = 0$, добавятся следующие операторы

$$(G_t) \quad \begin{aligned} X_{11} &= f(t) \frac{\partial}{\partial x} + f'(t) \frac{\partial}{\partial u} + f''(t) x \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ X_{12} &= g(t) \frac{\partial}{\partial y} + g'(t) \frac{\partial}{\partial v} + g''(t) y \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ X_{13} &= h(t) \frac{\partial}{\partial z} + h'(t) \frac{\partial}{\partial w} + h''(t) z \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\nabla, \nabla_v, \nabla_u$ — операторы Гамильтона в пространстве координат, скоростей и компонент магнитного поля, соответственно; S, f, g, h — произвольные функции времени; штрих означает дифференцирование по t .

Интересно, что основную группу (2.1) уравнений пучка во внешнем магнитном поле можно получить без решения определяющих уравнений на основании приводимых ниже соображений. Основная группа уравнений трехмерного стационарного пучка G известна [7]. Ее составляют следующие преобразования, сохраняющие уравнения пучка: растяжение координат, плотности пространственного заряда и магнитного поля; растяжение скорости, потенциала, плотности пространственного заряда и магнитного поля; поворот на одинаковый угол в одной из плоскостей координатного пространства x, y, z и соответствующих ей плоскостей пространства скоростей u, v, w и пространства компонент магнитного поля H_x, H_y, H_z ; переносы вдоль осей x, y, z ; добавление к потенциалу постоянного слагаемого.

Если обозначить основную группу нестационарного пучка через G_t , то ясно, что $G_t \rightarrow G$ при $\partial / \partial t \rightarrow 0$. Установить операторы растяжения, принадлежащие G_t и соответствующие указанным операторам основной группы G , не составляет труда. Это операторы X_1 и X_2 в (2.1). Повороты X_3, X_4, X_5 , являясь чисто пространственными преобразованиями, не зависят от времени и без изменения входят в G_t . То же относится к трансляциям вдоль координатных осей X_6, X_7, X_8 . К ним добавляется преобразование, состоящее в изменении начала отсчета времени X_9 . Прибавление к потенциалу постоянного слагаемого заменяется прибавлением произвольной функции от t — преобразование, выражающее свойство градиентной инвариантности.

Таким образом, каждый из операторов G нашел себе соответствие в G_t , и основная группа (2.1) построена.

Для плоских пучков основная группа G_t имеет вид

$$(G_t) \quad \begin{aligned} X_1 &= t \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{R} \nabla - 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - H \frac{\partial}{\partial H}, & X_4 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_5 &= \frac{\partial}{\partial y} \\ X_2 &= -t \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla_v + 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + H \frac{\partial}{\partial H} \\ X_3 &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v}, & X_6 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_7 &= S(t) \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.3)$$

В электростатическом случае добавляются операторы

$$(G_t) \quad \begin{aligned} X_8 &= f(t) \frac{\partial}{\partial x} + f'(t) \frac{\partial}{\partial u} + f''(t) x \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ X_9 &= g(t) \frac{\partial}{\partial y} + g'(t) \frac{\partial}{\partial v} + g''(t) y \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \mathbf{R} = \{x, y, 0\}, \\ \mathbf{V} = \{u, v, 0\}, \\ \mathbf{H} = \{0, 0, H\} \end{array} \right) \quad (2.4)$$

Операторам (2.3), (2.4) соответствуют следующие конечные преобразования, сохраняющие уравнения плоского нестационарного пучка:

1. Растяжение t, x, y, ρ и H
 $t' = a_1 t, \quad x' = a_1 x, \quad y' = a_1 y, \quad u' = u, \quad v' = v, \quad \varphi' = \varphi, \quad \rho' = a_1^{-2} \rho, \quad H' = a_1^{-1} H$
2. Растяжение t, u, v, φ, ρ и H
 $t' = a_2^{-1} t, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad u' = a_2 u, \quad v' = a_2 v, \quad \varphi' = a_2^2 \varphi, \quad \rho' = a_2^2 \rho, \quad H' = a_2 H$
3. Поворот на одинаковый угол в плоскости течения и в плоскости годографа
 $t' = t, \quad x' = x \cos a_3 - y \sin a_3, \quad y' = x \sin a_3 + y \cos a_3, \quad \varphi' = \varphi$
 $u' = u \cos a_3 - v \sin a_3, \quad v' = u \sin a_3 + v \cos a_3, \quad \rho' = \rho, \quad H' = H$

4. Перенос по оси x

$$t' = t, \quad x' = x + a_4, \quad y' = y, \quad u' = u, \quad v' = v, \quad \varphi' = \varphi, \quad \rho' = \rho, \quad H' = H$$

5. Перенос по оси y

$$t' = t, \quad x' = x, \quad y' = y + a_5, \quad u' = u, \quad v' = v, \quad \varphi' = \varphi, \quad \rho' = \rho, \quad H' = H$$

6. Изменение начала отсчета времени

$$t' = t + a_6, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad u' = u, \quad v' = v, \quad \varphi' = \varphi, \quad \rho' = \rho, \quad H' = H$$

7. Преобразование градиентной инвариантности

$$t' = t, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad u' = u, \quad v' = v, \quad \varphi' = \varphi + a_7 S(t), \quad \rho' = \rho, \quad H' = H$$

8. Преобразование вида

$$t' = t, \quad x' = x + a_8 f(t), \quad y' = y, \quad u' = u + a_8 f'(t), \quad v' = v, \quad \varphi' = \varphi + a_8 f''(t) x, \quad \rho' = \rho$$

9. Преобразование вида

$$t' = t, \quad x' = x, \quad y' = y + a_9 g(t), \quad u' = u, \quad v' = v + a_9 g'(t), \quad \varphi' = \varphi + a_9 g''(t) y, \quad \rho' = \rho$$

Частным случаем преобразований с операторами X_8, X_9 является преобразование Галилея. Для удобства придадим операторам X_7, X_8, X_9 с некоторыми частными функциями S, f, g самостоятельные обозначения

$$\begin{aligned} Y_7 &= \alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad Z_7 = \alpha e^{t/a} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad U_7 = \frac{\alpha}{t^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad V_7 = \alpha t^x \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ Y_8 &= t^x \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha}{t^4} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{t^2} x \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \quad \left(\chi = \frac{2\alpha-1}{1-\alpha} \right) \\ Z_8 &= e^{\alpha t} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial u} + \alpha^2 x \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad Y_9 = (\alpha t + \beta) \frac{\partial}{\partial y} + \alpha \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ниже подробно исследуются плоские течения. В этом случае возможно построение H -решений двух рангов: ранга 1 на двухпараметрических подгруппах и ранга 2 на однопараметрических подгруппах. Для построения всех существенно различных H -решений необходимо выписать все неподобные r -параметрические подгруппы (в нашем случае $r=1,2$), образующие оптимальные системы подгрупп. Вследствие появления при $H=0$ дополнительных операторов, оптимальные системы разобьются на три класса подгрупп. Первый класс составляют подгруппы, не подобные между собой при любом H ; второй класс — подгруппы, не подобные подгруппам первого класса лишь при $H \neq 0$; третий — подгруппы, построенные с использованием операторов X_8 и X_9 , имеющих место только при $H=0$.

Оптимальная система однопараметрических подгрупп

1-й класс	4°. $X_2 + aX_4$	2-й класс
1°. X_6	5°. $X_3 + aX_6$	8°. $X_5 + aX_4$
2°. X_4	6°. $X_1 + X_2 + aX_6$	3-й класс
3°. $X_1 + aX_2$	7°. $X_3 + aX_1 + bX_2$	9°. $X_7 + Y_9$

(2.6)

Оптимальная система двухпараметрических подгрупп

1-й класс		
1°. X_5, X_6	5°. $X_1 + aX_2, X_4$	9°. $X_3 + aX_2, X_1 + bX_4$
2°. $X_2 + aX_4, X_6$	6°. X_1, X_2	10°. $X_3 + aX_6, X_1 + X_2 + bX_6$
3°. $X_1 + aX_2, X_6$	7°. $X_2 + aX_4, X_5$	11°. $X_1 + X_2 + aX_6, X_5$
4°. $X_3 + aX_1 + bX_2, X_6$	8°. $X_3 + aX_1, X_2$	
2-й класс		
12°. $X_4 + aX_6, X_5$	14°. $X_4 + Z_7, X_1 + X_2 + aX_6$	(2.7)
13°. $X_4 + Y_7, X_5 + aX_6$	15°. $X_5 + U_7, X_2 + aX_4$	16°. $X_4 + V_7, X_1 + aX_2$
3-й класс		
17°. X_8, X_9	19°. $X_2 + aX_4, Y_8$	21°. $X_1 + X_2, X_8 + Y_9$
18°. $X_1 + aX_9, Y_8$	20°. $X_1 + X_2 + X_6, Z_8$	22°. $X_2 + aX_6, Y_8$

(a, b — произвольные постоянные)

В оптимальных системах подгрупп (2. 6), (2. 7) опущены подгруппы, по тем или иным причинам не приводящие к Н-решениям с $\rho \neq 0$.

§ 3. Инвариантно-групповые решения ранга 1. Первым четырем подгруппам системы (2. 7) соответствуют все существенно различные Н-решения, описывающие плоские стационарные течения [6]. Решения, построенные на оставшихся подгруппах, имеют вид, приведенный в таблице.

