

УДК 531.2:536.413.2  
DOI: 10.15372/PMTF202315385

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВЫРЕЗОМ ПРИ МЕХАНИЧЕСКИХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ В НЕЛОКАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Г. Н. Кувыркин, А. А. Соколов

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,  
Москва, Россия  
E-mails: fn2@bmstu.ru, Zokolof@yandex.ru

Проведено исследование влияния на концентрацию напряжений основных параметров нелокальной модели континуума при решении задачи о растяжении пластины с эллиптическим вырезом в ее центре, называемой также задачей Кирша. Изучено влияние температурного расширения среды на напряженно-деформированное состояние пластины. Проведено сравнение полученных результатов с классическими. Показано, что максимальные напряжение и плотность теплового потока уменьшаются, а деформация в зонах концентрации напряжений увеличивается.

**Ключевые слова:** нелокальная термоупругость, температурные напряжения, задача Кирша, метод конечных элементов

**Введение.** Материалы с микро- и наноструктурой широко применяются в микро- и наноэлектромеханических системах (МЭМС и НЭМС) и устройствах [1–3]. Основной причиной повреждения элементов МЭМС и НЭМС является их нагрев и, как следствие, расширение с последующим разрушением конструкции. Поэтому необходимо знать точные характеристики используемых материалов и их поведение при различных нагрузлениях. Однако для изучения поведения исследуемых микроструктур классические модели термоупругости неприменимы, так как в них используется гипотеза сплошности среды, которая непригодна на малых масштабах вследствие того, что расстояние между атомами сопоставимо с размерами рассматриваемого тела. На таких масштабах учет взаимодействия атомов приводит к значительному изменению поведения исследуемых материалов. Экспериментально показано, что на наномасштабах нарушается закон Фурье [4, 5] или уменьшается концентрация напряжений [6, 7].

Для объяснения обнаруженных эффектов разрабатываются новые модели, учитывающие структурные особенности среды, например, модели молекулярной динамики [8, 9]. Однако для использования этих моделей требуется большой объем вычислительных ресурсов, вследствие чего применяются более простые модели, основанные на классических уравнениях механики сплошной среды. К числу таких моделей относятся микрополярные модели [10], градиентные модели [11, 12] и нелокальная модель Эрингена [13], изучению

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (код проекта FSFN-2024-0004).

которой посвящена данная работа. В указанной модели основные уравнения принимают интегродифференциальную форму, что, с одной стороны, позволяет использовать хорошо изученные численные методы, например метод конечных элементов [14, 15], с другой — приводит к значительному усложнению расчетов [16] и анализа [17–19]. Такая постановка обеспечивает возможность учета дальнодействующих атомных потенциалов.

Наибольшему риску разрушения подвержены конструкции, имеющие разного рода геометрические особенности, например вырезы различной формы, которые используются для крепления деталей конструкции. Вырезы представляют опасность, так как служат концентраторами таких величин, как тепловые потоки, напряжения и деформации. При этом существенное влияние на степень концентрации оказывают форма выреза и направление нагружения. Однако, как отмечено выше, на наноуровне степень влияния концентраторов уменьшается. Проведено исследование влияния основных параметров модели нелокальной термоупругости на решения в области с эллиптическим вырезом. Выбор данной задачи обусловлен тем, что она имеет широкое применение [20, 21], а также хорошо исследована в рамках как классических моделей [22, 23], так и неклассических моделей механики сплошной среды, например, с использованием микрополярной теории упругости [10] или методов молекулярной динамики [9].

