4. **Dickinson H., Bostick W. H., Di Marco J. N., Koslov S.** Experimental study of Rayleigh — Taylor instability in plasma // Phys. Fluids.— 1962.— V. 5, N 9.
5. **Davidson R. C., Krall N. A.** Anomalous transport in high-temperature plasmas with applications to solenoidal fusion systems // Nuclear Fusion.— 1977.— V. 17, N 6.
6. **Захаров Ю. П., Оришич А. М., Пономаренко А. Г.** Лазерная плазма и лабораторное моделирование нестационарных космических процессов.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1988.
7. **Райзер Ю. П.** О торможении и превращениях энергии плазмы, расширяющейся в пустом пространстве, в котором имеется магнитное поле // ПМТФ.— 1963.— № 6.
8. **Poukey J. W.** Expansion of a plasma shell into a vacuum magnetic field // Phys. Fluids.— 1969.— V. 12, N 7.
9. **Бахрах С. М., Губков Е. В., Жмайло В. А. и др.** Разлет плазменного облака в однородном магнитном поле // ПМТФ.— 1974.— № 4.
10. **Головизнин В. М., Коршия Т. К., Любимов Б. Я. и др.** Численное исследование разлета плазмы в магнитном поле.— М., 1978.— (Препр./Ин-т прикл. математики АН СССР; № 61).
11. **Башурин В. П., Голубев А. И., Терехин В. А.** О бесстолкновительном торможении ионизированного облака, разлетающегося в однородную замагниченную плазму // ПМТФ.— 1983.— № 5.
12. **Березин Ю. А., Вшивков В. А., Снытников В. П.** Численная кинетико-гидродинамическая модель плазмы в магнитном поле // ЧММСС.— 1984.— Т. 15, № 3.
13. **Метелкин Е. В.** О поляризации плазменного облака, расширяющегося в неоднородном магнитном поле // ПМТФ.— 1989.— № 3.
14. **Кролл Н., Трайвелпис А.** Основы физики плазмы.— М.: Мир, 1975.
15. **Заславский Г. М., Моисеев С. С.** О влиянии магнитной вязкости на устойчивость плазмы с анизотропным давлением // ПМТФ.— 1962.— № 6.
16. **Кадомцев Б. Б.** Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы.— М.: Госатомиздат, 1963.— Вып. 2.
17. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1976.— Т. 1.
18. **Мусхелишвили И. И.** Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Физматгиз, 1962.
19. **Франк-Каменецкий Д. А.** Лекции по физике плазмы.— М.: Атомиздат, 1968.
20. **Шикин И. С.** Магнитогидродинамические уравнения для плазмы без столкновений с учетом магнитной вязкости // Проблемы современной механики.— М.: Изд-во МГУ, 1983.— Ч. 2.
21. **Титчмарш Е. С.** Введение в теорию интегралов Фурье.— М.: Гостехиздат, 1948.
22. **Кестенбойм Х. С., Метелкин Е. В., Федорович Г. В., Фролов А. Г.** О желобковой неустойчивости плазменного облака, разлетающегося в однородном магнитном поле.— М., 1989.— (Препр./Ин-т проблем механики АН СССР; № 371).

г. Москва *Поступила 6/XII 1990 г., в окончательном варианте — 24/VII 1991 г.*

УДК 535.434 : 551.593

Н. Н. Белов, С. О. Суслов

АСИМПТОТИКИ ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ НЕПОГЛОЩАЮЩИХ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ ЧАСТИЦ

В последнее время большой интерес представляет расчет характеристик светорассеяния малых сферических частиц с радиально-неоднородным показателем преломления [1—3]. Аналитическое решение эта задача имеет лишь в некоторых частных случаях [1, 2], поэтому возникает необходимость разработки численных методов для ее решения [1, 3]. Одним из них является метод фазовых функций [4], позволяющий достаточно точно рассчитывать оптические характеристики радиально-неоднородных частиц при сравнительно небольших затратах машинного времени и открывающий широкие перспективы исследования оптики таких частиц. Однако некоторые вопросы, связанные с данным методом, остаются до сих пор не решенными. В частности, не найдены выражения, описывающие поведение фазовых функций вблизи центра шара, использование которых повысит точность получаемых результатов. Отсутствуют также критерии оценки точности расчетов указанным методом. Эти пробелы восполняются в настоящей работе.