Таблица Н-решений ранга 1

Н-решения 1-го класса						
№№	Условия на a, b	ξ	V	Φ	ρ	H
5°1	$a \neq 0, a \neq 1$	$ty^a - 1$	$t^{-1}yJ_v$	$t^{-2}y^2J_4$	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$
5°2	$a = 0$	$t^{-1}y$	J_v	J_4	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$
5°3	$a = 1$	t	yJ_v	y^2J_4	J_5	J_n
6°		ψ	$t^{-1}RJ_v$	$t^{-2}R^2J_4$	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$
7°1	$a \neq 0$	$t^a e^x$	$t^{-1}J_v$	$t^{-2}J_4$	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$
7°2	$a = 0$	x	$t^{-1}J_v$	$t^{-2}J_4$	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$
8°1	$a = b_2/b_1$	q_1	$t^{-1}e^{b_2 q_2} J_v$	$t^{-2}e^{2b_2 q_2} J_4$	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$
8°2	$a = 0$	R	$t^{-1}J_v$	$t^{-2}J_4$	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$
9°1	$a = a', b = b'$	$\ln t + q_1$	$t^{-1}RJ_v$	$t^{-2}R^2J_4$	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$
9°2	$a \neq 0, b = 1$	$te^{a\psi}$	$t^{-1}RJ_v$	$t^{-2}R^2J_4$	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$
9°3	$a = 0, b = 1$	t	RJ_v	R^2J_4	J_5	J_n
9°4	$a = 0, b \neq 1$	$tR^b - 1$	$t^{-1}RJ_v$	$t^{-2}R^2J_4$	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$
9°5	$a = 0, b = 0$	$t^{-1}R$	J_v	J_4	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$
10°1	$a = a'', b = b''$	$q_1 - t$	RJ_v	R^2J_4	J_5	J_n
10°2	$a = 0, b \neq 0$	$b \ln R - t$	RJ_v	R^2J_4	J_5	J_n
10°3	$a \neq 0, b = 0$	$t - a\psi$	RJ_v	R^2J_4	J_5	J_n
11°	$a \neq 0$	$x^a e^{-t}$	xJ_v	x^2J_4	J_5	J_n

$$a' = a'' = -b_2/(b_1^2 + b_2^2), \quad b' = b'' + 1 = b_1/(b_1^2 + b_2^2) + 1$$

Н-решения 2-го класса ($\alpha \neq 0, H \neq 0$)

№№	Условия на a	ξ	V	Φ	ρ	H
12°	$a \neq 0$	$ax - t$	J_v	J_4	J_5	J_n
13°	$a \neq 0$	$ay - t$	J_v	$\alpha x + J_4$	J_5	J_n
14°	$a \neq 0$	$y^a e^{-t}$	yJ_v	$\alpha e^{t/a} x + y^2 J_4$	J_5	J_n
15°1	$a \neq 0$	$t^a e^x$	$t^{-1}J_v$	$t^{-2}(\alpha y + J_4)$	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$
15°2	$a = 0$	x	$t^{-1}J_v$	$t^{-2}(\alpha y + J_4)$	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$
16°1	$a \neq 0, a \neq 1$	$ty^a - 1$	$t^{-1}J_v$	$t^{-2}(\alpha x + tJ_4)$	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$
16°2	$a = 0$	$t^{-1}y$	J_v	$\alpha t^{-1}x + J_4$	$t^{-2}J_5$	$t^{-1}J_n$

$$\mu = a/(1-a), \quad v = (2a-1)/(1-a)$$

Н-решения 3-го класса ($H = 0$)						
№№	Условия на α, α, β	ξ	u	v	φ	ρ
17°		t	$\frac{f'x}{f} + J_1$	$\frac{g'y}{g} + J_2$	$\frac{f''x^2}{2f} + \frac{g''y^2}{2g}$	J_5
18°:1	$\alpha \neq 0$	$ty^{\alpha-1}$	$\frac{\alpha x + yJ_1}{t}$	$\frac{y}{t} J_2$	$\frac{\gamma x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2} J_4$	$\frac{1}{t^2} J_5$
18°:2	$\alpha = 0$ $\alpha \neq 0$	$\frac{y}{t}$	$\frac{\alpha x}{t} + J_1$	J_2	$\frac{\gamma x^2}{t^2} + J_4$	$\frac{1}{t^2} J_5$
18°:3	$\alpha = 1$ $\alpha \neq 0$	t	$\frac{\alpha x}{t} + yJ_1$	yJ_2	$\frac{\gamma x^2}{t^2} + y^2 J_4$	J_5
19°:1	$\alpha \neq 0$ $\alpha \neq 0$	y	$\frac{\alpha t^{-1} (a \ln t + x) + t^{-1} J_1}{t}$	$\frac{1}{t} J_2$	$\frac{\gamma x^2}{t^2} + \frac{1}{t^2} J_4$	$\frac{1}{t^2} J_5$
19°:2	$\alpha = 0$ $\alpha \neq 0$	y	$\frac{\alpha x + J_1}{t}$	$\frac{1}{t} J_2$	$\frac{\gamma x^2}{t^2} + \frac{1}{t^2} J_4$	$\frac{1}{t^2} J_5$
20°	$\alpha \neq 0$	ye^{-t}	$\alpha x + yJ_1$	yJ_2	$\frac{\alpha^2 x^2}{2} + y^2 J_4$	J_5
21°:1	$\alpha = 1$ $\beta = 0$	t	$\frac{f'f^{-1}x}{t} + (tx - fy)J_1$	$t^{-1}y + (tx - fy)J_2$	$\frac{1}{2}f''f^{-1}x^2 + (tx - fy)^2 J_4$	J_5
21°:2	$\alpha = 0$ $\beta = 1$	t	$\frac{f'f^{-1}x}{t} + (x - fy)J_1$	$(x - fy)J_2$	$\frac{1}{2}f''f^{-1}x^2 + (x - fy)^2 J_4$	J_5
22°	$\alpha \neq 0$ $\alpha \neq 0$	$t^{\alpha} e^y$	$\frac{\alpha x + J_1}{t}$	$\frac{1}{t} J_2$	$\frac{\gamma x^2}{t^2} + \frac{1}{t^2} J_4$	$\frac{1}{t^2} J_5$

$$\gamma = 1/2\alpha(\alpha - 1)$$

Здесь

$$J_v = \{J_1, J_2, 0\}, \quad J_n = \{0, 0, J_8\}$$

причем J_v, J_4, J_5, J_n являются функциями от ξ (см. третий столбец таблицы). Рассмотрим подробнее решения, представляющие наибольший интерес.

Заметим, что внешнее магнитное поле, удовлетворяющее уравнениям (1. 5), в плоском случае может быть только однородным. Кроме того, оно должно достаточно медленно меняться со временем.

5°:2. Система (S/H) для течения между параллельными плоскостями $y = \text{const}$ в магнитном поле $H = H_0/t$ сводится к уравнению

$$Y^3 Y''' + 4Y^2 Y' Y'' + Y Y'^3 + (H_0^2 - 1) Y Y' = H_0 \xi \quad (Y = v - \xi) \quad (3.1)$$

Штрих означает дифференцирование по $\xi = y/t$. Решить уравнение (3.1) в общем случае не удастся, однако можно указать его частное решение $Y = \xi$. Далее получаем

$$u = -\frac{2H_0 y}{t}, \quad v = \frac{2y}{t}, \quad \varphi = (1 + H_0^2) \frac{y^2}{t^2}, \quad \rho = \frac{2(1 + H_0^2)}{t^2}, \quad H = \frac{H_0}{t} \quad (3.2)$$

Решение (3. 2) описывает следующий процесс. В начальный момент $t = t_0$ между двумя параллельными плоскостями $y = 0$ и $y = y_2$ имеется пространственный заряд постоянной плотности, заданы поле скоростей и потенциал коллектора и приложено внешнее однородное магнитное поле. В дальнейшем потенциал коллектора убывает как $1/t^2$, магнитное поле — как $1/t$. Заряды постепенно уходят из межэлектродного пространства. Видно, что $u = v = 0$ при $y = 0$. В диоде, о котором идет речь, хотя и отсутствует ток эмиссии, имеет место режим полного пространственного

заряда $E(0)=0$. Частицы движутся по прямым $y = -x/H_0 + \text{const}$, наклон которых определяется внешним начальным магнитным полем.

Перейдем к рассмотрению соответствующего электростатического течения. Система (S/H) в этом случае имеет вид

$$[J_4' = (J_2 - \xi) J_2',] \quad (J_2 - \xi) J_4'' - J_4' = I_0, \quad J_4'' = J_5 \quad (3.3)$$

Здесь I_0 — постоянная интегрирования. Полагая

$$J_2 = J, \quad J - \xi = Y, \quad Y' = dY/d\xi = U, \quad \eta = \ln Y$$

приходим к уравнениям

$$Y(YU'' + Y'^2 - 1) = I_0, \quad dU^2/d\eta + 2U^2 = 2(1 + I_0 e^{-\eta}) \quad (3.4)$$

Двукратное интегрирование позволяет получить общее решение первого уравнения (3.4) в виде

$$\pm \xi + c = \sqrt{Y^2 + I_0 Y + b} - 2I_0 \ln 2 \sqrt{Y^2 + I_0 Y + b} \quad (3.5)$$

Установим, каким граничным условиям удовлетворяет полученное решение. Пусть сначала скорость на эмиттере ненулевая так же, как и поле

$$J(0) = Y(0) = v_0, \quad E(0) = \varepsilon_0 / t$$

Пользуясь выражениями (3.3) и решением (3.5) и задавая $JJ_5|_0 = j_0$, получаем уравнения для определения I_0, b, c

$$\varepsilon_0 = 1 \pm \sqrt{v_0^2 + I_0 v_0 + b} v_0^{-1}, \quad j_0 = \frac{1}{2} I_0 + v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + I_0 v_0 + b} \\ c = \sqrt{v_0^2 + I_0 v_0 + b} - 2I_0 \ln 2 \sqrt{v_0^2 + I_0 v_0 + b} \quad (3.6)$$

Дальнейшие выкладки проведем для $\varepsilon_0 = 0$. Формулы (3.6) примут вид

$$j_0 = \frac{1}{2} I_0 + v_0 \pm v_0, \quad I_0 v_0 + b = 0, \quad c = v_0 - 2I_0 \ln 2 v_0 \quad (3.7)$$

Выясним правило употребления знаков в левой части (3.5), считая для определенности, что частицы движутся в ускоряющем поле. Исходя из условия $J'(0) \geq 0$, получаем, что плюс имеет смысл при любых v_0 и $I_0 < \frac{1}{2}$; минус — при любых v_0 и $I_0 > \frac{1}{2}$; при $I_0 = \frac{1}{2}$ берется плюс; для $I_0 < \frac{1}{2}$ и $I_0 > \frac{1}{2}$ знаки минус и плюс, соответственно, употребляются, если выполнены неравенства

$$\frac{2v_0^2}{(2v_0 + I_0)(1 - 2I_0)} \leq 1 \quad \left(I_0 < \frac{1}{2}\right); \quad \frac{2v_0^2}{(2v_0 + I_0)(2I_0 - 1)} \leq 1 \quad \left(I_0 > \frac{1}{2}\right)$$

Разрешая (3.7), получаем, что при знаке плюс в левой части (3.5)

$$I_0 = 2(j_0 - 2v_0), \quad b = -2v_0(j_0 - 2v_0), \quad c = v_0 - 4(j_0 - 2v_0) \ln 2 v_0$$

Если же берется минус, то

$$I_0 = 2j_0, \quad b = -2v_0 j_0, \quad c = v_0 - 4j_0 \ln 2 v_0$$

Пусть теперь эмиссия идет с нулевой начальной скоростью. Заметим, что b может обращаться в нуль лишь одновременно с I_0 , иначе решение не будет иметь смысла. Можно показать, рассматривая решение в окрестности $\xi = 0$, что, предполагая одновременно $I_0 \neq 0, v_0 = 0$, приходим к противоречию: получаем $I_0 = 0$. Таким образом, при $\xi = 0$ следует считать, что сумма тока эмиссии и тока смещения равна нулю. Интересным, по-видимому, является случай ненулевого тока эмиссии. Тогда при $\xi = 0$ имеем $v = 0, \rho = \infty, b = c^2$. Рассматривая решение в окрестности $\xi = 0$, получим,

что оно удовлетворяет следующим граничным условиям

$$\xi = 0, \quad v_0 = 0, \quad \rho_0 = \infty, \quad E_0 = C/t, \quad j_0 = C/t^2 \quad (C = |c|)$$

Здесь $C \neq 0$, поэтому эмиссия не ограничена пространственным зарядом.