**1. Основные соотношения.** Определим линейный интегральный оператор [13], представляющий собой взвешенную сумму

$$\mathcal{N}(\ast) = p_1(\ast) + p_2 \iint_{S'(\mathbf{x}') \cap S} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')(\ast) dS'(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' \in S'(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где первое слагаемое — выражение с весовым множителем  $p_1$ , а второе слагаемое — то же выражение, взвешенное по области  $S'(\mathbf{x})$  с некоторой весовой функцией  $\varphi$  и весовым параметром  $p_2$ . В (1)  $(\ast)$  — некоторое выражение, описывающее сохраняющуюся физическую величину;  $p_1 > 0$ ,  $p_2 \geq 0$  — весовые параметры модели, такие что  $p_1 + p_2 = 1$ ;  $\varphi$  — функция нелокального влияния, некоторая нормированная положительная функция в области  $S'(\mathbf{x})$  с максимумом в центре этой области;  $\mathbf{x}'$  — точка в области  $S'(\mathbf{x})$ , в которой вычисляется влияние поля на значение поля в точке  $\mathbf{x}$ ;  $S'(\mathbf{x})$  — область нелокального влияния с центром в точке  $\mathbf{x}$ ;  $S$  — область, занимаемая рассматриваемым телом. Определения функции  $\varphi$  и области  $S'(\mathbf{x})$  связаны между собой. Обычно функция  $\varphi$  строится на основе метрических функций, определенных в области  $S'(\mathbf{x})$ , поэтому в качестве  $S'(\mathbf{x})$ , как правило, выбираются простые выпуклые области, например области, ограниченные окружностью или эллипсом, однако можно выбрать любую односвязную область.

Следует отметить, что для каждого физического процесса  $\mathcal{F}$  и материала можно определить собственный оператор (1) с набором весовых констант  $p_1$  и  $p_2$ , а также с функцией нелокального влияния  $\varphi$  и областью  $S'(\mathbf{x})$ . В данной работе, не теряя общности подхода, примем гипотезу, согласно которой для тепловых и механических постановок задачи применяется один и тот же оператор с одним и тем же набором параметров.

Запишем уравнения стационарной теплопроводности и равновесия:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad \nabla \cdot \hat{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Здесь вектор плотности теплового потока  $\mathbf{q}$  и тензор напряжений  $\hat{\sigma}$  определены с помощью гипотезы Био — Фурье и закона Дюамеля — Неймана и с использованием оператора (1) [24]:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(-\hat{\lambda} \cdot \nabla T), \quad \hat{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\hat{C} \cdot (\hat{\varepsilon} - \hat{\alpha}^T \Delta T)),$$

$\hat{\lambda} = \lambda_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  — тензор теплопроводности;  $\hat{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$  — тензор коэффициентов упругости;  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  — тензор деформации;  $\hat{\alpha} = \alpha_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  — тензор температурных коэффициентов линейного расширения;  $\Delta T = T - T_0$  — разность между текущей температурой  $T$  и начальной температурой  $T_0$ ;  $i, j, k, l = \overline{1, 2}$ .

Будем считать, что деформации малы, поэтому для определения тензора деформации  $\hat{\varepsilon}$  используем соотношение Коши

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Также будем учитывать, что рассматриваемый случай соответствует линейному упругому изотропному материалу в плоском напряженном состоянии. Тогда компоненты тензора упругости  $\hat{C}$  можно определить следующим образом:

$$C_{ijkl} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1 + \nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\delta_{ij}$  — дельта Кронекера. Также будем считать, что тепловое расширение происходит одинаково в любом направлении, поэтому тензор температурных коэффициентов линейного расширения является диагональным и имеет только один коэффициент  $\alpha^T$ :

$$\hat{\alpha}^T = \alpha^T \hat{I}$$

( $\hat{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  — единичный тензор). Тензор теплопроводности также имеет только один коэффициент  $\lambda$ :

$$\hat{\lambda} = \lambda \hat{I}.$$

Для уравнений теплопроводности и равновесия (2) будем рассматривать граничные условия первого и второго рода, которые можно записать следующим образом:

$$T|_{\Gamma_1} = T_\Gamma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|_{\Gamma_2} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_3} = \mathbf{d}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{n} \cdot \hat{\sigma}|_{\Gamma_4} = \mathbf{p}(\mathbf{x}).$$

Здесь  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial S$ ;  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$ ;  $T_\Gamma(\mathbf{x})$ ,  $f(\mathbf{x})$  — некоторые функции, задающие температуру и плотность теплового потока на границах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соответственно;  $\mathbf{d}(\mathbf{x}) = d_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$  — вектор перемещения, заданный на границе  $\Gamma_3$ ;  $\mathbf{p} = p_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$  — вектор плотности поверхностного нагружения на границе  $\Gamma_4$ . Будем полагать, что функции  $T_\Gamma$ ,  $f$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{p}$  равны нулю в тех областях, в которых они не определены.

