# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОИСКИ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

УДК 51-77

## ДИНАМИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ МАРКЕТИНГА НА МНОГОСЕГМЕНТНОМ РЫНКЕ[1]

**С.Б. Барабаш**
Новосибирский государственный университет
экономики и управления «НИНХ»
E-mail: sergei_barabash@mail.ru

**И.А. Быкадоров**
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет
Новосибирский государственный университет
экономики и управления «НИНХ»
E-mail: bykadorov.igor@mail.ru

**М.В. Пудова**
Новосибирский государственный университет
экономики и управления «НИНХ»
E-mail: m.v.pudova@nsuem.ru

Рассматривается линейная модель оптимального управления для маркетинга сезонного продукта. Процесс производства и продвижения продукта для производящей фирмы разделен на два последовательных периода, первый из которых посвящен производству, а второй – продаже продукта. Деятельность фирмы в эти периоды (а следовательно, и математическое описание ее деятельности) существенно различается. Состояния модели заданы переменными, характеризующими нематериальные активы и потребителей, и продавцов, названными «гудвиллами». Фирма стремится получить максимальную прибыль при условии достижения в конце периода продаж уровня гудвилла не меньше заданного.

*Ключевые слова*: оптимальное управление, многосекторный рынок, гудвилл, реклама, параметризация, координирующая задача.

[1] Исследования выполнены при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-06-05666, № 16-01-00108 и № 16-06-00101).

# DYNAMIC LINEAR MODEL OF MARKETING ON A MULTI-SEGMENT MARKET

**S.B. Barabash**
Novosibirsk State University of Economics and Management
E-mail: sergei_barabash@mail.ru

**I.A. Bykadorov**
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS
Novosibirsk National Research State University
Novosibirsk State University of Economics and Management
E-mail: bykadorov.igor@mail.ru

**M.V. Pudova**
Novosibirsk State University of Economics and Management
E-mail: m.v.pudova@nsuem.ru

A linear model of optimal control for the marketing of a homogeneous product is considered. The process of production and promotion of the product for the manufacturing firm is divided into two consecutive periods; the first one is devoted to production, while the second one – to the sale of the product. The activities of the firm during these periods (and, consequently, the mathematical description of its activities) are significantly different. The state variables of the model are given by variables characterizing intangible assets (both consumers and sellers), called «goodwills». The firm seeks to maximize profits, subject to not less than a predetermined period of goodwill at the end of the sales level.

*Kewords*: optimal control, multi-sector market, goodwill, advertising, parameterization, coordinating problem.

## ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается линейная модель оптимального управления для маркетинга некоторого сезонного продукта. Продукт производится некоторой фирмой и распродается продавцами в различных сегментах рынка. А именно фирма производит и продает сезонный продукт в двух последовательных периодах времени. Первый период которых посвящен производству, а второй – продаже продукта. В период производства фирма может контролировать само производство, качество продукции и рекламу продукта как для продавцов, так и в сегментах рынка. В период продаж фирма ведет широкую коммуникационную деятельность по продвижению товара потребителям, стимулированию продавцов и рекламе. При построении модели и для потребителей, и для продавцов рассматриваются некоторые величины, названные «гудвиллами». Гудвилл следует понимать как числовую характеристику репутации потребителя или продавца [14]. Предполагается, что коммуникационная деятельность фирмы таким образом действует на гудвилл, что потребители и продавцы приобретают продукт. Гудвиллы потребителей и продавцов рассматриваются как переменные состояния и задают уравнения модели. Фирма стремится получить максимальную прибыль, но при условии, что к концу периода продаж должен быть достигнут некоторый минимальный уровень гудвилла. Таким образом, мы расширяем модель, представленную в [7, 8], и обобщили модель, представленную в [5, 13–15, 21].

Путем фиксации состояния системы в момент окончания производства (и начала продажи) задача разбивается на параметрические, допускающие решение в явном виде. Кроме того, формулируется и исследуется задача оптимизации параметров (координирующая задача).

## 1. МНОГОСЕКТОРНАЯ ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим модель с $n$ сегментами рынка, $r$ продавцами $d$ видами коммуникаций. Как и в [8], мы предполагаем, что производство продукта и его продажа имеют место в двух последовательных периодах времени: $[t_0, t_1]$ (период производства) и $[t_1, t_2]$ (период продаж). Кроме того, введем множества индексов:

$$I = \{1, \ldots, n\},\ J = \{1, \ldots, r\},\ K = \{1, \ldots, d\}.$$

### 1.1. Переменные состояния и управления

Для периода производства рассмотрим $n$ переменных состояния.

$m_i(t)$ – уровень запасов в $i$-м сегменте рынка, $i \in I$, в момент времени $t \in [t_0, t_1]$ и $n+1$ управление,

$u_i(t)$ – темп производственных затрат в $i$-м сегменте рынка, $i \in I$, в момент времени $t \in [t_0, t_1]$.

Обозначим

$q$ – темп затрат на улучшение качества производимой продукции.

Как и для односекторной линейной модели [14], $q$ считаем постоянным и неотрицательным.

Для периода продаж $n$ переменных состояния – это

$x_i(t)$ – уровень продаж в $i$-м сегменте рынка, $i \in I$, в момент времени $t \in [t_1, t_2]$.

При формулировке модели мы также будем использовать термины «гудвилл потребителя» и «гудвилл продавца». Гудвилл потребителя показывает, насколько легко потребители в $i$-м сегменте рынка принимают решение, покупать ли данный продукт. Гудвилл продавца показывает, насколько желательно для продавца сохранить данный продукт в запасе (более подробно см. [14]).

Таким образом, и для периода продаж, и для периода производства рассмотрим переменные состояния

$C_i(t)$ – гудвилл потребителей в $i$-м сегменте рынка, $i \in I$, в момент времени $t \in [t_0, t_2]$,

$R_j(t)$ – гудвилл $j$-го продавца, $j \in J$, в момент времени $t \in [t_0, t_2]$.