Рассмотрим немагнитные и непоглощающие сферические частицы с радиальной зависимостью показателя преломления $n(r)$. Будем считать, что $n(r)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Обозначим через a радиус частицы, k — волновое число падающего излучения, $x = ka$ — параметр дифракции частицы. Согласно методу фазовых функций, коэффициенты ряда рассеяния [1, 2, 5] имеют вид

$$a_l = \frac{\psi_l(x)\, w_l'(x) - n^2(x)\, \psi_l'(x)\, w_l(x)}{\xi_l(x)\, w_l'(x) - n^2(x)\, \xi_l'(x)\, w_l(x)}, \quad b_l = \frac{\psi_l(x)\, g_l'(x) - \psi_l'(x)\, g_l(x)}{\xi_l(x)\, g_l'(x) - \xi_l'(x)\, g_l(x)}, \tag{1}$$

где

$$g_l(x) = \cos\delta_l^c(x)\, \psi_l(x) - \sin\delta_l^c(x)\, \chi_l(x);$$

$$w_l(x) = \cos\delta_l^w(x)\, \psi_l(x) - \sin\delta_l^w(x)\, \chi_l(x);$$

$$g_l'(x) = \cos\delta_l^c(x)\, \psi_l'(x) - \sin\delta_l^c(x)\, \chi_l'(x);$$

$$w_l'(x) = \cos\delta_l^w(x)\, \psi_l'(x) - \sin\delta_l^w(x)\, \chi_l'(x);$$

δ_l^w и δ_l^c — фазовые функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d}{d\rho}\delta_l^w = (n^2(\rho) - 1)\left[\cos\delta_l^w(\rho)\, \psi_l(\rho) - \sin\delta_l^w(\rho)\, \chi_l(\rho)\right]^2 - \tag{2}$$

$$- [\ln(n^2(\rho))]'\left[\cos\delta_l^w(\rho)\, \psi_l(\rho) - \sin\delta_l^w(\rho)\, \chi_l(\rho)\right]\left[\cos\delta_l^w(\rho)\, \psi_l'(\rho) - \right.$$

$$\left. - \sin\delta_l^w(\rho)\, \chi_l'(\rho)\right],$$

$$\frac{d}{d\rho}\delta_l^c = (n^2(\rho) - 1)\left[\cos\delta_l^c(\rho)\, \psi_l(\rho) - \sin\delta_l^c(\rho)\, \chi_l(\rho)\right]^2$$

с граничными условиями

$$\delta_l^w(0) = \delta_l^c(0) = 0; \tag{3}$$

ψ_l и χ_l — функции Риккати — Бесселя; ξ_l — функция Риккати — Ганкеля первого рода; $\psi_l(\rho) = (\pi\rho/2)^{1/2} J_{l+1/2}(\rho)$; $\chi_l(\rho) = (\pi\rho/2)^{1/2} N_{l+1/2}(\rho)$; $\xi_l(\rho) = \psi_l(\rho) + i\chi_l(\rho)$; $\rho = kr$; r — текущая координата.

Найдем выражения, описывающие поведение фазовых функций при $\rho \ll l$. Запишем уравнения (2) в интегральной форме

$$\delta_l^w(\rho) = \int_0^\rho dz\,(n^2(z) - 1)\left[\cos\delta_l^w(z)\, \psi_l(z) - \sin\delta_l^w(z)\, \chi_l(z)\right]^2 - \tag{4}$$

$$- [\ln(n^2(z))]'\left[\cos\delta_l^w(z)\, \psi_l(z) - \sin\delta_l^w(z)\, \chi_l(z)\right]\left[\cos\delta_l^w(z)\, \psi_l'(z) - \right.$$

$$\left. - \sin\delta_l^w(z)\, \chi_l'(z)\right],$$

$$\delta_l^c(\rho) = \int_0^\rho dz\,(n^2(z) - 1)\left[\cos\delta_l^c(z)\, \psi_l(z) - \sin\delta_l^c(z)\, \chi_l(z)\right]^2.$$

При $\rho \ll l$ фазы настолько малы [6], что в правых частях уравнений (4) можно сохранить лишь члены, содержащие $\cos\delta_l^w$ и $\cos\delta_l^c$. Тогда уравнения (4) приобретут вид

$$\delta_l^w(\rho) = \int_0^\rho dz\,(n^2(z) - 1)\,\psi_l^2(z) - [\ln(n^2(z))]'\,\psi_l(z)\,\psi_l'(z), \tag{5}$$

$$\delta_l^c(\rho) = \int_0^\rho dz\,(n^2(z) - 1)\,\psi_l^2(z).$$

Эти выражения и описывают поведение фазовых функций при $\rho \ll l$. Найдем условия применимости выражений (5). При переходе от (4) к (5) использованы соотношения