В качестве численного метода решения выбран метод конечных элементов [14, 15], в результате применения которого получены системы уравнений

$$(p_1 \hat{K}_T^L + p_2 \hat{K}_T^{NL}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}; \quad (3)$$

$$(p_1 \hat{K}_E^L + p_2 \hat{K}_E^{NL}) \cdot \mathbf{U} = p_1 \mathbf{E}^L + p_2 \mathbf{E}^{NL} + \mathbf{P}, \quad (4)$$

где  $\hat{K}_T^L$ ,  $\hat{K}_T^{NL}$  — матрицы локальной и нелокальной теплопроводности;  $\mathbf{T}$  — вектор искомых узловых значений температуры;  $\mathbf{F}$  — вектор дискретизированных внешних источников и стоков теплоты;  $\hat{K}_E^L$ ,  $\hat{K}_E^{NL}$  — матрицы локальной и нелокальной жесткости;  $\mathbf{U}$  — вектор искомых узловых перемещений;  $\mathbf{E}^L$ ,  $\mathbf{E}^{NL}$  — векторы локального и нелокального линейного теплового расширения;  $\mathbf{P}$  — вектор дискретизированной плотности поверхностных сил. Более подробно конечно-элементная аппроксимация при решении нелокальных задач описана в работах [16, 25, 26]. Алгоритмы сборки матриц реализованы в рамках программного комплекса “NonLocFEM” [27].

**2. Переход к безразмерным переменным.** Для изучения различий между классической (локальной) и нелокальной теориями введем безразмерные величины

$$\bar{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{q_0}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}}{\sigma_0}, \quad \bar{E} = \frac{E}{\sigma_0}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{L}, \quad \bar{\alpha}^T = \frac{\alpha^T}{T_0},$$

где  $q_0$  — нормализующий множитель для вектора теплового потока;  $\lambda_0$  — нормализующий множитель для теплопроводности;  $\sigma_0$  — нормализующий множитель для напряжений;  $L$  — характерный размер пластины. Были выбраны следующие расчетные параметры: безразмерная теплопроводность  $\bar{\lambda} = 1$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , безразмерный модуль Юнга  $\bar{E} = 400$ , безразмерный температурный коэффициент линейного расширения  $\bar{\alpha}^T = 2,5 \cdot 10^{-3}$ .

При вариации весового параметра  $p_1$  будем рассматривать четыре основных случая: 1) нелокальные эффекты отсутствуют ( $p_1 = 1$ ); 2) локальное слагаемое существенно больше нелокального ( $p_1 = 0,75$ ); 3) локальное и нелокальное слагаемые имеют одинаковый вес ( $p_1 = 0,5$ ); 4) нелокальное слагаемое существенно больше локального ( $p_1 = 0,25$ ). Случай, когда локальное слагаемое отсутствует ( $p_1 = 0$ ), приводит к некорректно поставленным краевым задачам [28].

Для вычисления нелокальных матриц теплопроводности (3) и жесткости (4) необходимо выполнить достаточно ресурсоемкие операции, поэтому для упрощения расчетов следует ограничить область  $S'(\mathbf{x})$ , так чтобы она покрывала не всю поверхность рассматриваемого тела. В силу изотропности рассматриваемого материала можно предположить, что область  $S'(\mathbf{x})$  ограничена окружностью с фиксированным радиусом области нелокального влияния  $r$ . Затем необходимо определить функцию нелокального влияния  $\varphi$ , которая должна удовлетворять всем заданным выше свойствам. Таких функций может быть бесконечное множество, но в силу ресурсоемкости операции сборки матриц выберем функцию  $\varphi$  в виде квадратичной параболы, так как ее вычисление достаточно простое, при этом она удовлетворяет всем необходимым условиям, а выбор других функций не приводит к качественному изменению свойств получаемых решений [16]. Таким образом,

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} \left( 1 - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{r^2} \right), & |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq r, \\ 0, & |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > r. \end{cases}$$

Заметим, что при  $r \rightarrow 0$  функция нелокального влияния стремится к дельта-функции Дирака, при подстановке которой в (1) получаем обычновенный единичный оператор. Поэтому далее в случае  $r = 0$  будем считать, что проводился локальный расчет. В расчетах будем использовать также безразмерный радиус области нелокального влияния  $\bar{r} = r/L$ .