Кроме того, рассмотрим $d$ управлений

$a_k(t)$ – темп коммуникационных затрат для $k$-го вида коммуникаций, $k \in K$, в момент времени $t \in [t_0, t_2]$.

Для управлений $a_k(t)$ мы полагаем, что в течение периода производства коммуникациями является реклама, а в течение периода продаж – реклама, продвижение продаж и стимулирование продавца.

### 1.2. Динамика

Динамика модели в периоды производства $[t_0, t_1]$ и продаж $[t_1, t_2]$ существенно различается.

Динамика модели в период производства $[t_0, t_1]$ описывается $2n + r$ уравнениями: $n$ уравнений описывают уровни запасов $m_i(t)$ в $i$-м сегменте рынка, $i \in I$; $n$ уравнений описывают гудвиллы потребителей $C_i(t)$ в $i$-м сегменте рынка, $i \in I$; $r$ уравнений описывают гудвиллы $j$-го продавца, $j \in J$.

Для $i$-го сегмента рынка, $i \in I$, динамика уровня запасов описывается следующими уравнениями:

$$\dot{m}_i(t) = \mu_i u_i(t),$$

где $\mu_i$ – маргинальная продуктивность производственных затрат, $\mu_i > 1$.

Далее, в $i$-м сегменте, $i \in I$, динамика уровня гудвилла потребителей описывается уравнениями:

$$\dot{C}_i(t) = -\delta_{C_i} C_i(t) + \sum_{k \in K} \varepsilon^{(p)}_{C_i k} a_k(t),$$

где $\delta_{C_i}$ – коэффициент дисконтирования гудвилла $C_i$, $\delta_{C_i} > 0$,

$\varepsilon^{(p)}_{C_i k}$ – маргинальная продуктивность коммуникационных затрат $a_k$ средствами рекламы в терминах гудвилла $C_i$ в период производства, $\varepsilon^{(p)}_{C_i k} \geq 0$.

Заметим, что $\varepsilon^{(p)}_{C_i k} > 0$ означает, что в период производства продуктивность коммуникационных затрат увеличивает гудвилл $C_i$.

Наконец, для $j$-го продавца, $j \in J$, динамика уровня гудвилла задается уравнениями

$$\dot{R}_j(t) = -\delta_{R_j} R_j(t) + \sum_{k \in K} \varepsilon^{(p)}_{R_j k} a_k(t),$$

где $\delta_{R_j}$ – коэффициент дисконтирования гудвилла $R_j$, $\delta_{R_j} > 0$,

$\varepsilon^{(p)}_{R_j k}$ – маргинальная продуктивность коммуникационных затрат на рекламу в терминах гудвилла $R_j$ в период производства, $\varepsilon^{(p)}_{R_j k} \geq 0$.

Динамика модели в период продаж $[t_1, t_2]$ также описывается $2n + r$ уравнениями: $n$ уравнений для уровней продаж $x_i(t)$ в $i$-м сегменте рынка, $i \in I$ и так же, как и в период производства, $n$ уравнений для гудвиллов потребителей $C_i(t)$ в $i$-м сегменте рынка, $i \in I$ и $r$ уравнений для гудвиллов $j$-го продавца, $j \in J$.

Для $i$-го сегмента, $i \in I$, динамика уровня продаж следующая:

$$\dot{x}_i(t) = -\alpha_i x_i(t) + \gamma_{C_i} C_i(t) + \sum_{j \in J} \gamma_{x_i R_j} R_j(t) + \sum_{k \in K} \varepsilon^{(s)}_{x_i k} a_k(t) + l_{x_i} q_1,$$

где $\alpha_i$ – параметр насыщения рынка, $\alpha_i > 0$,

$\gamma_{C_i}$ – продуктивность гудвилла в терминах продаж, порожденная гудвиллом $C_i$, $\gamma_{C_i} > 0$,

$\gamma_{x_i R_j}$ – продуктивность гудвилла в терминах продаж, порожденная гудвиллом $j$-го продавца $R_j$, $\gamma_{x_i R_j} \geq 0$,

$\varepsilon^{(s)}_{x_i k}$ – маргинальная продуктивность коммуникационных затрат на продвижение товара в терминах уровня продаж $x_i(t)$, $\varepsilon^{(s)}_{x_i k} \geq 0$,

$l_{x_i}$ – маргинальная продуктивность темпа затрат $q$ на повышение качества, $l_{x_i} \geq 0$,

$q_1 = q(t_1 - t_0)$ – общие затраты на улучшение качества в период производства.

Далее, для $i$-го сегмента, $i \in I$, динамика уровня гудвилла задается уравнениями

$$\dot{C}_i(t) = \beta_i x_i(t) - \delta_{C_i} C_i(t) + \sum_{k \in K} \varepsilon_{C_i k}^{(s)} a_k(t) + l_{C_i} q_1,$$

где $\beta_i$ – торговая репутация в терминах гудвилла $C_i$, $\beta_i \geq 0$,

$\delta_{C_i}$ – коэффициент дисконтирования гудвилла $C_i$, $\delta_{C_i} > 0$,

$\varepsilon_{C_i k}^{(s)}$ – маргинальная продуктивность коммуникационных затрат на рекламу в терминах гудвилла $C_i$ в период продаж, $\varepsilon_{C_i k}^{(s)} \geq 0$,

$l_{C_i}$ – маргинальная продуктивность темпа затрат $q$ для гудвилла $C_i$, $l_{C_i} \geq 0$.