5°.3. Как следует из таблицы, это решение описывает некие процессы между параллельными плоскостями $y = \text{const}$. Рассмотрим сначала течение в однородном магнитном поле H_0 . Система (S/H) имеет вид

$$J_1' + J_1 J_2 = H_0 J_2, \quad J_2' + J_2^2 = 2J_4 - H_0 J_1, \quad J_5' + J_2 J_5 = 0, \quad 2J_4 = J_5 \quad (3.8)$$

Исключая J_2, J_4, J_5 и полагая

$$U = H_0 - J_1, \quad Y = z^2, \quad U' = z \neq 0, \quad \eta = \ln U$$

приходим к следующим уравнениям относительно U и Y

$$U^2 \frac{d^3 U}{dt^3} - 6U \frac{dU}{dt} \frac{d^2 U}{dt^2} + 6 \left(\frac{dU}{dt} \right)^3 + H_0^2 U^2 \frac{dU}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{d\eta^2} - 7 \frac{dY}{d\eta} + 6Y = -H_0^2 e^{2\eta} \quad (3.9)$$

Следовательно, общее решение первого из уравнений (3.9) имеет вид

$$\pm \int (AU^6 + BU + H_0^2 U^2 / 4)^{-1/2} dU = t + C \quad (3.10)$$

(A, B, C — постоянные интегрирования)

Оба знака в (3.10) могут иметь смысл. Из условия $du/dt > 0$, естественного для частиц с нулевой скоростью эмиссии, получим, что при $H_0 > 0$ для знака плюс должно выполняться неравенство $J_1(t) > H_0$, для знака минус — $J_1(t) < H_0$.

Легко видеть, что, кроме общего решения (3.10), существует особое решение системы (3.8), для которого $J_1 = H_0$.

Решение системы (3.8) в этом случае сводится к решению уравнения

$$J'' + 3JJ' + J^3 + H_0^2 J = 0 \quad (J = J_2) \quad (3.11)$$

Заметим, что электростатическое течение вида 5°.3 описывается уравнением (3.11) при $H_0 = 0$. Уравнение (3.11) может быть преобразовано к виду

$$2z \frac{dz}{d\eta} + 3z + \eta = 0 \quad (J' = z, J^2 + H_0^2 = \eta) \quad (3.12)$$

Введем новую, неизвестную пока, независимую переменную ξ , считая, что $z = d\eta/d\xi$. Теперь уравнение (3.12) становится линейным относительно η

$$2 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + 3 \frac{d\eta}{d\xi} + \eta = 0, \quad \eta = Ae^{-\xi} + Be^{-\xi/2} \quad (3.13)$$

Решение уравнения (3.12) дается выражением

$$z(\eta) = -(\gamma^2 + \eta \mp \gamma \sqrt{\gamma^2 + \eta}) \quad (\gamma = 1/2 B / \sqrt{A}) \quad (3.14)$$

Учитывая, что $z = dJ/dt$, получаем общее решение уравнения (3.11) в виде

$$J = H_0 \frac{\cos(H_0 t + \varepsilon)}{\kappa + \sin(H_0 t + \varepsilon)} \quad (|\kappa| = |\gamma/\alpha| < 1, \alpha^2 = \gamma^2 + H_0^2)$$

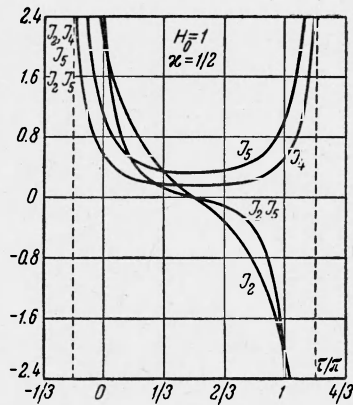
$$J = \frac{2\gamma(\gamma t - \beta)}{1 - (\gamma t - \beta)^2} \quad (\alpha = \gamma)$$

Таким образом, особое решение системы (S/H) при $H_0 \neq 0$ имеет вид

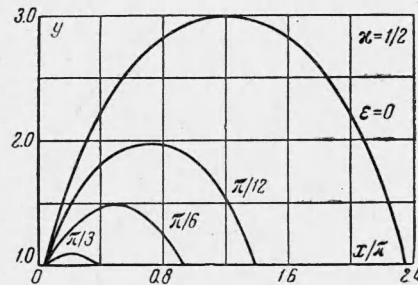
$$u = H_0 y, \quad v = H_0 \frac{\cos \tau}{\kappa + \sin \tau} y, \quad \varphi = \frac{\kappa H_0^2}{2(\kappa + \sin \tau)} y^2, \quad \rho = \frac{\kappa H_0^2}{\kappa + \sin \tau}, \quad H = H_0 \quad (3.15)$$

$$(\tau = H_0 t + \varepsilon; \varepsilon, \kappa, \gamma, \beta - \text{произвольные постоянные})$$

Функции $J_2, J_4, J_5, J_2 J_5$ представлены на фиг. 1. Решение (3.15) — периодическое с периодом $T = 2\pi / H_0$, но в точках, где $\sin \tau = -\kappa$, терпит разрыв. При фиксированных H_0 и κ изменением ε можно сопоставлять начальному моменту времени $t = 0$ различные $\tau_0 = \varepsilon$. При фиксированных H_0 и ε различным значениям κ соответствует различная начальная плотность пространственного заряда.



Фиг. 1



Фиг. 2

Траектории частиц $x = x(t)$, $y = y(t)$; $y = y(x)$ (фиг. 2) определяются уравнениями

$$x - x_0 = y_0 (\kappa \tau + \cos \tau), \quad y = y_0 (\kappa + \sin \tau) \quad (3.16)$$

$$x - x_0 = y_0 [\kappa \arcsin (y / y_0 - \kappa) \mp \sqrt{1 - (y / y_0 - \kappa)^2}] \quad (3.17)$$

Если потребовать, чтобы частицы эмиттировались с плоскости $y = 0$, то будем иметь $j_y(0, \tau_0) = \infty$, что, очевидно, не имеет смысла. Рассмотрим поэтому течение между двумя параллельными плоскостями $y = y_1 \neq 0$ и $y = y_2 \neq 0$ на интервале $0 \leq \tau \leq \pi$. В начальный момент $t = 0$ между электродами имеется однородное распределение пространственного заряда, движущегося со скоростью $V = \{H_0 y, H_0 y / \kappa\}$, приложено начальное ускоряющее напряжение и с эмиттера вводится начальный ток в соответствии с фиг. 1. В качестве коллектора выберем плоскость $y = y_2$, на которой $v = 0$ для частицы, стартующей при $\tau = 0$ с эмиттера $y = y_1$. Из (3.16) находим, что

$$y_0 = \frac{y_1}{\kappa + \sin \varepsilon}, \quad y_* = y_0 (\kappa + 1) = \frac{y_1 (\kappa + 1)}{\kappa + \sin \varepsilon}, \quad y_2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa} y_1 \quad (3.18)$$

Через y_* здесь обозначена плоскость, в которой поворачивает частица, покинувшая эмиттер в момент $\tau = \varepsilon$. Видно, что расстояние, на котором осуществляется поворот такой частицы, не зависит от магнитного поля. Это понятно, если учесть, что $v \sim H_0$. Время пролета от y_1 до y_*

$$t_* = \frac{1/2\pi - \varepsilon}{H_0} \quad (3.19)$$

тем меньше, чем сильнее магнитное поле. С течением времени (фиг. 1) заряды, находившиеся при $t = 0$ между y_1 и y_2 , уходят на коллектор, плотность пространственного заряда уменьшается, падает ток; одновременно уменьшается потенциал коллектора. Потенциал отсчитываем от плоскости $y = y_1$, преобразовав его выражение в (3.15) при помощи градиентной инвариантности к виду

$$\varphi = \frac{\kappa H_0^2 (y^2 - y_1^2)}{2(\kappa + \sin \tau)}$$

При $\tau = 1/2\pi$ между электродами остаются лишь заряды, эмиттированные за время от $\tau = 0$ до $\tau = 1/2\pi$, причем в этот момент они движутся параллельно электродам. Потенциал коллектора и плотность пространственного заряда при $\tau = 1/2\pi$ минимальны, $j_y = 0$. Далее j_y меняет знак и постепенно увеличивается вместе с ρ и φ_k . Изменение знака j_y вызвано двумя факторами. Во-первых, возвращаются частицы, эмиттированные с $y = y_1$ на интервале $0 \leq \tau \leq 1/2\pi$. При этом частица, покинувшая эмиттер при $\tau_1 > 0$, опережает частицу, стартовавшую в момент $\tau = 0$, на τ_1 . Итак, первыми на эмиттер возвращаются частицы с наименьшими нормальными скоростями. Во-вторых, начинается эмиссия с плоскости $y = y_2$. К моменту $\tau = \pi$ в диоде восстанавливается состояние $\tau = 0$ с той только разницей, что частицы движутся в противоположном направлении. На интервале $\pi + \delta < \tau < 2\pi - \delta$ решение не имеет смысла, ибо при этом $\rho < 0$; здесь $\delta = -\arcsin \kappa$.