Расчеты проводились в области  $S = \{\mathbf{x}: -1 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$ . В центре области располагается эллиптический вырез. Полуоси эллипса сонаправлены с главными осями системы координат, центр которой находится в центре выреза, а их длины вдоль осей  $x_1, x_2$  равны  $R_1$  и  $R_2$  соответственно. В задачах длину полуоси  $R_1$  будем варьировать, а длину полуоси  $R_2$  будем считать постоянной и равной 0,1. В области введена сетка конечно-элементной модели  $S_h$ , состоящая из квадратичных серендипитовых элементов с характерным размером  $h = 0,005$ .

Наибольший интерес представляет исследование распределения полей напряжений и тепловых потоков на кромке выреза. Выделим дугу  $AB$  и введем угловую координату  $\theta$  (рис. 1). Тогда можно записать параметрические координаты дуги  $AB$

$$x_1(\theta) = R_1 \cos \theta, \quad x_2(\theta) = R_2 \sin \theta,$$

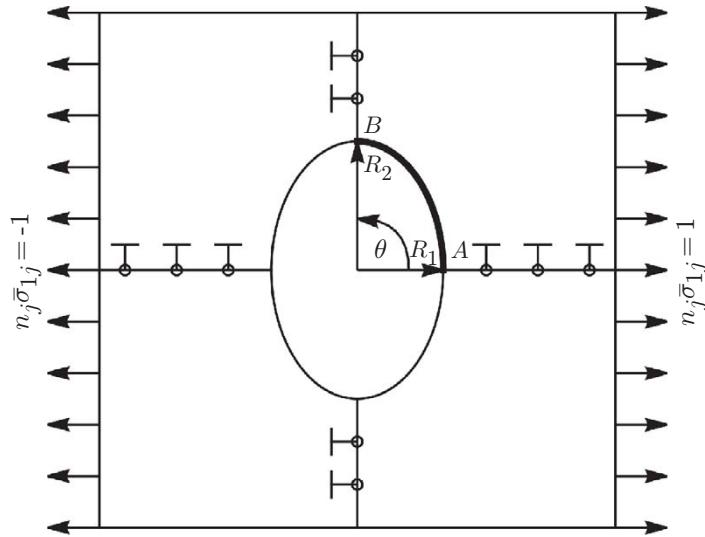


Рис. 1. Область с эллиптическим вырезом и заданными нагрузками

где угол  $\theta$  принимает значения в диапазоне от 0 до  $\pi/2$ . Затем вычисляем длину дуги  $l$  в зависимости от угла  $\theta$ :

$$l(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi}\right)^2} d\varphi.$$

Введем безразмерный параметр  $\bar{l}(\theta) = l(\theta)/l(\pi/2)$ . Дальнейшие результаты, получаемые на кромке  $AB$ , будем рассматривать в координатах безразмерного параметра длины  $\bar{l}(\theta)$ .

**3. Задача Кирша.** Рассмотрим задачу Кирша с обобщением на эллиптические вырезы. Для этого в области  $S$  зададим граничные и геометрические условия (см. рис. 1):

$$n_j \bar{\sigma}_{1j}|_{x_1=-1} = -1, \quad n_j \bar{\sigma}_{1j}|_{x_1=1} = 1, \quad u_1|_{x_1=0} = 0, \quad u_2|_{x_2=0} = 0.$$

Известно, что максимальные значения компоненты тензора напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  находятся в верхней и нижней точках эллипса и линейно зависят от отношения длин полуосей эллипса  $R_2/R_1$  и величины приложенной нагрузки  $\sigma_0$  [22, 23]:

$$\bar{\sigma}_{11}^{\max} = (1 + 2R_2/R_1)\sigma_0.$$

Однако в нелокальном случае максимальное напряжение уменьшается и зависит также от весового параметра  $p_1$  (табл. 1). Из результатов, представленных в табл. 1, следует, что величина  $\bar{\sigma}_{11}$  линейно зависит от параметра  $p_1$ :

$$\bar{\sigma}_{11}^{\max} = (1 + \varkappa R_2/R_1)\sigma_0.$$

Здесь  $\varkappa = \varkappa(p_1)$  — некоторый множитель, зависящий от  $p_1$ . Такая зависимость получена эвристическим путем и не имеет теоретического обоснования, однако достаточно точно аппроксимирует полученные значения и может быть использована при проведении оценочных расчетов, когда не требуется очень высокая точность. Значение параметра  $\varkappa$  для конкретного значения  $p_1$  можно подобрать на основе нескольких расчетов при различных значениях  $R_1$ . Заметим, что подобное уменьшение максимального напряжения наблюдалось при проведении исследований с использованием моментной теории упругости [10]. Также методами молекулярной динамики можно моделировать ситуации, когда дефекты структуры материала ослабляют концентратор [9].