Наконец, для $j$-го продавца, $j \in J$, динамика уровня гудвилла описывается уравнениями

$$\dot{R}_j(t) = -\delta_{R_j} R_j(t) + \sum_{k \in K} \varepsilon_{R_j k}^{(s)} a_k(t) + l_{R_j} q_1,$$

где $\delta_{R_j}$ – коэффициент дисконтирования гудвилла $R_j$, $\delta_{R_j} > 0$,

$\varepsilon_{R_j k}^{(s)}$ – маргинальная продуктивность коммуникационных затрат на рекламу и стимулирование в терминах гудвилла $R_j$ в период продаж, $\varepsilon_{R_j k}^{(s)} \geq 0$,

$l_{R_j}$ – маргинальная продуктивность темпа затрат $q$ для гудвилла $R_j$, $l_{R_j} \geq 0$.

### 1.3. Целевой функционал

Итоговая прибыль фирмы определяется как разница между общей выручкой и общими издержками (на производство, улучшение качества и коммуникации) и задается следующим целевым функционалом:

$$\sum_{i \in I} p_i x_i(t_2) - \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i \in I} c_i m_i(t) + \sum_{i \in I} u_i(t) + q \right) dt - \int_{t_0}^{t_2} \sum_{k \in K} a_k(t) dt,$$

где $p_i$ – цена продажи продукции в $i$-м сегменте, $p_i > 0$,

$c_i$ – предельные издержки хранения единицы продукции в единицу времени в $i$-м сегменте, $c_i > 0$.

### 1.4. Граничные условия

Естественные граничные условия для уровней запасов и продаж – это

$$m_i(t_0) = x_i(t_1) = 0, \; x_i(t_2) \leq m_i(t_1), \; i \in I.$$

Граничные условия для гудвиллов потребителей – это

$$C_i(t_0) = C_i^0, \; C_i(t_2) \geq C_i^2, \; i \in I,$$

где $C_i^0$ – начальная величина гудвилла $C_i$,

$C_i^2$ – нижняя граница гудвилла $C_i$ в конечный момент времени $t_2$.

Граничные условия для гудвиллов продавцов – это

$$R_j(t_0) = R_j^0,\ \ R_j(t_2) \geq R_j^2,\ \ j \in J,$$

где $R_j^0$ – начальное значение гудвилла $R_j$,

$R_j^2$ – нижняя граница гудвилла $R_j$ в конечный момент времени $t_2$.

Граничные условия для управлений:

$$u_i(t) \in [0, \overline{u}_i],\ \ i \in I,\ \ t \in [t_0, t_1],$$

$$a_k(t) \in [0, \overline{a}_k],\ \ k \in K,\ \ t \in [t_0, t_2],$$

$$q \in [0, \overline{q}],$$

где $\overline{u}_i$ – верхняя граница для $u_i(t)$, $\overline{u}_i > 0$,

$\overline{a}_k$ – верхняя граница для $a_k(t)$, $\overline{a}_k > 0$,

$\overline{q}$ – верхняя граница для $q$, $\overline{q} > 0$.

## 1.5. Формулировка модели

Для того чтобы сформулировать линейную модель, рассмотрим

$n$-мерные векторы переменных состояния $m(t)$, $x(t)$, $C(t)$ с элементами $m_i(t)$, $x_i(t)$, $C_i(t)$, $i \in I$ соответственно;

$r$-мерные векторы переменных состояния $R(t)$ с элементами $R_j(t)$, $j \in J$;

$n$-мерный вектор управления $u(t)$ с элементами $u_i(t), i \in I$;

$r$-мерный вектор управления $a(t)$ с элементами $a_k(t), k \in K$;

$n$-мерные постоянные векторы $p, c, C^0, l_x, l_C, C^2, \overline{u}$ с элементами $p_i, c_i, C_i^0, l_{x_i}, l_{C_i}, C_i^2, \overline{u}_i$, $i \in I$ соответственно;

$r$-мерные постоянные векторы $R^0, l_R, R^2$ с элементами $R_j^0, l_{R_j}, R_j^2$, $j \in J$ соответственно;

$d$-мерный постоянный вектор $\overline{a}$ с элементами $\overline{a}_k, k \in K$;

диагональные постоянные матрицы порядка $n \times n$ $\mu, \delta_C, \alpha, \gamma_C, \beta$ с диагональными элементами $\mu_i, \delta_{C_i}, \alpha, \gamma_{C_i}, \beta_i$, $i \in I$ соответственно;

диагональную постоянную матрицу $\delta_R$ порядка $r \times r$ с диагональными элементами $\delta_{R_j}$, $j \in J$;

постоянные матрицы $\varepsilon_C^{(p)}, \varepsilon_x^{(s)}, \varepsilon_C^{(s)}$ порядка $n \times d$ с элементами $\varepsilon_{C_ik}^{(p)}, \varepsilon_{x_ik}^{(s)}, \varepsilon_{C_ik}^{(s)}$, $i \in I, k \in K$, соответственно;

постоянные матрицы $\varepsilon_R^{(p)}, \varepsilon_R^{(s)}$ порядка $r \times d$ с элементами $\varepsilon_{R_jk}^{(p)}, \varepsilon_{R_jk}^{(s)}$, $j \in J$, $k \in K$ соответственно;

постоянную матрицу $\gamma_R$ порядка $n \times r$ с элементами $\gamma_{x_iR_j}$, $i \in I, j \in J$.

Кроме того, введем обозначения

$$A(t) = \begin{pmatrix} C(t) \\ R(t) \end{pmatrix},\ t \in [t_0, t_2],\ \ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ A(t) \end{pmatrix},\ t \in [t_1, t_2],\ \ A^0 = \begin{pmatrix} C^0 \\ R^0 \end{pmatrix},\ \ A^2 = \begin{pmatrix} C^2 \\ R^2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_C & 0_{nr} \\ 0_{rn} & \delta_R \end{pmatrix},\ \ E^{(p)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_C^{(p)} \\ \varepsilon_R^{(p)} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma_C & -\gamma_R \\ -\beta & \delta_C & 0_{nr} \\ 0_{rn} & 0_{rn} & \delta_R \end{pmatrix},\ \ E^{(s)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^{(s)} \\ \varepsilon_C^{(s)} \\ \varepsilon_R^{(s)} \end{pmatrix},\ \ L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_C \\ l_R \end{pmatrix},$$

где, как обычно, $0_{nr}$ и $0_{rn}$ – это нулевые матрицы порядка $(n \times r)$ и $(r \times n)$ соответственно.

