угодно большой (при установившемся режиме). Если же скачком увеличить градиент давления выше некоторого критического значения, то температура жидкости на оси начнет неограниченно увеличиваться с течением времени. Установившиеся течения при этих градиентах невозможны.

3. Пусть

$$\lim T^{-1} \varphi(T) = +\infty \qquad \text{при } T \to +\infty \tag{21}$$

И в этом случае существует критическое значение градиента давления, выше которого невозможны установившиеся течения. Можно показать, пользуясь (15) и теоремами [11], что для значений $\nu < \eta_0$ существует, по меньшей мере, два решения уравнения (10), для одного из них $T_m \to 0$ при $\nu \to 0$, для второго $T_m \to +\infty$ при $\nu \to 0$. Второе решение неустойчиво. Таким образом, установившиеся режимы течения со сколь угодно большой температурой на оси осуществляются при градиентах давления, стремящихся к нулю. Это означает, что если жидкость предварительно достаточно сильно разогрета, то большая температура может поддерживаться за счет вязкой диссипации при малых градиентах давления. При значении градиента давления выше критического невозможно установившееся течение.

Во всех рассмотренных случаях, если для некоторого ν решение существует, то существует предел последовательности $T_n(x)$, построенной по формуле (11), и этот предел дает наименьшее по величине решение для данного ν.

Результаты, аналогичные вышеизложенным, могут быть получены для уравнения (5).

Использованный метод исследования может быть применен для изучения течения Куэтта. В этом случае интегральное уравнение будет отличаться от (10) отсутствием множителя ξ^2. Параметр ν связан с напряжением внутреннего трения. Как следствие полученных выше результатов могут быть получены результаты работы [5], а также некоторые оценки для величины напряжения.

Поступила 14 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Собрание трудов. Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1955.
2. Hausenblass. Die nicht isotherme Strömung einer zähen Flüssigkeit durch einge Spalte und Kapillarröhren. Ing. Arch., 18 (1950).
3. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. ГИТТЛ, 1951.
4. Регирер С. А. Некоторые термогидродинамические задачи об установившемся одномерном течении вязкой капельной жидкости. ПММ, 1957, т. XXI. вып. 3.
5. Регирер С. А. Влияние теплового эффекта на вязкое сопротивление в установившемся одномерном течении капельной жидкости. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
6. Яблонский В. С., Каганов С. А. Течение Куэтта с учетом зависимости вязкости от температуры и теплоты трения. Изв. вузов. Нефть и газ, 1958, № 5.
7. Каганов С. А., Яблонский В. С. О профиле скоростей ламинарного потока вязкой жидкости с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры. Изв. вузов. Нефть и газ, 1960, № 1.
8. Смирнов В. Л. Курс высшей математики, т. 2, ОГИЗ, 1948.
9. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменности. ГИТТЛ, 1950.
10. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. ИИЛ, 1960.
11. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. ГИТТЛ, 1956.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ УПРУГОГО РЕЖИМА ФИЛЬТРАЦИИ

В. М. Шестаков

(Москва)

Упругий режим фильтрации возникает, как известно, при изменении эффективной нагрузки на пласт и особенно резко проявляется в напорных горизонтах. Обычно в теории упругого режима рассматриваются задачи, когда эффективная нагрузка на пласт меняется только в зависимости от изменения давления жидкости [1]. Вместе с тем представляет интерес изучение процессов упругого режима фильтрации при изменении или перераспределении внешних нагрузок на кровлю напорного пласта.

1. Влияние жесткости покровных пластов. В теории упругого режима предполагается, что изменение давления фильтрующейся жидкости в каком-либо сечении пласта вызывает по величине точно такое же изменение давления на кровлю пласта от вышележащих пород. При этом принимается, что весь вышележащий комплекс пород является как бы абсолютно податливым, т. е. не сопротивляющимся деформациям сдвига. В действительности же изменение давления на кровле горизонта обязательно вызовет перераспределение напряжений в покрывающих его пластах, что в свою очередь будет влиять на их деформацию и передачу давлений на кровлю рассматриваемого напорного пласта.