Таблица 1

Максимальные значения напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  в зависимости от длины полуоси  $R_1$  и весового параметра  $p_1$  при  $\bar{r} = 0,05$ ,  $R_2 = 0,1$

$R_1$	$\bar{\sigma}_{11}$			
	$p_1 = 1,00$	$p_1 = 0,75$	$p_1 = 0,50$	$p_1 = 0,25$
0,100	3,052	2,691	2,299	1,938
0,075	3,692	3,262	2,782	2,215
0,050	4,976	4,399	3,742	2,913

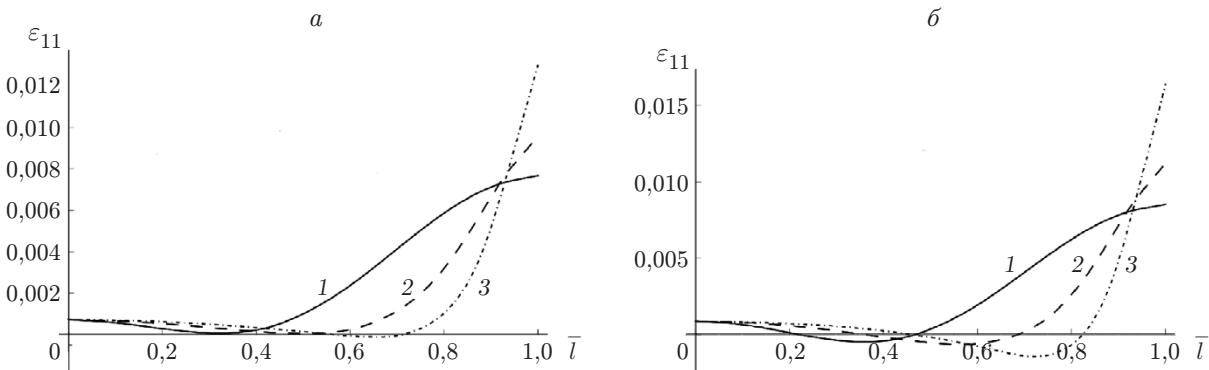


Рис. 2. Распределение деформации  $\varepsilon_{11}$  на кромке  $AB$  при  $p_1 = 1$ ,  $\bar{r} = 0$  (а),  $p_1 = 0,5$ ,  $\bar{r} = 0,05$  (б) и различной длине полуоси  $R_1$ :  
1 —  $R_1 = R_2$ , 2 —  $R_1 = 0,75R_2$ , 3 —  $R_1 = 0,5R_2$

При уменьшении длины полуоси эллипса  $R_1$  наряду с напряжением  $\bar{\sigma}_{11}$  увеличивается максимальная деформация  $\varepsilon_{11}$  (рис. 2). Из рис. 2 следует, что максимальная деформация  $\varepsilon_{11}$  резко увеличивается вблизи точки  $B$  (см. рис. 1). В нелокальном случае деформация также увеличивается вблизи точки  $B$ , при этом вблизи концентратора появляется область с отрицательными значениями. Такой же эффект можно наблюдать при решении нелокальных задач в других областях с концентраторами [29] и в экспериментах [30].

При уменьшении параметра  $p_1$  деформация  $\varepsilon_{11}$ , в отличие от напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$ , в зоне концентрации увеличивается. Также увеличивается зона с отрицательными значениями деформации, при этом сами значения деформации в ней увеличиваются по модулю. При увеличении радиуса области нелокальности  $\bar{r}$  деформация также увеличивается, но менее существенно (рис. 3). Следует отметить, что изменение величины  $\bar{r}$  практически не оказывает влияния на максимальное значение напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$ .

**4. Температурные деформации.** Рассмотрим задачу в той же области с учетом температурных деформаций. Для этого пропустим через область  $S$  тепловой поток, задав граничные и геометрические условия (рис. 4):

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \Big|_{x_1=-1} = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \Big|_{x_1=1} = -1, \quad \bar{u}_2 \Big|_{x_2=0} = 0.$$

Для выполнения условия единственности решений добавим интегральные условия

$$\iint_S T dS = 0, \quad \iint_S u_1 dS = 0.$$

Данная постановка позволяет качественно оценить поведение температурных напряжений без учета влияния концентрации напряжений, обусловленных геометрией области или граничными условиями.