Наконец, пусть $e_n$ и $e_d$ – это $n$-мерный и соответственно $d$-мерный векторы с единичными элементами, а $0_n$ и $0_d$ – это $n$-мерный и соответственно $d$-мерный нулевые векторы.

Тогда линейная маркетинговая модель с $n$ сегментами рынка, $r$ продавцами и $d$ видами коммуникаций имеет вид:

$$p^T x(t_2) - \int_{t_0}^{t_1} \left( c^T m(t) + e_n^T u(t) + q \right) dt - \int_{t_0}^{t_2} e_d^T a(t) dt \to \max,$$

$$\dot{m}(t) = \mu u(t), \ \ \dot{A}(t) = -\Delta A(t) + E^{(p)} a(t), \ \ t \in [t_0, t_1],$$

$$m(t_0) = 0_n, \ \ A(t_0) = A^0, \qquad \text{(P)}$$

$$\dot{X}(t) = -QX(t) + E^{(s)} a(t) + q_1 L, \ \ t \in [t_1, t_2],$$

$$x(t_1) = 0_n, \ \ x(t_2) \le m(t_1), \ \ A(t_2) \ge A^2,$$

$$0_n \le u(t) \le \overline{u}, \ \ 0_d \le a(t) \le \overline{a}, \ \ q \in [0, \overline{q}].$$

Заметим, что векторное неравенство $x(t_2) \le m(t_1)$ можно заменить равенством. Действительно, если предположить, что для оптимального решения выполнено строгое неравенство $x(t_2) < m(t_1)$, то возможно уменьшить производство с одновременным увеличением значения целевого функционала. Это становится возможным благодаря специфической форме уравнений в ограничениях модели.

Представленная модель P является довольно общей и допускает различные спецификации. Одна из них такова: предположим, что намерение фирмы – определить оптимальный темп затрат для каждого сегмента и каждого продавца. Тогда $d = n + r$. Более того, пусть каждый вид коммуникаций действует только для одного продавца или на одном сегменте рынка.

В Заключении будут приведены другие возможные интерпретации модели.

## 2. РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОДЗАДАЧИ

Для обсуждения подходов к решению задачи P введем

$n$-мерный вектор $\tilde{m}$, элементы которого $\tilde{m}_i$, $i \in I$, есть параметры;

($n + r$)-мерные векторы $\tilde{A}, \overline{A}$, соответствующие элементы $\tilde{A}_i, \overline{A}_i, i \in I$, $\tilde{A}_{n+j}, \overline{A}_{n+j}, j \in J$ которых также являются параметрами.

Аналогично [6] можно решать задачу P следующим образом: сначала решить задачи оптимального управления, зависящие от параметров $\tilde{m} = m(t_1), \tilde{A} = A(t_1), \overline{A} \ge A^2$, а затем решить задачу нелинейного программирования, переменными которой являются эти параметры. Обозначим

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 0_n \\ \tilde{A} \end{pmatrix}, \ \ \overline{X} = \begin{pmatrix} \tilde{m} \\ \overline{A} \end{pmatrix}.$$

Запишем параметрические подзадачи $\text{P}_1 = \text{P}_1(\tilde{m}_1)$, $\text{P}_2 = \text{P}_2(\tilde{A})$ и $\text{P}_3 = \text{P}_3$ $(m, q, \tilde{A}, \overline{A})$ следующим образом:

Подзадача $\mathrm{P}_1$:

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left(c^T m(t)+e_n^T u(t)\right)dt \to \max,$$

$$\dot m(t)=\mu u(t), \qquad (\mathrm{P}_1)$$

$$m(t_0)=0_n,\ m(t_1)=\tilde m,\ 0_n \le u(t) \le \overline{u}.$$

Подзадача $\mathrm{P}_2$:

$$-\int_{t_0}^{t_1} e_d^T a(t)dt \to \max,$$

$$\dot A(t)=-\Delta A(t)+E^{(p)}a(t), \qquad (\mathrm{P}_2)$$

$$A(t_0)=A^0,\ A(t_1)=\tilde A,\ 0_d \le a(t) \le \overline{a}.$$

Подзадача $\mathrm{P}_3$:

$$-\int_{t_1}^{t_2} e_d^T a(t)dt \to \max,$$

$$\dot X(t)=-QX(t)+E^{(s)}a(t)+q_1 L, \qquad (\mathrm{P}_3)$$

$$X(t_1)=\tilde X,\ X(t_2)=\overline{X},\ 0_d \le a(t) \le \overline{a}.$$

Более того, решение подзадачи $\mathrm{P}_1$ из-за специфической формы уравнений можно заменить решением следующих $n$ более простых подзадач $P_1^{(i)}=P_1^{(i)}(\tilde m_i), i\in I$:

Подзадача $\mathrm{P}_1^{(i)}$:

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left(c_i m_i(t)+u_i(t)\right)dt \to \max,$$

$$\dot m_i(t)=\mu_i u_i(t), \qquad (\mathrm{P}_1^{(i)})$$

$$m_i(t_0)=0,\ m_i(t_1)=\tilde m_i,\ u_i(t)\in[0,\overline{u}_i].$$

Пусть $\tilde F_1^{(i)}=\tilde F_1^{(i)}(\tilde\mu_i), i\in I,\ \tilde F_2=\tilde F_2(\tilde A)$ и $\tilde F_3=\tilde F_3(m,q,\tilde A,\overline{A})$ – оптимальные значения целевых функционалов задач $\mathrm{P}_1^{(i)},\ i\in I,\ \mathrm{P}_2$ и $\mathrm{P}_3$ соответственно. Тогда задача P эквивалентна задаче нелинейного программирования, в которой необходимо максимизировать следующую целевую функцию:

$$p^T\tilde m-\left(t_1-t_0\right)q+\sum_{i\in I}\tilde F_1^{(i)}+\tilde F_2+\tilde F_3. \qquad (1)$$

В дальнейшем мы будем считать, что выполнено условие общности положения (УОП) [3, с. 166].