В электростатическом случае решение имеет вид

$$v = \frac{2\gamma\tau}{1-\tau^2}y, \quad \varphi = \gamma^2 \frac{1+3\tau^2}{(1-\tau^2)^2}y^2, \quad \rho = 2\gamma^2 \frac{1+3\tau^2}{(1-\tau^2)^2}, \quad (\tau = \gamma t - \beta) \quad (3.20)$$

Функции J_2 , J_4 и J_5 изображены на фиг. 3. Величины γ и β определяют τ_0 и начальное значение плотности ρ_0 . Решение в интервале $-1 + \delta \leq \tau \leq 1 + \delta$ описывает режим, в котором эмиттирует сначала правая плоскость $y = y_2$, затем левая $y = y_1$; величина δ определяется требованием нерелятивистских скоростей. Решение (3.20) при $\tau > 1$ и $\tau < -1$ физически тождественно. С течением времени пространство между электродами освобождается от зарядов. По той же причине, что и выше, $y_1, y_2 \neq 0$. Время пролета

$$\tau_* = |1 - \tau_0^2| \sqrt{y_2/y_1 - 1} \quad (3.21)$$

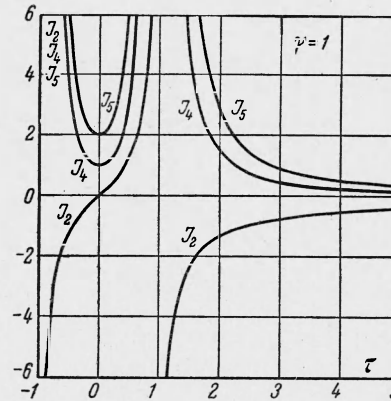
6°. Это решение описывает течение с полуплоскости $\psi = 0$. Коллектором может быть как эквипотенциаль

$$R = [\varphi_0 / J_4(\psi)]^{1/2}$$

где φ_0 — начальное значение потенциала коллектора, так и полуплоскость $\psi = \text{const}$, потенциал на которой меняется в соответствии с выражением

$$\varphi = J_4(\psi_k) R^2 / t^2$$

Такой коллектор может быть выполнен в виде отдельных изолированных пластин. При $t \rightarrow \infty$ уменьшается потенциал коллектора $\varphi_k = \varphi_0 / t^2$ и ток эмиссии, $\rho \rightarrow 0$. Можно показать, что регулярный



Фиг. 3

пучок этого вида может быть только электростатическим и что однокомпонентные регулярные течения невозможны. Для электростатического течения действие имеет вид

$$W = \frac{R^2}{t} J(\psi) \quad (3.22)$$

7°.2. Решение вида 7°.1 описывает некоторые процессы между параллельными плоскостями. Получить решение в конечном виде удастся для электростатического течения при $a = 0$. Система ($S \neq H$) в этом случае содержит три уравнения

$$JJ' - J = J_4', \quad JJ_5 - 2J_4' = I_0, \quad J_4'' = J_5 \quad (J = J_1) \quad (3.23)$$

(I_0 — постоянная интегрирования)

Исключая J_4, J_5 , получим для J уравнение

$$J^2 J'' + JJ'^2 - 3JJ' + 2J = I_0 \quad (3.24)$$

Полагая теперь

$$JJ' = z, \quad I_0 - 2J = \eta$$

приходим к уравнению (3.12). Учитывая (3.14), получим решение уравнения (3.24) в виде

$$\gamma \sqrt{\gamma^2 + I_0 - 2J} + J + I_0 \ln |\sqrt{\gamma^2 + I_0 - 2J} + \gamma| = x + \beta \quad (3.25)$$

Если начальная скорость при $x = 0$ отлична от нуля, то это решение описывает эмиссию с ненулевой начальной скоростью в тормозящем ($\sigma > 0$) или ускоряющем ($\sigma < 0$) поле с плоскости $x = 0$

$$\sigma = \frac{V\alpha(V\alpha + \gamma)}{2v_0}, \quad \alpha = \gamma^2 + I_0 - 2v_0$$

В начальный момент в диоде имеется некоторое неоднородное распределение пространственного заряда и некоторое поле скоростей. С эмиттера вводится ток $j_0 = \sigma(1 + \sigma)v_0$. С течением времени все градиенты стремятся к нулю. Если $J(0) = 0$, то, рассматривая решение при малых x , можно показать, что к плоскости $x = 0$ частицы подходят справа, двигаясь в тормозящем поле, и в этой плоскости их скорость падает до нуля.

8°.1. Решение такого вида описывает течение со спирали $q_1 = \text{const}$. Коллектором будет кривая, определяемая уравнением

$$q_2 = (2b_2)^{-1} \ln[\Phi_0/J_4(q_1)]$$

Потенциал на нем меняется по закону: $\Phi_k = \Phi_0/t^2$. При $t \rightarrow \infty$ все градиенты стремятся к нулю, диод освобождается от зарядов. Регулярный пучок может быть только электростатическим. Действие в этом случае имеет вид

$$W = \frac{e^{2b_2 q_2}}{t} J(q_1) \quad (3.26)$$

8°.2. Это решение описывает некоторые процессы в цилиндрическом диоде. Регулярное течение может быть только электростатическим. Действие имеет вид

$$W = \frac{1}{t} J(R) \quad (3.27)$$

9°.3. Рассмотрим электростатическое течение этого вида. Система S/H для него такова

$$J' + J^2 = 2J_4, \quad J_5' + 2JJ_5 = 0, \quad 4J_4 = J_5 \quad (J = J_1) \quad (3.28)$$

Исключая J_4, J_5 , получим относительно J уравнение

$$J'' + 4JJ' + 2J^3 = 0 \quad (3.29)$$

Его можно преобразовать к уравнению вида (3.12), полагая $J' = z$, $\eta = 1/2 J^2$, а затем, вводя неизвестную пока функцию времени $\zeta(t)$ при помощи соотношения $z = d\eta/d\zeta$, — к линейному уравнению относительно η

$$\frac{d^2\eta}{d\zeta^2} + 4\frac{d\eta}{d\zeta} + 4\eta = 0, \quad \eta = \frac{1}{2} J^2 = (A\zeta + B) e^{-2\zeta} \quad (3.30)$$

Заметим, что

$$z = \frac{dJ}{dt} = \frac{d\eta}{d\zeta} = J \frac{dJ}{d\zeta}, \quad J = \frac{d\zeta}{dt} \quad (3.31)$$

Таким образом, зависимость $\zeta = \zeta(t)$ определяется выражением

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{e^{\zeta} d\zeta}{\sqrt{A\zeta + B}} = \frac{\sqrt{2} \exp(-B/A)}{A} \int \exp(u^2/A) du \quad (u = \sqrt{A\zeta + B}) \quad (3.32)$$

Нетрудно выяснить смысл новой переменной $\zeta(t)$

$$v_R = RJ(t) = \frac{dR}{dt}, \quad J(t) = \frac{d \ln R(t)}{dt} = \frac{d\zeta}{dt}$$

Следовательно, $\zeta = \ln R(t)$. Из соотношений (3.30) видно, что $J, J' \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$, значит при этом и $\varphi, \rho \rightarrow 0$. С другой стороны, при $\zeta = -B/A$ ($u = 0$) скорость также нулевая. Для определения одной из произвольных постоянных зададим скорость в момент времени, соответствующий $\zeta = 0$

$$J|_{\zeta=0} = v_0 = \sqrt{2B}$$

Раскладывая подынтегральную функцию в (3.32) в ряд при малых u , получим, что

$$J_5 = 2A \exp(2B/A) = \rho_0$$

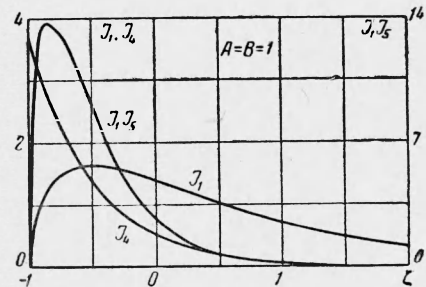
Так как $\rho_0 > 0$, то $A > 0$. При $A < 0$ интеграл в (3.32) может быть сведен к интегралу вероятности, и тогда при изменении u в интервале $0 \leq u < \infty$ или $-B/A \leq \eta < \infty$ время t оставалось бы конечным. При положительном A интеграл расходится, следовательно, t меняется от нуля до бесконечности.

Выясним смысл полученного решения. Пользуясь градиентной инвариантностью, берем потенциал в виде

$$\varphi = (R^2 - R_1^2) J_4(t) \quad (3.33)$$

В цилиндрическом диоде $R_1 \leq R \leq R_2$ поле на эмиттере $E_R = 2R_1 J_4(t)$ меняется со временем. В начальный момент $t = 0$ приложена некоторая разность потенциалов $\varphi_0 = \rho_0/2$ и пространство между электродами заполнено однородно распределенным пространственным зарядом плотности ρ_0 . Ток эмиссии и скорость в начальный момент $t = 0$ равны нулю. В дальнейшем v_R и j_R для каждого фиксированного R увеличиваются, проходят через максимум, и при $t \rightarrow \infty$ снова стремятся к нулю (фиг. 4). При $A = B = 1$ (фиг. 4) время t выражается через ζ следующим образом

$$t = \frac{\sqrt{2}}{e} \int_0^{\sqrt{\zeta+1}} \exp u^2 du$$



Фиг. 4

Распределение пространственного заряда в любой момент времени однородно. Ток достигает своего максимального значения j_m ранее, чем скорость (v_m). Соответствующие моменты времени t_v и t_j , а также v_m и j_m даются выражениями

$$t_v = \frac{\sqrt{2} e^{-B/A}}{A} \int_0^{u_v} \exp(u^2 / A) du \quad \left(\frac{dJ}{dt} = 0 : \zeta_v = \frac{1}{2} - \frac{B}{A}, u_v = \sqrt{\frac{A}{2}} \right)$$

$$t_j = \frac{\sqrt{2} e^{-B/A}}{A} \int_0^{u_j} \exp(u^2 / A) du \quad \left(\frac{dJJ_3}{dt} = 0 : \zeta_j = \frac{1}{8} - \frac{B}{A}, u_j = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{2}} \right) \quad (3.34)$$

$$v_m = \sqrt{A} \exp\left(\frac{B}{A} - \frac{1}{2}\right) R, \quad j_m = \sqrt{A} \exp\left[3\left(\frac{B}{A} - \frac{1}{8}\right)\right] R$$

Решения вида 9°.4, 9°.5 и 10°.2 описывают некие нестационарные процессы в цилиндрическом диоде, решение вида 11° — между параллельными плоскостями. Оставшиеся Н-решения первого класса можно трактовать как различного вида волны постоянной плотности.