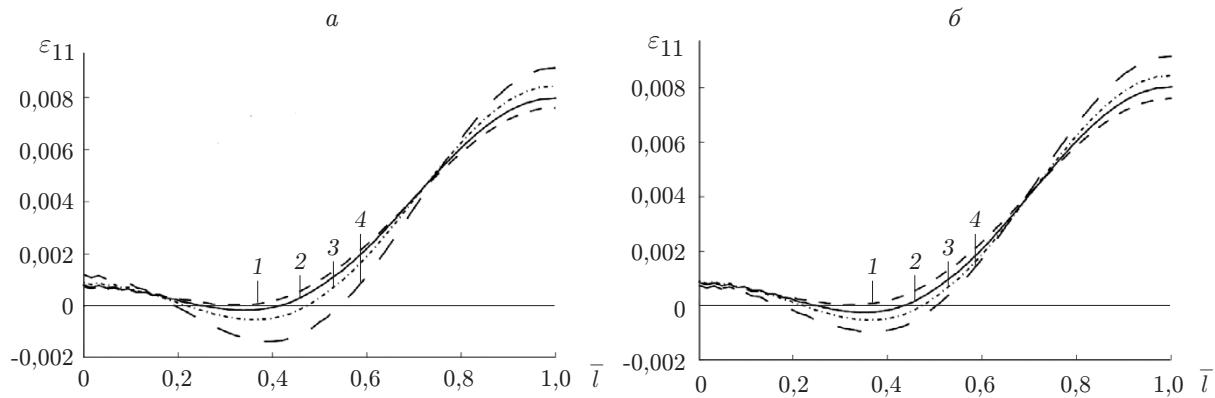


Рис. 3. Распределение деформации  $\varepsilon_{11}$  на кромке  $AB$  при  $R_1 = R_2$  и различных значениях  $p_1$  и  $\bar{r}$ :

*a* —  $\bar{r} = 0,05$  (1 —  $p_1 = 1$ , 2 —  $p_1 = 0,75$ , 3 —  $p_1 = 0,5$ , 4 —  $p_1 = 0,25$ ), *b* —  $p_1 = 0,5$  (1 —  $\bar{r} = 0$ , 2 —  $\bar{r} = 0,025$ , 3 —  $\bar{r} = 0,05$ , 4 —  $\bar{r} = 0,1$ )

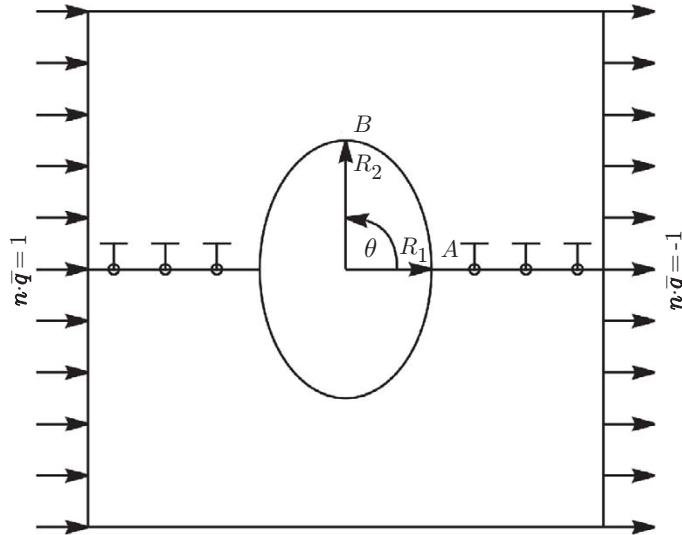


Рис. 4. Область с эллиптическим вырезом и заданным тепловым потоком

Сначала исследуем поведение теплового потока при вариации основных параметров модели. Будем рассматривать первую компоненту потока, так как при данной постановке задачи она представляет наибольший интерес. Поведение этой компоненты подобно поведению компоненты тензора напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  в задаче Кирша. Максимумы находятся в верхней и нижней точках выреза и зависят от отношения длин радиусов и проходящего потока:

$$\bar{q}_1^{\max} = (1 + R_2/R_1)q_0,$$

где  $q_0$  — проходящий через границы поток. Аналогично задаче Кирша при увеличении вклада нелокального влияния максимальная величина потока в концентраторах уменьшается и линейно зависит от отношения длин полуосей эллипса и проходящего через границы области теплового потока. Максимальные значения  $\bar{q}_1$  при различных значениях весового параметра и длины полуоси  $R_1$  приведены в табл. 2.