Поиск оптимального решения подзадачи $\mathrm{P}_1^{(i)},\ i\in I,$ совпадает с поиском решения для случая $n=1$ [7], т.е. для каждого $i\in I$ оптимальным решением подзадачи $\mathrm{P}_1^{(i)}$ является

$$u_i^*(t)=\begin{cases}0,\ t\in(t_0,t_{u_i});\\ \overline{u}_i,\ t\in(t_{u_i},t_1),\end{cases}$$

$$m_i^*(t)=\begin{cases}0,\ t\in(t_0,t_{u_i});\\ \mu_i\overline{u}_i(t-t_{u_i}),\ t\in(t_{u_i},t_1),\end{cases}$$

где $t_{u_i} = t_1 - \frac{\tilde{m}_i}{\mu_i \bar{u}_i}$. Оптимальное значение функционала $\tilde{F}_1^{(i)} = \tilde{F}_1^{(i)}(\tilde{\mu}_i), i \in I$ равно

$$\tilde{F}_1^{(i)}(\tilde{m}_i) = \frac{c_i}{2\mu_i \bar{u}_i}(\bar{m}_i)^2 + \frac{\tilde{m}_i}{\mu_i}, \tag{2}$$

где

$$\tilde{m}_i \in [0, \mu_i \bar{u}_i (t_1 - t_0)]. \tag{3}$$

Для подзадачи $P_2$, учитывая УОП, количество моментов переключений в оптимальном управлении $a_k^*(t)\, \forall k \in K$ не может превышать $n + r$ [22, с. 166]. Обозначим эти моменты переключений как $\tau_1^{(k)}, \ldots, \tau_{n+r}^{(k)} \forall k \in K$.

Пусть

$$t_0 \le \tau_1^{(k)} \le \ldots \le \tau_{n+r}^{(k)} \le \tau_{n+r+1}^{(k)}, \; k \in K, \tag{4}$$

обозначим

$$G^{(p)} = e^{t_1 \Delta} \tilde{A} - e^{t_0 \Delta} A^0, \; D_k^{(p)}(t) = \bar{a} e^{t_0 \Delta} \Delta^{-1} E_k^{(p)},$$

где $E_k^{(p)}$ – $k$-й столбец матрицы $E^{(p)}$. Имеем

$$G^p = \begin{cases} \sum_{k \in K} d_k^{(p)}(n+r), & \text{если } n+r \text{ четное;} \\ \sum_{k \in K} d_k^{(p)}(n+r+1), & \text{если } n+r \text{ нечетное,} \end{cases} \tag{5}$$

где $d_k^{(p)}(l) = \sum_{j=1}^{l} (-1)^j D_k^{(p)}(\tau_j^{(k)}), \; l \in \{n+r, n+r+1\}$.

Более того, существует $(n + r)$-мерный вектор $v$ такой, что

$$v^T e^{\tau_j^{(k)} \Delta} E_k^{(p)} = 1, \; k \in K, \; j \in \{1, \ldots, n+r\}, \tag{6}$$

и оптимальное значение целевого функционала равно

$$\tilde{F}_2 = \begin{cases} \sum_{k \in K} T_k^{(p)}(n+r), & \text{если } n+r \text{ четное;} \\ \sum_{k \in K} T_k^{(p)}(n+r+1), & \text{если } n+r \text{ нечетное,} \end{cases} \tag{7}$$

где

$$T_k^{(p)}(l) = -\bar{a}_k \sum_{j=1}^{l} (-1)^j \tau_j^{(k)}, \; l \in \{n+r, n+r+1\}.$$

Теперь рассмотрим задачу $P_3$. Для простоты рассмотрим только случай, когда собственные числа матрицы $Q$ различны. Если некоторые из них совпадают, то можно провести простые вычисления, как в [14]. Пусть $S$ – матрица собственных векторов матрицы $Q$. Обозначим

$$\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n+r}\} = S^{-1} Q S.$$

Учитывая условия общности положений, и поскольку собственные числа матрицы ограничений являются действительными, то количество моментов переключений в оптимальном управлении $a_k^*(t)$ не может превышать $2n + r$. Обозначим моменты переключений через $\rho_1^{(k)}, \ldots, \rho_{2n+r}^{(k)}$. Пусть

$$t_1 \le \rho_1^{(k)} \le \ldots \le \rho_{2n+r}^{(k)} \le \rho_{2n+r+1}^{(k)} = t_2, k \in K, \tag{8}$$

обозначим

$$G^{(s)} = e^{t_2\Lambda} S^{-1} \overline{X} - e^{t_1\Lambda} S^{-1} \tilde{X} + (e^{t_1\Lambda} - e^{t_2\Lambda}) \Lambda^{-1} S^{-1} L,$$

$$D_k^{(s)}(t) = \overline{a}_k e^{t\Lambda} \Lambda^{-1} S^{-1} E_k^{(s)}, \ k \in K,$$

где $E_k^{(s)}$ – $k$-й столбец матрицы $E^{(s)}$.

Пусть $M \in I$ – количество отрицательных собственных чисел матрицы $Q$.