9°.1 — спиральные волны $q_1 = \text{const}$, распространяющиеся со скоростью $v_{q_1} = -\sqrt{b_1^2 + b_2^2} R / t$;

9°.2 — плоские волны $\psi = \text{const}$, вращающиеся со скоростью $v_\psi = -R / at$;

10°.1 — спиральные волны, скорость распространения которых $v_{q_1} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} R$ не зависит от времени;

10°.3 — плоские волны $\psi = \text{const}$, вращающиеся с постоянной угловой скоростью.

С точки зрения реализации полученных решений наибольший интерес представляют такие течения, эквипотенциальные поверхности в которых не деформируются со временем: на каждой такой поверхности лишь меняется значение потенциала. Среди Н-решений второго и третьего класса этим требованиям удовлетворяют решения вида 12°, 15°.2, 19°.1 и 19°.2. При фиксированном t потенциал постоянен на плоскостях $x = \text{const}$ для первого из этих решений, на поверхностях $\alpha y + J_4(x) = \text{const}$ для второго и на $\alpha(\alpha-1) x^2 / 2 + J_4(x) = \text{const}$ для двух последних.

17°. Решение системы (S/H) приводит к результату

$$u = \frac{a + f'x}{f}, \quad v = \frac{b + g'y}{g}, \quad \Phi = \frac{f''}{2f} x^2 + \frac{g''}{2g} y^2, \quad \rho = \frac{\rho_0}{fg} \quad (3.35)$$

Здесь a, b, ρ_0 — произвольные постоянные, f, g — произвольные функции, связанные, однако, соотношением

$$f''g + fg'' = \rho_0 \quad (f, g \neq 0) \quad (3.36)$$

Кривыми $\Phi = \text{const}$ в каждый момент времени являются какие-либо из кривых второго порядка: эллипсы или окружности при $f''g'' / fg > 0$; гиперболы при $f''g'' / fg < 0$. Кривые второго порядка будут эквипотенциалами и для решений вида 18°.3, 21°.1 и 21°.2.

При $g \equiv 0$ решение описывает течение в плоском диоде. Если в качестве одной из пластин выбрать плоскость $x = 0$, то на ней все время пространственный заряд будет компенсировать внешнее поле. Функция f в этом случае имеет вид

$$f = 1/2 \rho_0 t^2 + bt + c$$

Недеформирующиеся эллиптические ($f'' / f > 0, g'' / g > 0$) или гиперболические ($f''g'' / fg < 0$) цилиндры будут представлять семейство экви-

потенциальных поверхностей, если f и g удовлетворяют уравнениям

$$F_0 \left(\frac{1}{f''} \right)'' = \frac{G_0}{f}, \quad g = \frac{\rho_0 F_0}{F_0 + G_0} \frac{1}{f''} \quad \left(F_0 = \frac{f''(0)}{f(0)}, G_0 = \frac{g''(0)}{g(0)} \right)$$

Решение (3.35) описывает течение между коаксиальными круговыми цилиндрами, если

$$2f''g = \rho_0$$

В частности, при $f = g$ получаем

$$t = \frac{1}{\rho_0} e^{-\alpha/\rho_0} \left[\ln \Phi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Phi/\rho_0)^k}{k!} \right] \quad (\Phi = \sqrt{\rho_0 \ln f + \alpha}, \alpha = \text{const})$$

§ 4. Инвариантно-групповые решения ранга 2 могут быть построены на однопараметрических подгруппах оптимальной системы (2.6).

В работе [4] были приведены примеры Н-решений ранга 2, которые строятся на однопараметрических подгруппах, но определяются в конечном счете из системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом такие решения не являются инвариантными относительно какой-либо двухпараметрической подгруппы основной группы G исследуемой системы уравнений в частных производных (S) . Решения такого типа появляются в том случае, когда система (S/H) — система в частных производных с меньшим на единицу числом независимых переменных, чем в (S) , соответствующая некоторой однопараметрической подгруппе, — допускает преобразования, не входящие в основную группу G системы (S) . Если G' — основная группа системы (S/H) и $G \subset G'$, то Н-решения ранга 2 будут одновременно Н-решениями ранга 1 для некоторой двухпараметрической подгруппы группы G . Для системы уравнений пучка удастся получить Н-решения ранга 2, не являющиеся вместе с тем инвариантными решениями ранга 1.

Рассмотрим инвариантное решение, соответствующее подгруппе $H \langle X_8 \rangle$

$$u = \frac{f'}{f} x + P(y, t), \quad v = V(y, t), \quad \psi = \frac{f''}{2f} x^2 + \Phi(y, t), \quad \rho = \rho(y, t) \quad (4.1)$$

Система (S/H) для него имеет вид

$$(S/H) \quad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}, & U &= fP \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial QV}{\partial y} &= 0, & f \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + f'' &= Q, & Q &= f\rho \end{aligned} \quad (4.2)$$

Основная группа G_t' полученной системы, вне зависимости от вида функции $f(t) \neq \text{const}$, определяется линейно независимыми операторами

$$(G_t') \quad \begin{aligned} Y_1 &= y \frac{\partial}{\partial y} + V \frac{\partial}{\partial V} + 2\Phi \frac{\partial}{\partial \Phi}, & Y_2 &= F(t) \frac{\partial}{\partial y} + F'(t) \frac{\partial}{\partial V} + F''(t) y \frac{\partial}{\partial \Phi} \\ Y_3 &= K(U) \frac{\partial}{\partial U}, & Y_4 &= S(t) \frac{\partial}{\partial \Phi} \end{aligned} \quad (4.3)$$

(F, K, S — произвольные функции)

Операторам (4.3) соответствуют следующие конечные преобразования, сохраняющие уравнения (4.2):

1. Растяжение y, V, Φ

$$t' = t, \quad y' = a_1 y, \quad U' = U, \quad V' = a_1 V, \quad \Phi' = a_1^2 \Phi, \quad Q' = Q$$

2. Преобразование вида

$$t' = t, \quad y' = y + a_2 F(t), \quad U' = U, \quad V' = V + a_2 F'(t), \quad \Phi' = \Phi + a_2 F''(t) y, \quad Q' = Q$$

3. Преобразование U вида (T — произвольная функция)

$$t' = t, \quad y' = y, \quad U' = T(U), \quad V' = V, \quad \Phi' = \Phi, \quad Q' = Q$$

4. Преобразование градиентной инвариантности

$$t' = t, \quad y' = y, \quad U' = U, \quad V' = V, \quad \Phi' = \Phi + a_4 S(t), \quad Q' = Q$$

Оптимальная система однопараметрических подгрупп группы G_t' такова:

$$1^\circ. Y_2, \quad 2^\circ. Y_1 + Y_3 \quad (4.4)$$

Этим подгруппам соответствуют Н-решения вида

$$1^\circ. u = \frac{f'x}{f} + J_1(t), \quad v = \frac{F'y}{F} + J_2(t), \quad \varphi = \frac{f''x^2}{2f} + \frac{F''y^2}{2F}, \quad \rho = J_5(t) \quad (4.5)$$

$$2^\circ. u = \frac{f'x}{f} + \frac{L[yJ_1(t)]}{f}, \quad v = yJ_2(t), \quad \varphi = \frac{f''x^2}{2f} + y^2J_4(t), \quad \rho = J_5(t) \quad (4.6)$$

Видно, что решение (4.5) есть решение вида 17° , инвариантное относительно подгруппы $H \langle X_8, X_9 \rangle$. Решение (4.6) есть решение ранга 2, о котором говорилось выше. Оно содержит произвольную функцию L .

При $K(U) \equiv 0$, т. е. для подгруппы $H \langle Y_1 \rangle$ имеем вместо (4.6)

$$u = \frac{f'}{f}x + J_1(t), \quad v = yJ_2(t), \quad \varphi = \frac{f''}{2f}x^2 + y^2J_4(t), \quad \rho = J_5(t) \quad (4.7)$$

Эквипотенциальными поверхностями при $f''J_4/f > 0$ будут эллиптические или круговые цилиндры, при $f''J_4/f < 0$ — гиперболические цилиндры. Со временем эти поверхности деформируются. Операторы Y_1 и $Y_3 \in G_t$, чем и объясняется существование решений (4.6) и (4.7).

§ 5. Некоторые замечания о регулярных пучках. Согласно Габору [9], регулярным называется пучок, стартующий с эмиттера с нулевой скоростью. Утверждается, что для такого пучка в случае отсутствия нормальной компоненты магнитного поля на эмиттере имеет место соотношение (1.3). Ниже будет показано, что это верно лишь для стационарных пучков; при $\partial/\partial t \neq 0$ это, вообще говоря, не так.

[Выберем, следуя [9], направление нормали к катоду за ось x , магнитное поле H пусть будет направлено по оси z . Рассмотрим уравнение движения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\eta E_y + \frac{\eta}{c} u H$$

На поверхности катода

$$v = w = \partial v / \partial t = E_y = 0$$

Утверждается, что $v, w, \partial v / \partial t, E_y$ стремятся к нулю вблизи катода по крайней мере как x , в то время как члены, имеющие u в качестве множителя, убывают как $x^{1/2}$, если эмиссия ограничена пространственным зарядом.