Для некоторого анализа этого процесса рассмотрим вывод одномерного уравнения упругого режима фильтрации в напорном пласте с учетом изменения давлений (напряжений) p'' на кровле пласта. Оценим изменение веса жидкости w в элементе пласта единичной длины

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}m\right),\quad \text{или}\quad \frac{\partial w}{\partial t}=\frac{m}{1+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}(\gamma\varepsilon) \tag{1.1}$$

Здесь ε — коэффициент пористости грунта, m — мощность пласта, γ — объемный вес жидкости; величина $m/(1+\varepsilon)$ представляет собой объем скелета грунта, который считается неизменным.

Пусть p — давление в жидкости, E' — модуль упругости жидкости, p° — давление, передаваемое на скелет грунта, α — коэффициент сжимаемости (уплотнения) грунта.

Тогда закон Гука для воды и закон компрессии грунта [2] дают

$$E'\frac{d\gamma}{\gamma}=dp,\qquad d\varepsilon=-\alpha dp^\circ \tag{1.2}$$

Заметим теперь, что

$$dp=\gamma dH,\qquad dp^\circ=-\gamma dH+dp'' \tag{1.3}$$

где H — напор воды в рассматриваемом элементе, p'' — давление на кровле пласта.

Используя приведенные соотношения, получим

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{m}{1+\varepsilon}\left(\varepsilon\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)=\frac{m}{1+\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon\gamma^2}{E'}\frac{\partial H}{\partial t}+\gamma^2\alpha\frac{\partial H}{\partial t}-\right.$$
$$\left.-\gamma\alpha\frac{\partial p''}{\partial t}\right)=\frac{m\gamma^2}{1+\varepsilon}\left[\left(\frac{\varepsilon}{E'}+\alpha\right)\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\partial p''}{\partial t}\right] \tag{1.4}$$

Уравнение баланса воды будет иметь вид

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(\gamma q)\qquad\left(q=-km\frac{\partial H}{\partial x}\right) \tag{1.5}$$

где q — расход фильтрационного потока, связанный с напором формулой Дюпюи.

Величина коэффициента фильтрации k, вообще говоря, является функцией ε, но для песчаных грунтов этой зависимостью обычно можно пренебречь и считать величину k постоянной. Некоторые предложения по учету этого фактора рассмотрены, например, в работе [3]. Учитывая первое неравенство (1.2), получим

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\gamma q)=-\gamma\frac{\partial q}{\partial x}-q\frac{\partial\gamma}{\partial x}=km\gamma\frac{\partial^2H}{\partial x^2}+km\frac{\gamma^2}{E'}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 \tag{1.6}$$

Считая неизменным значение проводимости пласта km и пренебрегая здесь последним членом выражения в силу его малости, уравнение (1.5) представим в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t}=km\gamma\frac{\partial^2H}{\partial x^2} \tag{1.7}$$

Приравнивая правые части уравнений (1.4) и (1.7), получим следующее уравнение упругого режима фильтрации

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a\frac{\partial^2H}{\partial x^2}+\frac{\alpha}{\gamma(\varepsilon/E'+\alpha)}\frac{\partial p''}{\partial t}\qquad\left(a=\frac{k(1+\varepsilon)}{\gamma(\varepsilon/E'+\alpha)}\right) \tag{1.8}$$

где a — коэффициент пьезопроводности [1].

Уравнение (1.8) отличается от обычного уравнения упругого режима фильтрации членом, содержащим производную $\partial p''/\partial t$. Для ее выражения в зависимости от упругих свойств покровных пластов следует далее воспользоваться связью между напряжениями p'' и деформациями этих пластов. Рассматривая покровные пласты как бы в виде балки, лежащей на упругом основании, можно составить уравнение

$$\frac{\partial m}{\partial t}=f(E,\,G,\,m_0,\,p'',\,x,\,t) \tag{1.9}$$

где E и G — модули упругости и сдвига покровных грунтов; а m_0 — мощность покровного слоя.

---

[1] В. Н. Щелкачев [1] приводит несколько иное выражение для коэффициента пьезопроводности, в котором вместо коэффициента сжимаемости вводится коэффициент упругой сжимаемости.