Предположим, что $M$ – четно. Тогда

$$G^p = \begin{cases} \sum_{k \in K} d_k^{(s)}(n+r), \text{ если } r \text{ четное;} \\ \sum_{k \in K} d_k^{(s)}(n+r+1), \text{ если } r \text{ нечетное,} \end{cases} \tag{9}$$

где

$$d_k^{(s)}(l) = \sum_{j=1}^{l} (-1)^j D_k^{(s)}(\rho_j^{(k)}), \ l \in \{2n+r, 2n+r+1\}.$$

Далее, существует $(2n + r)$-мерный вектор $w$ такой, что

$$w^T e^{\rho_j^{(k)}\Lambda} S^{-1} E_k^{(s)} = 1, \ k \in K, \ j = \{1, \ldots, 2n+r\}, \tag{10}$$

и оптимальное значение целевого функционала задается как

$$\tilde{F}_3 = \begin{cases} \sum_{k \in K} T_k^{(s)}(n+r), \text{ если } r \text{ четное;} \\ \sum_{k \in K} T_k^{(s)}(n+r+1), \text{ если } r \text{ нечетное,} \end{cases} \tag{11}$$

где

$$T_k^{(s)}(l) = -\overline{a}_k \sum_{j=1}^{l} (-1)^j \rho_j^{(k)}, \ l \in \{2n+r, 2n+r+1\}.$$

Пусть $M$ нечетно. В этом случае

$$G^{(s)} = \begin{cases} -\sum_{k \in K} d_k^{(s)}(2n+r+1), \text{ если } r \text{ четное;} \\ -\sum_{k \in K} d_k^{(s)}(2n+r), \text{ если } r \text{ нечетное,} \end{cases} \tag{12}$$

и существует $(2n + r)$-мерный вектор $w$ такой, что выполнено (10). Оптимальное значение целевого функционала задается как

$$\tilde{F}_3 = \begin{cases} -\sum_{k \in K} T_k^{(s)}(2n+r+1), \text{ если } r \text{ четное;} \\ -\sum_{k \in K} T_k^{(s)}(2n+r), \text{ если } r \text{ нечетное.} \end{cases} \tag{13}$$

## 3. КООРДИНИРУЮЩАЯ ЗАДАЧА

Теперь сформулируем координирующую задачу, являющуюся задачей оптимизации параметров. Заметим, что выполнены следующие условия:

$$\overline{A} \geq A^2, \ q \in [0, \overline{q}]. \tag{14}$$

Если $M$ четно, то для получения решения задачи P необходимо решить следующую параметрическую оптимизационную задачу:

$\mathrm{P}_+$:
$$p^T \tilde{m} - (t_1 - t_0) q + \sum_{i \in I} \tilde{F}_1^{(i)} + \tilde{F}_2 + \tilde{F}_3 \to \max$$

при условиях (3), (14), (4)–(6), (8)–(10), где $\tilde{F}_1^{(i)}$ определяется из (2) $\forall i \in I$, $\tilde{F}_2$ определяется из (7), $\tilde{F}_3$ определяется из (11).

Если $M$ нечетно, необходимой для решения параметрической оптимизационной задачей становится

$$\mathrm{P}_-: \qquad p^T\tilde{m}-(t_1-t_0)q+\sum_{i\in I}\tilde{F}_1^{(i)}+\tilde{F}_2+\tilde{F}_3\to\max$$

при условиях (3), (14), (4)–(6), (8), (10), (12), где $\tilde{F}_1^{(i)}\forall i\in I$ определяется из (2), $\tilde{F}_2$ определяется из (7), $\tilde{F}_3$ определяется из (13).

Обе задачи $\mathrm{P}_+$ и $\mathrm{P}_-$ являются задачами нелинейного программирования с $3n+2r+1$ переменными параметрами $\tilde{m}, q, \tilde{A}, \overline{A}$, $(3n+2r)\cdot d$ переменными моментами переключения $\tau_1^{(k)},\ldots,\tau_{n+r}^{(k)}$, $\rho_1^{(k)},\ldots,\rho_{2n+r}^{(k)}, k\in K$, $(n+r)$-мерным вектором переменных $v$ и $(2n+r)$-мерным вектором переменных $w$. Кроме того, задача содержит $(3n+2r)\cdot(d+1)$ нелинейных ограничений-равенств и несколько ограничений-неравенств. Целевые функции этих задач довольно просты, но ограничения-равенства являются нелинейными и не могут быть явно разрешены. Заметим, что ограничения параметрической оптимизационной задачи являются необходимыми и достаточными условиями существования решения в задаче P.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена и исследована модель оптимального управления с несколькими видами коммуникаций для определения оптимального темпа затрат в многосекторном рынке для каждого сегмента рынка и каждого продавца. Заметим, что если имеется только один сегмент рынка и только один продавец (т.е. $n = r = 1$) и если мы a priory предположим, что все коммуникационные темпы затрат подразделяются на две части (одна для продавца и одна для потребителя), то получим модель, представленную в [15]. Более того, в этом случае мы, в частности, видели, что значения собственных чисел матрицы уравнений определяют тип альтернативных оптимальных коммуникаций. Отсюда следует, что если происходит насыщение рынка и гудвилл падает (что может рассматриваться как негативный для фирмы фактор) сильнее, чем происходит улучшение устной репутации и увеличение гудвилла (что может рассматриваться как положительный для фирмы фактор), то более выгодно использовать рекламу в середине периода продаж. С другой стороны, рекламу удобно использовать в начале периода продаж, а затем к концу этого периода укрепить гудвилл фирмы. В рассмотренной здесь модели выбор типа коммуникаций из имеющихся альтернатив в период продаж зависит от четности/нечетности количества отрицательных собственных чисел матрицы уравнений. Мы надеемся, что такая довольно простая интерпретация (соотношение между положительными и отрицательными факторами для фирмы, продавцов и сегментов рынка) может служить основанием для подобного обобщения модели. В связи с этим кажется уместным исследование параметрической оптимизационной задачи P.