Все это верно лишь для стационарных пучков. В нестационарном случае утверждать, что вблизи катода $u \sim x^{1/2}$ и $\partial v / \partial t \sim x$, неверно, так как эти оценки вытекают из дополнительной гипотезы о квазистационарности: в каждый момент времени течение близко к одномерному стационарному течению (вблизи катода течение всегда можно рассматривать как одномерное [14]), т. е. вблизи катода имеем

$$u = u(t) x^{2/3}, \quad v = v(t) x$$

Приведенное в § 3 аналитическое решение (3.2) для стекания пространственного заряда в плоском магнетроне подтверждает высказанную точку зрения. Тот факт, что ток эмиссии в (3.2) равен нулю, несуществен. Решение (3.2) получено, несмотря на то, что уравнения регулярного пучка приводят лишь к электростатическому решению вида $5^\circ.2$. Итак, в (3.2) при $x = 0$ (считаем для удобства $\xi = x/t$) имеем $u = v = E = 0$, однако течение не будет регулярным по Габору

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{2H_0x}{t^2}, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{4H_0x}{t^2}$$

Видно, что $\partial v / \partial t$ имеет вблизи $x = 0$ тот же порядок малости, что и $u \partial v / \partial x$, причем $u \sim x$, а не $x^{2/3}$.

Следовательно, условие (1.3) выполнено для стационарного пучка, если он покидает эмиттер, H_n на котором равно нулю, с нулевой скоростью. В нестационарном случае этих требований недостаточно. Необходимо еще предполагать квазистационарность течения. Такого рода пучки можно себе представить [15], но описываться они будут уравнениями в частных производных, не сводимых к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В данной работе под регулярным понимается пучок, для которого условие (1.3) выполнено.

§ 6. Некоторые замечания о пространственных нестационарных течениях. После того как найдена основная группа G_t уравнений пространственного пучка, получение всех существенно различных Н-решений не представляет принципиальных трудностей, но связано с громоздкими вычислениями. Укажем поэтому те пространственные Н-решения, которые описывают течения с недеформируемыми во времени эквипотенциалами и имеют наибольший интерес. Подробный анализ добавит к ним лишь некоторое число решений, соответствующих определенного вида пространственным волнам $\rho = \text{const}$.

Заметим, что все Н-решения первого и второго класса можно считать пространственными, если под $\mathbf{J}_v$, $\mathbf{J}_n$ понимать векторы, две первые компоненты которых не обращаются одновременно в нуль. Для инвариантных решений третьего класса также можно дать пространственные обобщения. Так, трехмерное решение, соответствующее плоскому решению вида 17° , получается на трехпараметрической подгруппе $\mathbf{H} \langle X_{11}, X_{12}, X_{13} \rangle$

$$u = \frac{a + f'x}{f}, \quad v = \frac{b + g'y}{g}, \quad w = \frac{c + h'z}{h}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{fgh}$$

$$\Phi = \frac{f''}{2f} x^2 + \frac{g''}{2g} y^2 + \frac{h''}{2h} z^2, \quad ghf'' + fhg'' + fgh'' = \rho_0 \quad (6.1)$$

(a, b, c, ρ_0 — произвольные постоянные)

Эквипотенциальными поверхностями для (6.1) могут быть эллипсоиды, сферы, гиперboloиды, конусы. Поверхности эти, однако, кроме сфер и конусов, вообще говоря, деформируются со временем.

1°. Для подгруппы $\mathbf{H} \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ инвариантное решение имеет вид

$$\mathbf{V} = \frac{r}{t} \mathbf{J}_v(\theta), \quad \Phi = \frac{r^2}{t^2} J_4(\theta), \quad \rho = \frac{4}{t^2} J_5(\theta), \quad \mathbf{H} = \frac{4}{t} \mathbf{J}_n(\theta) \quad (6.2)$$

Оно описывает течение в диоде с эмиттером $\theta = \text{const}$ и поверхностью вращения

$$r = \sqrt{\Phi_0 / J_4(\theta)}$$

в качестве коллектора; потенциал на нем меняется пропорционально $1/t^2$. Соответствующее течение может осуществляться в однородном магнитном поле, направленном по оси z [7] и убывающем как $1/t$. Такое поле реализуется без специальных поддерживающих устройств в пучке.

Регулярное течение с конического эмиттера возможно лишь при отсутствии магнитного поля. Траекториями при этом будут кривые, в плоскостях, проходящих через ось эмиттера ($v_\psi = 0$). Действие имеет вид

$$W = \frac{r^2}{t} J(\theta) \quad (6.3)$$

Можно показать, что при $\mathbf{H} = \{0, 0, H_0/t\}$ однокомпонентные течения вида (6.2) невозможны.

Последующие решения будут по сути электростатическими, так как радиальное магнитное поле при радиальном течении между сферическими электродами может не приниматься во внимание. Они могут описывать некоторые регулярные пучки.

2°. Для подгруппы $\mathbf{H} \langle X_2, X_3, X_4 \rangle$ инвариантное решение имеет вид

$$v_r = \frac{1}{t} J_1(r), \quad \Phi = \frac{1}{t^2} J_4(r), \quad \rho = \frac{4}{t^2} J_5(r); \quad W = \frac{1}{t} J(r) \quad (6.4)$$

3°. Для подгруппы $\mathbf{H} \langle X_1 + aX_2, X_3, X_4 \rangle$ получаем следующее инвариантное решение

$$v_r = \frac{r}{t} J_1(\xi), \quad \Phi = \frac{r^2}{t^2} J_4(\xi), \quad \rho = \frac{4}{t^2} J_5(\xi); \quad W = \frac{r^2}{t} J(\xi) \quad (\xi = tr^{a-1}) \quad (6.5)$$

При $a = 0$ решение (6.5) принимает вид

$$v_r = J_1\left(\frac{r}{t}\right), \quad \varphi = J_4\left(\frac{r}{t}\right), \quad \rho = \frac{1}{t^2} J_5\left(\frac{r}{t}\right); \quad W = rJ\left(\frac{r}{t}\right) \quad (6.6)$$

При $a = 1$ получаем вместо (6.5)

$$v_r = rJ_1(t), \quad \varphi = r^2 J_4(t), \quad \rho = J_5(t) \quad (6.7)$$

Решение удастся довести до конца; система $(S \neq H)$ для (6.7) такова

$$J' + J^2 = 2J_4, \quad J_5' + 3JJ_5 = 0, \quad 6J_4 = J_5 \quad (J = J_1) \quad (6.8)$$

Исключая J_4, J_5 , сведем систему (6.8) к следующему уравнению:

$$J'' + 5JJ' + 3J^3 = 0 \quad (6.9)$$

Действуя так же как в п. 9° 3, преобразуем это уравнение к линейному уравнению относительно η

$$\frac{d^2\eta}{d\zeta^2} + 5 \frac{d\eta}{d\zeta} + 6\eta = 0$$

$$\eta = Ae^{-3\zeta} + Be^{-2\zeta} \quad (6.10)$$

Из (6.10) имеем для J выражение

$$J = \sqrt{2(Ae^{-\zeta} + B)} e^{-\zeta} \quad (6.11)$$

С другой стороны, $J = d\zeta / dt$ на основании (3.31). Следовательно, зависимость ζ от t имеет вид

$$t = \frac{1}{B\sqrt{2}} \left[\sqrt{e^{\zeta}(A + Be^{\zeta})} - \frac{A}{\sqrt{B}} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{1}{B}(Ae^{-\zeta} + B)} \right] \quad (6.12)$$

Формулы (6.11), (6.12) дают искомое решение в параметрической форме. Характер течения, описываемого полученным решением (фиг. 5), такой же, как и в случае цилиндрического диода. При $e^{-\zeta} = -B/A$ и $\zeta = \infty$ скорость равна нулю. В некоторый момент времени она (для каждого фиксированного r) достигает максимума. Так же ведет себя ток j_r . Плотность пространственного заряда и потенциал меняются монотонно

$$J_5 = -3Ae^{-3\zeta} > 0$$

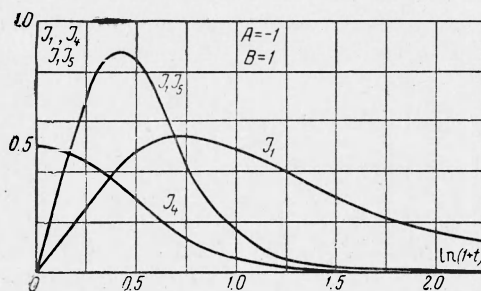
Отсюда $A < 0$ и $B > 0$. Моменты, когда скорость и ток максимальны (v_m, j_m), определяются формулами

$$t_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arth} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \frac{|A|}{B^{3/2}} \approx 1.07 \frac{|A|}{B^{3/2}} \quad \left(e^{-\zeta_v} = -\frac{2B}{3A} \right)$$

$$t_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{8} + \operatorname{arth} \frac{1}{3} \right) \frac{|A|}{B^{3/2}} \approx 0.52 \frac{|A|}{B^{3/2}} \quad \left(e^{-\zeta_j} = -\frac{8B}{9A} \right) \quad (6.13)$$

$$v_m = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{B^{3/2}}{|A|} r, \quad j_m = |A| \sqrt{2B} \left(\frac{8B}{9A} \right)^4 r$$

Получение решения уравнений пучка составляет лишь первую часть задачи. Для реализации течения, описываемого таким решением, необходимо рассмотреть вопрос о системах фокусирующих электродов, обеспечивающих существование пучка данной конфигурации. Решение этого вопроса сводится к задаче об аналитическом продолжении потенциала, заданного на границе пучка вместе со своей нормальной производной в область, свободную от зарядов, т. е. к задаче Коши для уравнения Лапласа. В работе [16] определены фокусирующие электроды для ленточного пучка, описывае-



Фиг. 5

мого решением Чайлда — Лэнгмюра [17]. В [18–21] метод [16] обобщен на случай криволинейных траекторий. Известно несколько решений задачи о фокусировке стационарных пучков [16, 20, 22, 6]. Вместе с тем в связи с неустойчивостью решения [21], затрудняющей численное интегрирование или разложение в ряды [23, 24], аналитические решения, помимо самостоятельного интереса, представляют ценность как эталоны при расчетах на электронных машинах и моделировании. Ниже определяются электроды для нескольких нестационарных пучков, рассмотренных в § 3.

§ 7. О системах фокусирующих электродов. Наибольший интерес с точки зрения простоты реализации представляют течения с недеформируемыми со временем эквипотенциалами и траекториями.