Определим температурные напряжения, возникающие при тепловой постановке задачи. С использованием интегральных условий получены симметричные решения, в которых

Таблица 2

Максимальные значения компоненты теплового потока  $\bar{q}_1$  в зависимости от длины полуоси  $R_1$  и весового параметра  $p_1$  при  $\bar{r} = 0,05$ ,  $R_2 = 0,1$

$R_1$	$\bar{q}_1$			
	$p_1 = 1,00$	$p_1 = 0,75$	$p_1 = 0,50$	$p_1 = 0,25$
0,100	2,001	1,777	1,598	1,572
0,075	2,332	2,072	1,791	1,667
0,050	2,981	2,663	2,306	1,882

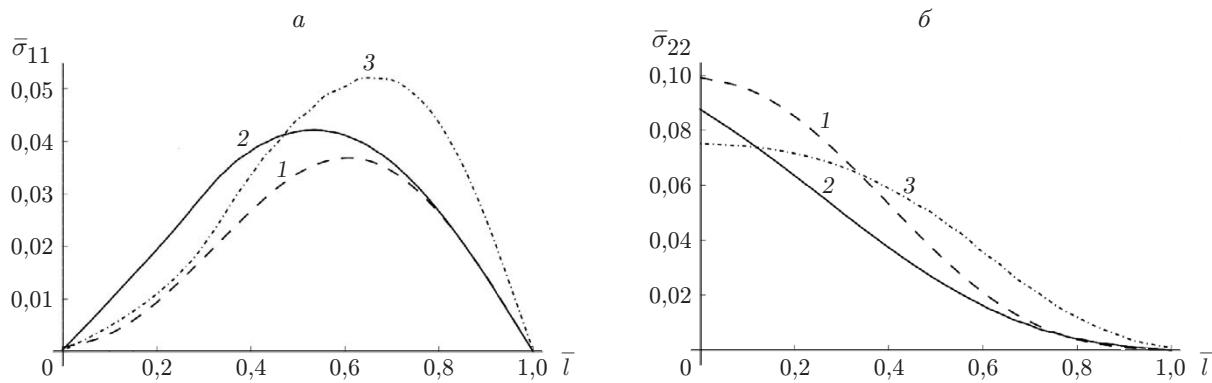


Рис. 5. Распределения напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  (а) и  $\bar{\sigma}_{22}$  (б) на кромке  $AB$  при  $\bar{r} = 0$ ,  $p_1 = 1$  и различных значениях длины полуоси  $R_1$ :  
1 —  $R_1 = R_2$ , 2 —  $R_1 = 0,75R_2$ , 3 —  $R_1 = 0,5R_2$

все напряжения сконцентрированы на кромке выреза. Заметим, что относительно оси  $x_1$  функции решения четные, а относительно  $x_2$  — нечетные. На рис. 5 видно, что максимальные значения компоненты  $\bar{\sigma}_{11}$  находятся не в верхней и нижней точках, как в задаче Кирша, а вблизи центра дуги  $AB$ . При уменьшении длины полуоси  $R_1$  максимальные значения  $\bar{\sigma}_{11}$  смещаются к верхней и нижней точкам, увеличиваясь. Компонента  $\bar{\sigma}_{22}$  имеет максимальные значения в левой и правой вершинах выреза. При уменьшении длины  $R_1$  максимальное значение начинает уменьшаться и решение монотонно убывает вдоль кромки выреза.

На рис. 6 показано влияние весового параметра модели  $p_1$  на напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{22}$ . В данном расчете, как и в проведенных выше расчетах, уменьшение значения  $p_1$  приводит к уменьшению максимального напряжения.