$$|\cos\delta_l^w(z)\, \psi_l(z)| \gg |\sin\delta_l^w(z)\, \chi_l(z)|, \quad |\cos\delta_l^w(z)\, \psi_l'(z)| \gg |\sin\delta_l^w(z)\, \chi_l'(z)|, \tag{6}$$

$$|\cos\delta_l^c(z)\, \psi_l(z)| \gg |\sin\delta_l^c(z)\, \chi_l(z)|, \quad |\cos\delta_l^c(z)\, \psi_l'(z)| \gg |\sin\delta_l^c(z)\, \chi_l'(z)|$$

при $0 < \rho < a$. Воспользуемся асимптотическими выражениями функций Риккати — Бесселя при $\rho \ll l$ ([5], формулы (5.1) и (5.2)):

$$\psi_l(\rho) \simeq \frac{\rho}{2\sqrt{2l}}\left(\frac{e\rho}{2l}\right)^l, \quad \chi_l(\rho) \simeq -\sqrt{2}\left(\frac{e\rho}{2l}\right)^l. \tag{7}$$

Согласно (7), в (6) эквивалентны друг другу первое и второе соотношения, а также третье и четвертое. Так как фазы малы, условия (6) можно записать как

$$\psi_l(z) \gg |\delta_l^w(z)\chi_l(z)|, \quad \psi_l(z) \gg |\delta_l^c(z)\chi_l(z)|. \tag{8}$$

Согласно (7), при малых ρ выражения (5) имеют вид

$$\delta_l^w = (n_0^2 - 1)\frac{\rho^3}{16(l+1)l^2}\left(\frac{e\rho}{2l}\right)^{2l} - \frac{n_0'}{n_0}\frac{\rho^2}{8l^2}\left(\frac{e\rho}{2l}\right)^l, \tag{9}$$

$$\delta_l^c = (n_0^2 - 1)\frac{\rho^3}{16(l+1)l^2}\left(\frac{e\rho}{2l}\right)^{2l},$$

где n_0 и n_0' — средние значения показателя преломления и его производной. При $\rho \ll l$ вторым слагаемым в выражении для δ_l^w можно пренебречь. С учетом (7) и (9) условия (8) запишем как

$$\frac{\rho}{2\sqrt{2l}}\left(\frac{e\rho}{2l}\right)^l \gg (n_0^2 - 1)\frac{\rho^3\sqrt{2}}{16^2 l}\left(\frac{e\rho}{2l}\right)^l \tag{10}$$

или

$$(n_0^2 - 1)\frac{\rho^2}{4l^2} \ll 1. \tag{11}$$

Это и является условием применимости асимптотик (5). Из (11), в частности, следует, что вблизи центра частицы зависимости $\delta_l^w(\rho)$ и $\delta_l^c(\rho)$ описываются выражениями (5) при любых значениях l.

Были произведены расчеты значений $\delta_l^w(\rho)$ и $\delta_l^c(\rho)$ для радиальных профилей $n(r)$:

(12а) $n(\rho) = (2 - (\rho/x)^2)^{1/2}$, $x = 5{,}0$ (линза Лунеберга [2]);
(12б) $n(\rho) = 1{,}5/(1 + 0{,}0051\rho^2)$, $x = 5{,}0$ [1].

На рис. 1, *а* изображены зависимости $\delta_5^w(\rho)$ и $\delta_5^c(\rho)$, полученные решением уравнений (2) (точки *1*, *2*) и согласно асимптотикам (5) (линии *3*, *4*) для профиля (12а), на рис. 1, *б* — зависимости $\delta_8^w(\rho)$ и $\delta_8^c(\rho)$ для профиля (12б). Сопоставляя решения уравнений (2) с асимптотиками (5), можно отметить достаточно хорошее соответствие выражений (5) зависимостям $\delta_l^w(\rho)$ и $\delta_l^c(\rho)$ даже при $\rho \simeq 5$, где нарушается условие (11). При малых ρ асимптотики (5) полностью совпадают с решениями уравнений (2).