1°. Для электростатического течения (3.20) в плоском диоде $x_1 \leq x \leq x_2$ с однородным распределением пространственного заряда эквипотенциальные поверхности вне пучка определяются уравнениями

$$\Phi(x, y) = k(t)(x^2 - x_1^2 - y^2) = \text{const}$$

$$k(t) = \gamma^2(1 + 3\tau^2)/(1 - \tau^2)^2$$

$$y^2 = x^2 - x_1^2 \quad (\Phi = 0) \quad (7.1)$$

Таким образом, кривые $\Phi(x, y) = \text{const}$ суть гиперболы; нулевая эквипотенциаль подходит к границе пучка под прямым углом. Закон изменения потенциала со временем на поверхностях (7.1) дается выражением

$$\Phi = \Phi(t_0) k(t) / k(t_0)$$

Система фокусирующих электродов изображена на фиг. 6.

2°. Для электростатического течения в плоском диоде (3.23) — (3.25) решение уравнения (3.24) было получено в неявном виде $x = x(J)$. Определим прежде всего J_4 как функцию от J

$$\frac{dJ_4}{dx} = J' \frac{dJ_4}{dJ} = J(J' - 1), \quad \frac{dJ_4}{dJ} = J - \frac{J}{J'}$$

Учитывая, как JJ' выражается через J , имеем

$$J_4 = \frac{1}{2} J^2 - \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{4} (\alpha - 2J)^2 - \frac{\gamma}{3} (\alpha - 2J)^{3/2} - \frac{\alpha + I_0}{2} (\alpha - 2J) + \right. \\ \left. + \gamma (\alpha + I_0) (\alpha - 2J)^{1/2} + I_0^2 \ln |\gamma + (\alpha - 2J)^{1/2}| \right\} \quad (7.2)$$

Здесь $\beta = \gamma^2 + I_0$. Полагая теперь

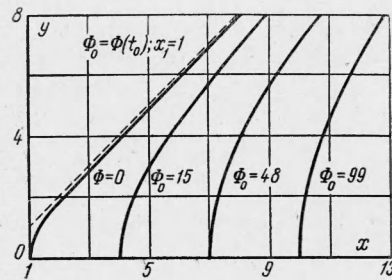
$$(\alpha - 2J)^{1/2} = p + iq, \quad J_4 = \Phi + i\Psi \quad (7.3)$$

заменяя x в (3.25) на $x + iy$ и выделив действительную и мнимую части, приходим к параметрическим уравнениям эквипотенциальных поверхностей

$$8\Phi = \alpha^2 - \gamma^2 I_0^2 - 2\gamma (\alpha + I_0 + I_0^2) p - (\gamma^2 + I_0^2) p^2 + \\ + (\gamma^2 - I_0^2) q^2 + 2\gamma / 3 \cdot p (p^2 - q^2) - 3p^2 q^2 + (p^4 + q^4) / 2 \quad (7.4)$$

$$x + \beta = (\alpha + \gamma^2 I_0) / 2 + 2\gamma p + [(I_0 - 1) p^2 + (I_0 + 1) q^2] / 2 \\ y = (\gamma - p) q + I_0 \arctg \frac{q}{\gamma + p} \quad (7.5)$$

Для того чтобы получить эквипотенциальные поверхности $\Phi(x, y) = \text{const}$, необходимо, задавая различные $\Phi = \Phi_0$, построить кривые $\Phi(p, q) = \text{const}$ в плоскости p, q , а затем по формулам (7.5) перенести их в плоскость xy . Потенциал на поверхностях $\Phi(x, y) = \text{const}$ меняется как $1/t^2$.



Фиг. 6

3°. Для электростатического течения с однородным распределением пространственного заряда в цилиндрическом диоде (3.28) — (3.32) уравнения фокусирующих электродов имеют вид

$$\Phi(R, \psi) = J_4(t) [R^2 \cos 2(\psi - \psi_i) - R_1^2] = \text{const} \quad (7.6)$$

$$(R/R_1)^2 = \sec 2(\psi - \psi_i) \quad (\Phi = 0)$$

Здесь R_1 — радиус эмиттера, $\psi = \psi_i$ ($i = 1, 2$) — уравнение границ пучка. Нулевая эквипотенциаль подходит к границам пучка под углом в 90° . Закон изменения потенциала на поверхностях (7.6) задается выражением

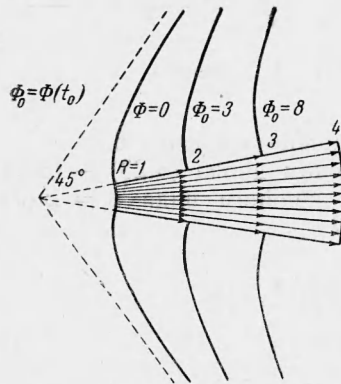
$$\Phi(t) = \Phi(t_0) J_4(t) / J_4(t_0)$$

Фокусирующие электроды для этого случая изображены на фиг. 7.

4°. Для рассмотрения решения (3.2), описывающего стекание заряда в плоском магнетроне, введем новые координаты x', y' , в которых траектории частиц записываются как $y' = \text{const}$ (считаем для удобства $\xi = x/t$)

$$x' = -x/H_0 + y, \quad y' = H_0 x + y$$

В этих переменных функции V и F [18] определяются выражениями



Фиг. 7

$$\Phi|_{y'=0} = V(x') = \frac{H_0^2}{1 + H_0^2} \frac{x'^2}{t^2},$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial y'}|_{y'=0} = F(x') = \frac{2H_0^2}{1 + H_0^2} \frac{x'}{t^2}$$

Решая уравнение для W [18,6], находим, что

$$W(z') = \frac{H_0^2}{1 + H_0^2} (1 + i) \frac{z'^2}{t^2} \quad (7.7)$$

$$(z' = x' + iy')$$

Уравнения фокусирующих электродов имеют вид

$$\Phi(x', y') = \frac{H_0^2}{1 + H_0^2} \frac{x'^2 - 2x'y' - y'^2}{t^2} = \text{const} \quad (7.8)$$

$$\left(y' - x' \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right) \left(y' + x' \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}\right) = 0 \quad (\Phi = 0)$$

Эквипотенциальные поверхности с ненулевым потенциалом являются гиперболическими цилиндрами; потенциал на них убывает как $1/t^2$. При $H_0 = 0$ картина становится симметричной относительно границ пучка, нулевая эквипотенциаль составляет с ними угол в 45°

$$\Phi(x, y) = (x^2 - y^2)/t^2 = \text{const} \quad (7.9)$$

§ 8. Случай релятивистских скоростей. В ряде работ [14,25-28] исследуются стационарные релятивистские течения в том случае, когда излучением движущихся зарядов можно пренебречь. Ниже приводятся некоторые результаты, связанные с отысканием основной группы уравнений нестационарного релятивистского пучка при том же предположении относительно излучения.

Нестационарный релятивистский пучок описывается системой уравнений, включающей уравнения Максвелла и уравнения движения релятивистской частицы в самосогласованных полях. В произвольной криволинейной системе координат метрика в которой задается соотношением

$$dS^{(2)} = g_{ik} dx^i dx^k \quad (8.1)$$

уравнения пучка имеют вид

$$(S_r) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma_{rk}^i v^r \right) &= g^{il} \sqrt{1 - g_{jq} v^j v^q} (E_l + V g e_{mnl} v^m H^n - g_{rs} v^r E^s v_l) \\ \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ikl} \frac{\partial E_k}{\partial x^i} + \frac{\partial H^l}{\partial t} &= 0, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (V g g^{ik} E_k) = \rho \\ \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ikl} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} &= \frac{\partial E^l}{\partial t} + \rho v^l, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} (V g g^{ik} H_k) = 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Уравнения (8.2) записаны в безразмерных переменных $t^\circ, r^\circ, V^\circ, E^\circ, H^\circ, \rho^\circ$, введенных по формулам

$$t = \frac{a}{c} t^\circ, \quad r = a r^\circ, \quad V = c V^\circ, \quad E = \frac{c^2}{\eta a} E^\circ, \quad H = \frac{c^2}{\eta a} H^\circ, \quad \rho = \frac{c^2}{4\pi \eta a^2} \rho^\circ \quad (8.3)$$

причем символ безразмерной величины опущен. В формулах (8.3) под a понимается некоторая постоянная, имеющая размерность длины; c — скорость света; E — величина вектора напряженности электрического поля.

Основная группа G_t уравнений (8.2) имеет вид

$$(G_t) \quad \begin{aligned} X_1 &= t \frac{\partial}{\partial t} + r \nabla - E \nabla_\varepsilon - H \nabla_n - 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \\ X_2 &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v} - E_y \frac{\partial}{\partial E_x} + E_x \frac{\partial}{\partial E_y} - H_y \frac{\partial}{\partial H_x} + H_x \frac{\partial}{\partial H_y} \\ X_3 &= -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z} - w \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial w} - E_z \frac{\partial}{\partial E_x} + E_x \frac{\partial}{\partial E_z} - H_z \frac{\partial}{\partial H_x} + H_x \frac{\partial}{\partial H_z} \\ X_4 &= -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} - w \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial w} - E_z \frac{\partial}{\partial E_y} + E_y \frac{\partial}{\partial E_z} - H_z \frac{\partial}{\partial H_y} + H_y \frac{\partial}{\partial H_z} \\ X_5 &= x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x} + (1 - u^2) \frac{\partial}{\partial u} - uv \frac{\partial}{\partial v} - uw \frac{\partial}{\partial w} + H_z \frac{\partial}{\partial E_y} - X_8 = \frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad - E_z \frac{\partial}{\partial H_y} + E_y \frac{\partial}{\partial H_z} - H_y \frac{\partial}{\partial E_z} + u\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \\ X_6 &= y \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial y} - uv \frac{\partial}{\partial u} + (1 - v^2) \frac{\partial}{\partial v} - vw \frac{\partial}{\partial w} + H_x \frac{\partial}{\partial E_z} - X_9 = \frac{\partial}{\partial y} \\ &\quad - E_x \frac{\partial}{\partial H_z} + E_z \frac{\partial}{\partial H_x} - H_z \frac{\partial}{\partial E_x} + v\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \\ X_7 &= z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z} - uw \frac{\partial}{\partial u} - vw \frac{\partial}{\partial v} + (1 - w^2) \frac{\partial}{\partial w} + H_y \frac{\partial}{\partial E_x} - X_{10} = \frac{\partial}{\partial z} \\ &\quad - E_y \frac{\partial}{\partial H_x} + E_x \frac{\partial}{\partial H_y} - H_x \frac{\partial}{\partial E_y} + w\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \quad X_{11} = \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Группа G_t может быть построена, если известна основная группа уравнений нерелятивистского пучка. В самом деле, вследствие появления в уравнениях движения дополнительной нелинейности вида $\sqrt{1 - V^2}$, уравнения релятивистского пучка уже не будут допускать преобразования с растяжением скорости (оператор X_2 в (2.1)). Вместе с тем система (8.2) должна быть инвариантной относительно преобразования Лоренца (операторы X_5, X_6 и X_7 в (8.4)). К тому же результату приводит решение системы определяющих уравнений.