Описанный подход допускает различные обобщения: на модели максимизации эффективности рекламных затрат [12] и ценообразования при ритейлинге [16]. Кроме того, представляется интересным применить предлагаемый подход на различные варианты моделей монополистической конкуренции [23]: ритейлинга [4, 18, 19], инвестиций в НИОКР [1–3, 6, 10, 11, 20], либерализации торговли [17].

### Литература

1. *Антощенкова И.В., Быкадоров И.А.* Модель монополистической конкуренции: влияние технологического прогресса на равновесие и общественную оптимальность // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6. Вып. 2. С. 3–31.
2. *Барабаш С.Б., Быкадоров И.А., Пудова М.В.* Модели монополистической конкуренции: лидерство ритейлера при условии «свободы входа» // Вестник НГУЭУ. 2016. № 4. С. 315–326.
3. *Быкадоров И.А., Коковин С.Г.* Эффективность рыночной власти ритейлеров: случай монополистической конкуренции производителей // Вестник НГУЭУ. 2014. № 1. С. 166–337.
4. *Быкадоров И.А., Коковин С.Г., Желободько Е.В.* Товарное разнообразие в вертикальном распределительном канале при монополистической конкуренции // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. Вып. 2. С. 3–41.
5. *Быкадоров И.А., Моретти Е., Эллеро А.* Об одной модели сегментированного маркетинга // Мир экономики и управления. 2009. Т. 9. Вып. 4. С. 67–83.
6. *Быкадоров И. А., Пудова М.В.* Влияние государства на посредника через регулирование платы за вход // Информационные системы и процессы: сб. науч. трудов; Новосибирск. гос. ун-т экономики и управления / отв. ред. Ю.А. Щеглов. Новосибирск: НГУЭУ, 2015. С. 7–14.
7. *Быкадоров И.А., Пудова М.В.* Модель маркетинга на многосегментном рынке // Математические методы в прикладных исследованиях: сборник научных трудов; Новосиб. гос. ун-т экономики и управления. Вып. 5. Новосибирск: НГУЭУ, 2012. С. 24–39.
8. *Быкадоров И.А., Пудова М.В.* Оптимизация структуры коммуникационных затрат // Вестник НГУЭУ. 2014. № 2. С. 286–297.
9. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов / 2-е изд. М.: Наука, 1969. 384 с.
10. *Antoshchenkova I.V., Bykadorov I.A.* Monopolistic competition model: The impact of technological innovation on equilibrium and social optimality // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78, No. 3. P. 537–556.
11. *Bykadorov I., Ellero A., Funari S., Kokovin S., Pudova M.* Chain Store Against Manufacturers: Regulation Can Mitigate Market Distortion // Lecture Notes in Computer Science. 2016. Vol. 9869. DOOR-2016 / Editors Kochetov, Yu. et all. Heidelberg: Springer. P. 480–493.
12. *Bykadorov I., Ellero A., Funari S., Moretti E.* Dinkelbach Approach to Solving a Class of Fractional Optimal Control Problems // Journal of Optimization Theory and Applications. 2009. Vol. 142. No. 1. P. 55–66.
13. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* A model for communication in a multi-segment market // Biomedical Soft Computing and Human Sciences, 2013. Vol. 18. No. 1. P. 21–26.
14. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* A model for the marketing of a seasonal product with different goodwills for consumer and retailer // Journal of Statistics & Management Systems. 2003. Vol. 6. No. 1. P. 115–133.
15. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* Minimization of communication expenditure for seasonal Products // RAIRO Operations Research. 2002. Vol. 36. No. 2. P. 109–127.
16. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E., Vianello S.* The role of retailer's performance in optimal wholesale price discount policies // European Journal of Operational Research. 2009. Vol. 194. No. 2. P. 538–550.

17. *Bykadorov I., Gorn A., Kokovin S., Zhelobodko E.* Why are losses from trade unlikely? // Economics Letters. 2015. Vol. 129. P. 35–38.
18. *Bykadorov I.A., Kokovin S.G., Zhelobodko E.V.* Product Diversity in a Vertical Distribution Channel under Monopolistic Competition // Automation and Remote Control. 2014. Vol. 75. No. 8. P. 1503–1524.
19. *Bykadorov I., Kokovin S., Zhelobodko E.* Product Diversity in a Vertical Distributional Channel under Monopolistic Competition // Contributions to game theory and management. Vol. 4. 2011. Collected papers presented on the Fourth International Conference Game Theory and Management (GTM2010) / Ed. Leon A. Petrosyan and Nikolay A. Zenkevich. SPb.: Graduate School of Management SpbU. P. 71–104.
20. *Bykadorov I., Kokovin S., Zhelobodko E.* Investments in productivity and quality under trade liberalization: monopolistic competition model // Contributions to game theory and management. Vol. 5. 2012. Collected papers presented on the Fifth International Conference Game Theory and Management (GTM2011) / Ed. Leon A. Petrosyan and Nikolay A. Zenkevich. SPb.: Graduate School of Management SpbU. P. 61–72.
21. *Favaretto D., Viscolani B.* A single season production and advertising control problem with bounded final goodwill // Journal of Information and Optimization Sciences, 2000. Vol. 21. P. 337–357.
22. *Seierstad A., Sydsæter K.* Optimal Control Theory with Economic Applications // North-Holland, Amsterdam, 1987.
23. *Zhelobodko E., Kokovin S., Parenti M., Thisse J.-F.* Monopolistic competition in general equilibrium: Beyond the Constant Elasticity of Substitution // Econometrica. 2012. Vol. 80. No. 6. P. 2765–2784.