Имея в виду, что $\partial m / \partial t = \partial \varepsilon / \partial t$ и учитывая равенства (1.2) и (1.3), зависимость (1.9) представим в виде

$$\frac{\partial p''}{\partial t} - \gamma \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{\alpha} f(E,\, G,\, m_0,\, p'',\, x,\, t) \qquad (1.10)$$

Уравнения (1.8) и (1.10) представляют собой замкнутую систему, решение которой и дает ответ на поставленную задачу.

В частности, при абсолютно жестком покровном слое

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = q\,\frac{1+\varepsilon}{mL} \qquad (1.11)$$

где q — погонный расход воды, подаваемый в пласт, а L — длина пласта

$$\frac{\partial p''}{\partial t} = \gamma \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1+\varepsilon}{\alpha m L}\, q \qquad (1.12)$$

и уравнение (1.8) примет вид

$$\frac{\partial H}{\partial t} = b\,\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \beta, \qquad b = \frac{k\,(1+\varepsilon)}{\gamma\varepsilon} E', \qquad \beta = \frac{(1+\varepsilon)\, qE'}{\gamma\,\varepsilon\, mL} \qquad (1.13)$$

Обоснование условий, в котором можно пренебрегать жесткостью покровных слоев, требует специального анализа. По-видимому, допущение об абсолютной податливости покровного слоя приемлемо в тех случаях, когда размеры зоны возмущения при упругом режиме фильтрации по крайней мере в несколько раз больше мощности покровных пластов, причем лучше, конечно, когда изменения напоров во времени и в пространстве происходят сравнительно плавно.

2. Проявления упругого режима фильтрации при колебаниях атмосферного давления и уровней грунтовых вод. Связь между колебаниями атмосферного давления и уровней грунтовых вод отмечалась еще Н. Е. Жуковским [4], который объяснял этот процесс влиянием капиллярной зоны. В дальнейшем натурными наблюдениями [5,6] было показано, что такого рода связь проявляется и в напорных горизонтах, где она обусловливается, как это показал В. П. Яковлев [6], проявлением упругого режима фильтрации. Для анализа этого процесса целесообразно обратиться к уравнению (1.8), в котором положить, что изменения давления p'' на кровлю пласта определяются изменениями атмосферного давления p_a. Если считать, что атмосферное давление без существенных потерь передается на кровлю пласта[1], то

$$\frac{\partial p''}{\partial t} = \frac{\partial p_a}{\partial t} \qquad (2.1)$$

и уравнение (1.8) принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial t} - a\,\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{\gamma\,(\varepsilon/E' + \alpha)}\,\frac{\partial p_a}{\partial t} \qquad (2.2)$$

Рассматривая влияние атмосферного давления p_a на напоры H, можно считать изменения давления слабо зависящими от расстояния x. Тогда

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\alpha}{\gamma\,(\varepsilon / E' + \alpha)}\,\frac{\partial p_a}{\partial t} \qquad (2.3)$$

т. е. изменение напоров оказывается пропорциональным изменению давления, причем коэффициент пропорциональности зависит от соотношения характеристик сжимаемости грунта и жидкости. Это обстоятельство дает принципиальную возможность оценить коэффициент уплотнения грунта α, зная соответствующие изменения атмосферного давления Δp_a и напора ΔH по формуле

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{E\,(\Delta p_a / \gamma\Delta H - 1)} \qquad (2.4)$$

если известен модуль упругости жидкости. Эта формула несколько иным путем была получена В. П. Яковлевым [6].

Таким же образом можно связать изменения напора в напорном горизонте с колебаниями уровней грунтовых вод, так как последние также вызывают изменения давления p'' на кровлю напорного горизонта, причем в этом случае можно считать

$$\frac{\partial p''}{\partial t} = \gamma n\,\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (2.5)$$

[1] Это допущение, вообще говоря, должно быть обосновано; заметим, что натурные данные, как правило, обнаруживают довольно четкую и синхронную связь между колебаниями атмосферного давления и напорами воды.

где n — активная пористость грунтов безнапорного горизонта, а h — его глубина в данном сечении.