Для плоских пучков вместо (8.4) имеем

$$(G_t) \quad \begin{aligned} X_1 &= t \frac{\partial}{\partial t} + R \nabla - E \nabla_\varepsilon - H \frac{\partial}{\partial H} - 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad X_5 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_7 = \frac{\partial}{\partial t} \\ X_2 &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v} - E_y \frac{\partial}{\partial E_x} + E_x \frac{\partial}{\partial E_y} \\ X_3 &= x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x} + (1 - u^2) \frac{\partial}{\partial u} - uv \frac{\partial}{\partial v} + H \frac{\partial}{\partial E_y} + E_y \frac{\partial}{\partial H} + u\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \\ X_4 &= y \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial y} - uv \frac{\partial}{\partial u} + (1 - v^2) \frac{\partial}{\partial v} - H \frac{\partial}{\partial E_x} - E_x \frac{\partial}{\partial H} + v\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Операторам (8.5) соответствуют следующие конечные преобразования, сохраняющие уравнения плоского релятивистского пучка:

1. Растяжение $t, x, y, E_x, E_y, H, \rho$

$$t' = a_1 t, \quad x' = a_1 x, \quad y' = a_1 y, \quad u' = u, \quad v' = v \\ E_x' = a_1^{-1} E_x, \quad E_y' = a_1^{-1} E_y, \quad H' = a_1^{-1} H, \quad \rho' = a_1^{-2} \rho$$

2. Поворот на одинаковый угол в плоскости течения x, y , плоскости годографа u, v и плоскости E_x, E_y

$$t' = t, \quad x' = x \cos a_2 - y \sin a_2, \quad y' = x \sin a_2 + y \cos a_2 \\ H' = H, \quad u' = u \cos a_2 - v \sin a_2, \quad v' = u \sin a_2 + v \cos a_2 \\ \rho' = \rho, \quad E_x' = E_x \cos a_2 - E_y \sin a_2, \quad E_y' = E_x \sin a_2 + E_y \cos a_2$$

3. Преобразование Лоренца (поворот в плоскости x, it и соответствующие преобразования скоростей, полей и ρ)

$$t' = t \operatorname{ch} a_3 + x \operatorname{sh} a_3, \quad x' = t \operatorname{sh} a_3 + x \operatorname{ch} a_3, \quad y' = y \\ u' = \frac{u \operatorname{ch} a_3 + \operatorname{sh} a_3}{u \operatorname{sh} a_3 + \operatorname{ch} a_3}, \quad v' = \frac{v}{u \operatorname{sh} a_3 + \operatorname{ch} a_3}, \quad E_x' = E_x \\ E_y' = E_y \operatorname{ch} a_3 + H \operatorname{sh} a_3, \quad H' = E_y \operatorname{sh} a_3 + H \operatorname{ch} a_3, \quad \rho' = (u \operatorname{sh} a_3 + \operatorname{ch} a_3) \rho$$

4. Преобразование Лоренца (поворот в плоскости y, it и соответствующие преобразования скоростей, полей и ρ)

$$t' = t \operatorname{ch} a_4 + y \operatorname{sh} a_4, \quad x' = x, \quad y' = t \operatorname{sh} a_4 + y \operatorname{ch} a_4 \\ u' = \frac{u}{v \operatorname{sh} a_4 + \operatorname{ch} a_4}, \quad v' = \frac{v \operatorname{ch} a_4 + \operatorname{sh} a_4}{v \operatorname{sh} a_4 + \operatorname{ch} a_4}, \quad E_y' = E_y \\ E_x' = E_x \operatorname{ch} a_4 - H \operatorname{sh} a_4, \quad H' = H \operatorname{ch} a_4 - E_x \operatorname{sh} a_4, \quad \rho' = (v \operatorname{sh} a_4 + \operatorname{ch} a_4) \rho$$

5. Перенос вдоль оси x

$$t' = t, \quad x' = x + a_5, \quad y' = y, \quad u' = u, \quad v' = v \\ E_x' = E_x, \quad E_y' = E_y, \quad H' = H, \quad \rho' = \rho$$

6. Перенос вдоль оси y

$$t' = t, \quad x' = x, \quad y' = y + a_6, \quad u' = u, \quad v' = v \\ E_x' = E_x, \quad E_y' = E_y, \quad H' = H, \quad \rho' = \rho$$

7. Изменение начала отсчета времени

$$t' = t + a_7, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad u' = u, \quad v' = v \\ E_x' = E_x, \quad E_y' = E_y, \quad H' = H, \quad \rho' = \rho$$

Не проводя построения оптимальных систем подгрупп и без подробного рассмотрения, укажем два H -решения, представляющие интерес. Они получаются на подгруппах $H \langle X_1, X_8, X_{10} \rangle$ и $H \langle X_1, X_2, X_{10} \rangle$ и имеют вид

$$1. \quad V = J_v(\xi), \quad E = \frac{1}{t} J_\varepsilon(\xi), \quad H = \frac{1}{t} J_n(\xi), \quad \rho = \frac{1}{t^2} J_{10}(\xi) \left(\xi = \frac{y}{t} \right); \quad (8.6)$$

$$2. \quad V = J_v(\xi), \quad E = \frac{1}{t} J_\varepsilon(\xi), \quad H = \frac{1}{t} J_n(\xi), \quad \rho = \frac{1}{t^2} J_{10}(\xi) \left(\xi = \frac{R}{t} \right); \quad (8.7)$$

Решения (8.6), (8.7) могут описывать нестационарные релятивистские течения в плоском и цилиндрическом диодах

$$J_v = \{J_1, J_2, J_3\}, \quad J_\varepsilon = \{J_4, J_5, J_6\}, \quad J_n = \{J_7, J_8, J_9\}$$

Автор пользуется возможностью сослаться на две работы, имеющие отношение к [7], но не упомянутые там. В [29] при $H \neq 0$ рассмотрены, хотя и с некоторыми неточностями, решения, соответствующие подгруппам $H \langle X_1, X_3 \rangle$ и $H \langle X_1 - X_2 + X_8, X_3 \rangle$. В [30] численно проинтегрирована система (S/H) , определяющая первое из этих решений в случае однородного магнитного поля.

Поступила 10 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 3.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 3.
3. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
4. Пухначев В. В. Групповые свойства уравнений Навье — Стокса в плоском случае. ПМТФ, 1960, № 1.
5. Павловский Ю. Н. Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. Ж. вычисл. мат. и матем. физ., 1961, т. 1, № 2.
6. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений плоского стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1962, № 4.
7. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений пространственного стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1963, № 3.
8. Meltzer B. Magnetic Forces and Relativistic Speeds in Stationary Electron Beams. J. Electronics and Control, 1958, vol. 4, No. 4.
9. Gabor D. Dynamics of Electron Beams. Proc. IRE, 1945, vol. 33, No. 11.
10. Pease M. C. Time-Dependent Electron Flow. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No. 1.
11. Spangenberg K. Use of the Action Function to Obtain the General Differential Equations of Space-Charge Flow in More Than One Dimension. J. Franklin Inst., 1941, vol. 232, No. 4.
12. Meltzer B. Single-Component Stationary Electron Flow Under Space — Charge Conditions. J. Electronics, 1956, vol. 2, No. 2.
13. Kirstein P. T., Kino G. S. Solution to the Equations of Space — Charge Flow by the Method of the Separation of Variables. J. Appl. Phys., 1958, vol. 29, No. 12.
14. Lucas A. R. The Relativistic Flow of Electrons in Parallel and Radial Straight Lines with no Externally Imposed Magnetic Field. J. Electronics and Control, 1958, vol. 5, No. 3.
15. Brillouin L. Transit Time and Space — Charge in Plane Diode. Electr. Commun., 1944, vol. 22, No. 2.
16. Pierce J. R. Rectilinear Electron Flow in Beams. J. Appl. Phys., 1940, vol. 11, No. 8.
17. Child C. D. Discharge from Hot CaO. Phys. Rev., 1911, vol. 32, No. 5.
18. Lomax R. J. Exact Electrode Systems for the Formation of a Curved Space — Charge Beam. J. Electronics and Control, 1957, vol. 3, No. 4.
19. Lomax R. J. Exact Electrode Systems for the Formation of a Curved Space — Charge Beam. J. Electronics and Control, 1959, vol. 7, No. 6.
20. Kirstein P. T. On the Determination of the Electrodes Required to Produce a Given Electric Field Distribution Along a Prescribed Curve. Proc. IRE, 1958, vol. 46, No. 10.
21. Radley D. E. The Theory of the Pierce Type Electron Gun. J. Electronics and Control, 1958, vol. 4, No. 2.
22. Rosenblatt J. Three-Dimensional Space — Charge Flow. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No. 8.
23. Brewer G. R. Note on the Determination of Electrode Shapes for a Pierce — Type Electron Gun. J. Appl. Phys., 1957, vol. 28, No. 5.
24. Berz F. Note on the Potential Derived from Axial Values in Electron Optics. Philos. Magazine, 1950, vol. 41, No. 314.
25. Lomax R. J. Single — Component Relativistic Space Charge Flow. J. Electronics and Control, 1958, vol. 5, No. 6.
26. Bradshaw J. A. A Relativistic Treatment of Space — Charge Limited Current in a Planar Diode Magnetron Before Cut — off. J. Electronics and Control, 1958, vol. 5, No. 4.
27. Buneman O. Self — Consistent Electrodynamics. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, vol. 50, No. 1.
28. Buneman O. The Non Existence of Straight, Parallel, Compressible Space — Charge Flow. J. Electronics and Control, 1958, vol. 5, No. 6.
29. Kirstein P. T. Some Solutions to the Equations of Steady Space Charge Flow in Magnetic Fields. J. Electronics and Control, 1959, vol. 7, No. 5.
30. Dryden V. W. Exact Solutions for Space — Charge Flow in Spherical Coordinates with Application to Magnetron Injection Guns. J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, No. 10.