## Bibliography

1. *Antoshhenkova I.V., Bykadorov I.A.* Model’ monopolisticheskoj konkurencii: vlijanie tehnologicheskogo progressa na ravnovesie i obshhestvennuju optimal’nost’ // Matematicheskaja teorija igr i ee prilozhenija. 2014. T. 6. Vyp. 2. P. 3–31.
2. *Barabash S.B., Bykadorov I.A., Pudova M.V.* Modeli monopolisticheskoj konkurencii: liderstvo ritejlera pri uslovii «svobody vhoda» // Vestnik NGUJeU. 2016. № 4. P. 315–326.
3. *Bykadorov I.A., Kokovin S.G.* Jeffektivnost’ rynochnoj vlasti ritejlerov: sluchaj monopolisticheskoj konkurencii proizvoditelej // Vestnik NGUJeU. 2014. № 1. P. 166–337.
4. *Bykadorov I.A., Kokovin S.G., Zhelobod’ko E.V.* Tovarnoe raznoobrazie v vertikal’nom raspredelitel’nom kanale pri monopolisticheskoj konkurencii // Matematicheskaja teorija igr i ejo prilozhenija. 2010. T. 2. Vyp. 2. P. 3–41.
5. *Bykadorov I.A., Moretti E., Jellero A.* Ob odnoj modeli segmentirovannogo marketinga // Mir jekonomiki i upravlenija. 2009. T. 9. Vyp. 4. P. 67–83.
6. *Bykadorov I.A., Pudova M.V.* Vlijanie gosudarstva na posrednika cherez regulirovanie platy za vhod // Informacionnye sistemy i processy: sb. nauch. trudov; Novosibirsk. gos. un-t jekonomiki i upravlenija / otv. red. Ju.A. Shheglov. Novosibirsk: NGUJeU, 2015. P. 7–14.
7. *Bykadorov I.A., Pudova M.V.* Model’ marketinga na mnogosegmentnom rynke // Mate-maticheskie metody v prikladnyh issledovanijah: sbornik nauchnyh trudov; Novosib. gos. un-t jekonomiki i upravlenija. Vyp. 5. Novosibirsk: NGUJeU, 2012. P. 24–39.
8. *Bykadorov I.A., Pudova M.V.* Optimizacija struktury kommunikacionnyh zatrat // Vestnik NGUJeU. 2014. № 2. P. 286–297.
9. *Pontrjagin L.S., Boltjanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishhenko E.F.* Matematicheskaja teorija optimal’nyh processov / 2-e izd. M.: Nauka, 1969. 384 p.

10. *Antoshchenkova I.V., Bykadorov I.A.* Monopolistic competition model: The impact of technological innovation on equilibrium and social optimality // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78, No. 3. P. 537–556.
11. *Bykadorov I., Ellero A., Funari S., Kokovin S., Pudova M.* Chain Store Against Manufacturers: Regulation Can Mitigate Market Distortion // Lecture Notes in Computer Science. 2016. Vol. 9869. DOOR-2016 / Editors Kochetov, Yu. et all. Heidelberg: Springer. P. 480–493.
12. *Bykadorov I., Ellero A., Funari S., Moretti E.* Dinkelbach Approach to Solving a Class of Fractional Optimal Control Problems // Journal of Optimization Theory and Applications. 2009. Vol. 142. No. 1. P. 55–66.
13. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* A model for communication in a multi-segment market // Biomedical Soft Computing and Human Sciences, 2013. Vol. 18. No. 1. P. 21–26.
14. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* A model for the marketing of a seasonal product with different goodwills for consumer and retailer // Journal of Statistics & Management Systems. 2003. Vol. 6. No. 1. P. 115–133.
15. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* Minimization of communication expenditure for seasonal Products // RAIRO Operations Research. 2002. Vol. 36. No. 2. P. 109–127.
16. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E., Vianello S.* The role of retailer's performance in optimal wholesale price discount policies // European Journal of Operational Research. 2009. Vol. 194. No. 2. P. 538–550.
17. *Bykadorov I., Gorn A., Kokovin S., Zhelobodko E.* Why are losses from trade unlikely? // Economics Letters. 2015. Vol. 129. P. 35–38.
18. *Bykadorov I.A., Kokovin S.G., Zhelobodko E.V.* Product Diversity in a Vertical Distribution Channel under Monopolistic Competition // Automation and Remote Control. 2014. Vol. 75. No. 8. P. 1503–1524.
19. *Bykadorov I., Kokovin S., Zhelobodko E.* Product Diversity in a Vertical Distributional Channel under Monopolistic Competition // Contributions to game theory and management. Vol. 4. 2011. Collected papers presented on the Fourth International Conference Game Theory and Management (GTM2010) / Ed. Leon A. Petrosyan and Nikolay A. Zenkevich. SPb.: Graduate School of Management SpbU. P. 71–104.
20. *Bykadorov I., Kokovin S., Zhelobodko E.* Investments in productivity and quality under trade liberalization: monopolistic competition model // Contributions to game theory and management. Vol. 5. 2012. Collected papers presented on the Fifth International Conference Game Theory and Management (GTM2011) / Ed. Leon A. Petrosyan and Nikolay A. Zenkevich. SPb.: Graduate School of Management SpbU. P. 61–72.
21. *Favaretto D., Viscolani B.* A single season production and advertising control problem with bounded final goodwill // Journal of Information and Optimization Sciences, 2000. Vol. 21. P. 337–357.
22. *Seierstad A., Sydsæter K.* Optimal Control Theory with Economic Applications // North-Holland, Amsterdam, 1987.
23. *Zhelobodko E., Kokovin S., Parenti M., Thisse J.-F.* Monopolistic competition in general equilibrium: Beyond the Constant Elasticity of Substitution // Econometrica. 2012. Vol. 80. No. 6. P. 2765–2784.