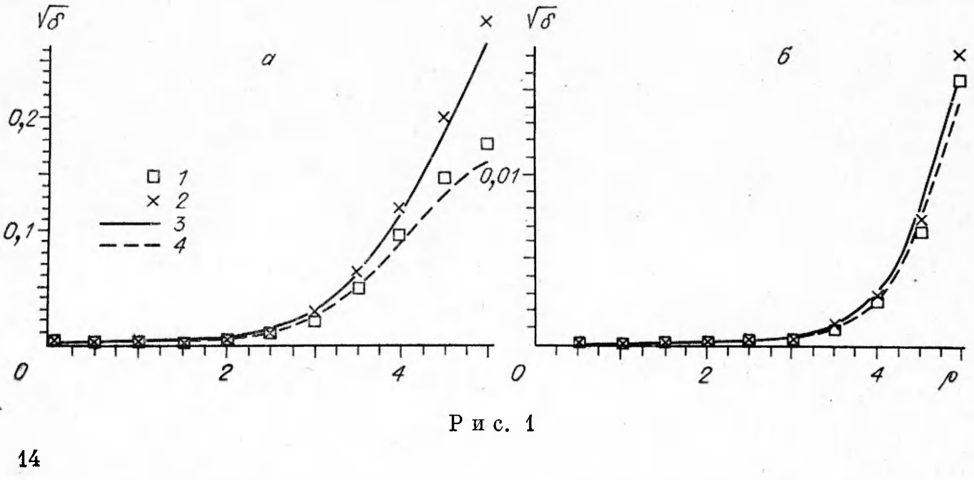

Рис. 1

Использование асимптотик (5) позволяет увеличить точность решения уравнений (2). Дело в том, что численное интегрирование уравнений (2) приходится начинать со значений $\rho > 0$, так как в нуле не определена функция $\chi_l(\rho)$. Выбор начальных значений фазовых функций, согласно (5), позволит увеличить точность расчетов.

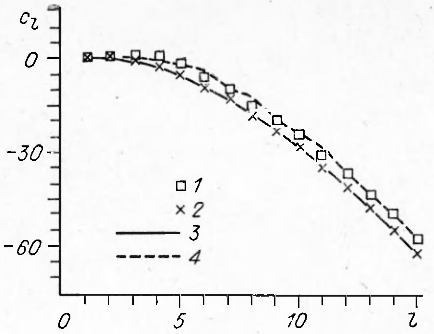

Рис. 2

Использование асимптотик (5) дает также возможность контролировать точность расчета коэффициентов рассеянного поля (1), вычисляемых методом фазовых функций или каким-либо другим методом [1]. Для этого в выражения (1) нужно подставить значения фаз $\delta_l^w(x)$ и $\delta_l^c(x)$ согласно (5). При выполнении условия (11) во всей частице найденные таким образом величины должны совпадать с вычисляемыми значениями коэффициентов a_l и b_l. По тому, с какой точностью совпадают полученные в результате расчетов коэффициенты a_l и b_l с их значениями согласно асимптотикам (5), можно оценить погрешности вычислений.

На рис. 2 приведены зависимости от номера l величины $c_l = |a_l|^2 + |b_l|^2$, рассчитанной для профилей (12а), (12б) методом фазовых функций (точки *1*, *2*) и согласно формулам (5) (линии *3*, *4*). При значениях l, превышающих параметр дифракции частиц $x = 5{,}0$, кривые практически совпадают, что подтверждает хорошую точность вычислений методом фазовых функций.

Таким образом, в работе рассмотрено поведение фазовых функций, являющихся решениями уравнений (2), и получены асимптотические выражения (5), описывающие поведение функций $\delta_l^w(\rho)$ и $\delta_l^c(\rho)$ при малых значениях ρ. Установлены условия применимости (11) выведенных асимптотик. Показано, что использование выражений (5) позволяет увеличить точность вычислений методом фазовых функций. Предложена также методика контроля точности вычисления коэффициентов рассеянного поля для частиц с радиально-неоднородным показателем преломления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пришивалко А. П., Бабенко В. А., Кузьмин В. Н.** Рассеяние и поглощение света неоднородными и анизотропными сферическими частицами.— Минск: Наука и техника, 1984.
2. **Kerker M.** The scattering of light and other electromagnetic radiation.— N. Y.; L.: Acad. Press, 1969.
3. **Mackowski D. W., Altenkirch R. A., Menguc M. P.** Internal absorption cross section in a stratified sphere // Appl. Optics.— 1990.— V. 29, N 10.
4. **Shafai L.** Scattering by spherically symmetrical objects // Can. J. Phys.— 1972.— V. 50, N 8.
5. **Борен К., Хафмен Д.** Поглощение и рассеяние света сферическими частицами.— М.: Мир, 1986.
6. **Бабиков В. В.** Метод фазовых функций в квантовой механике.— М.: Наука, 1988.

г. Москва *Поступила 2/VII 1991 г.*