Заменяя $\partial p''/\partial t$ в (1.8) согласно (2.5), получим уравнение упругого режима фильтрации с учетом колебания уровней грунтовых вод

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + n\frac{\alpha}{\varepsilon/E' + \alpha}\, v \qquad \left(v = \frac{\partial h}{\partial t}\right) \tag{2.6}$$

Здесь скорость колебания уровней грунтовых вод $v = v\,(x,\,t)$ принимается положительной при подъеме уровней грунтовых вод и отрицательной при их спаде.

Уравнение (2.6) представим в конечно разностном виде для планово-плоского потока; получим для изменения напора ΔH за время Δt при равномерных шагах разбивки Δx и Δy

$$\Delta H = a\Delta t\left(\frac{H_{n+1} + H_{n-1} - 2H}{\Delta x^2} + \frac{H_{i+1} + H_{i-1} - 2H}{\Delta y^2}\right) + n\frac{\alpha}{\varepsilon\,/\,E' + \alpha}\,\Delta h \tag{2.7}$$

Здесь H — напор в расчетном блоке, H_{n+1} и H_{n-1} — напоры в соседних блоках по оси x, а H_{i+1} и H_{i-1} — то же по оси y, наконец, Δh — изменение уровня грунтовых вод над рассматриваемым участком за время Δt.

Из уравнения (2.6) непосредственно следует, что колебания уровней грунтовых вод должны вызывать изменения напоров в нижележащих горизонтах только за счет упругого режима фильтрации даже при отсутствии какой-либо гидравлической связи между этими горизонтами, причем интересной особенностью рассматриваемого режима фильтрации является его проявление только в период колебаний грунтовых вод.

Возможность проявления режима фильтрации такого рода следует учитывать при анализе материалов режимных наблюдений в естественных условиях и, особенно, при устройстве искусственного понижения уровня грунтовых вод [6].

Поступила 11 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Щ е л к а ч е в В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме Гостоптехиздат, 1959.
2. Т е й л о р Д. Основы механики грунтов. Госстройиздат, 1960.
3. Н и к о л а е в с к и й В. Н. К построению нелинейной теории упругого режима фильтрации жидкости и газа. ПМТФ, 1961, № 4.
4. Ж у к о в с к и й Н. Е. Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод. СПб., 1888.
5. Г о т а л ь с к и й М. А. Влияние ветра и атмосферного давления на подземные воды. Разведка недр, 1937, № 24.
6. Я к о в л е в В. П. Возможность промысловых определений коэффициентов сжимаемости, нефтенасыщенности и нефтеотдачи пласта. Разработка нефтяных месторождений и гидродинамика пласта. Тр. ВНИИ, 1959, вып. XXI.
7. Ш е с т а к о в В. М. О фильтрации в напорных горизонтах при выемке котлованов или карьеров, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 2.

О ЛИНЕЙНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА

Ч. Т. Халиуллин

(Уфа)

Рассматривается плоский поток однородной несжимаемой жидкости (фиг. 1) по некоторой произвольной области E, который определяет величину расхода жидкости q.

На фиг. 1 в точке O_1 предполагается источник жидкости — светлый кружочек (скважина нагнетательная), в точке O_3 — сток жидкости—темный кружочек (скважина нефтяная). Область E разделяется на подобласти *1*, *2* и *3*, пространство плоского потока в которых характеризуется величиной $\Lambda_j{}^\circ$ соответственно $\Lambda_1{}^\circ = \varphi_0$, $\Lambda_2{}^\circ = \gamma_0$ и $\Lambda_3{}^\circ = \alpha_0$, и для каждой подобласти *1*, *2* и *3* области E расход жидкости q выражается формулой из [1]

$$q_1 = \frac{k\Delta p_1}{\mu\Omega_1\,[r_+,\ s_1{}^{\varphi_0};\ \omega_1(s,\ \varphi_0)]}, \qquad q_2 = \frac{k\Delta p_2}{\mu\Omega_2\,[s_1{}^{\gamma_0},\ s_2{}^{\gamma_0};\ \omega_2\,(s,\ \gamma_0)]} \tag{1}$$

$$q_3 = \frac{k\Delta p_3}{\mu\Omega_3\,[s_2{}^{\alpha_0},\ r;\ \omega_3\,(s,\ \alpha_0)]}$$