**Заключение.** Проведенные в работе расчеты показали, что наличие нелокальных эффектов может привести к уменьшению концентрации напряжений вокруг эллиптического отверстия, а также к увеличению деформации. Этот результат хорошо согласуется с экспериментальными и расчетными данными, полученными с помощью моделей молекулярной динамики.

Проведено исследование влияния отношения длин полуосей эллиптического выреза на концентрацию напряжений. Несмотря на нелокальность постановки задачи, максимальные значения напряжения линейно зависят от отношения длин полуосей и прикладываемой нагрузки, при этом появляется зависимость от весового параметра модели  $p_1$ . Полученные результаты могут быть использованы при оценке возможных максимальных нагрузок для объектов сnanoструктурой.

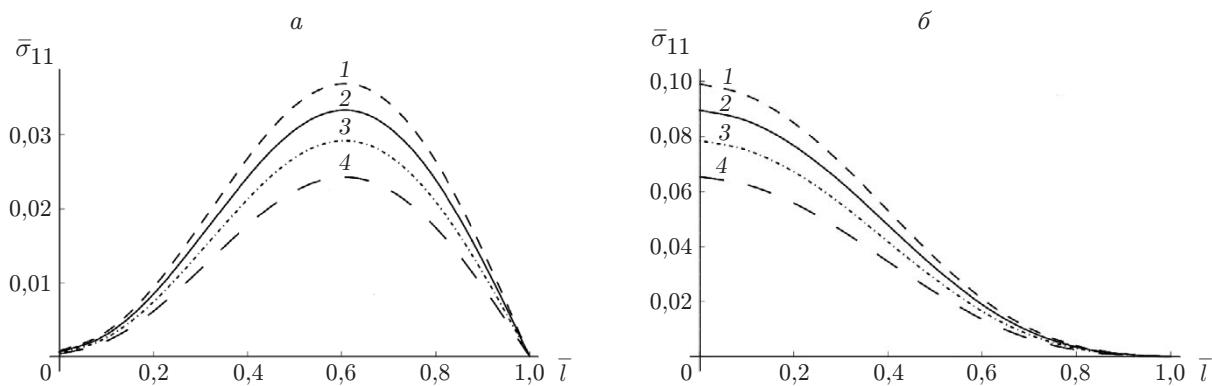


Рис. 6. Распределения напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  (а) и  $\bar{\sigma}_{22}$  (б) на кромке  $AB$  при  $\bar{r} = 0,05$ ,  $R_1 = R_2$  и различных значениях весового параметра  $p_1$ :  
1 —  $p_1 = 1$ , 2 —  $p_1 = 0,75$ , 3 —  $p_1 = 0,5$ , 4 —  $p_1 = 0,25$

Следует отметить, что параметры нелокальности могут быть определены в экспериментах с многослойными пленками, например в эксперименте по лазерному нагреву многослойного покрытия, нанесенного на подложку [31]. Кроме того, сопоставление результатов, полученных с использованием макромасштабных моделей (нелокальных, градиентных и др.), с результатами, полученными на основе моделей атомарного масштаба (молекулярной динамики и др.), позволяет не только установить связь между параметрами макро- и микроуровней [32], но и выбрать значения параметров нелокальности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Wang X., Chen Y., Yu J., et al. Reflection, transmission, and dissipation of plane waves in sandwiched functionally graded thermo-electro-elastic nanoplates via nonlocal integral elasticity theory // Composite Structures. 2023. V. 324. 117564. DOI: 10.1016/j.compstruct.2023.117564.
2. Zekry J., Vandeveld B., Bouwstra S., et al. Thermomechanical design and modeling of porous alumina-based thin film packages for MEMS // Proc. of the EuroSimE — 2010, Bordeaux (France), Apr. 26–28, 2010. S. l.: IEEE, 2010. P. 435–441. DOI: 10.1109/ESIME.2010.5464584.
3. Madkour L. H. Nanoelectronic materials: Fundamentals and applications. S. l.: Springer, 2019. (Advanced structured materials; V. 116). DOI: 10.1007/978-3-030-21621-4.
4. Chang C. W., Okawa D., Garcia H., et al. Breakdown of Fourier's law in nanotube thermal conductors // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. 075903. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.075903.
5. Yang N., Zhang G., Li B. Violation of Fourier's law and anomalous heat diffusion in silicon nanowires // Nano Today. 2010. ArXiv: 1002.3419. P. 85–90. DOI: 10.48550/arXiv.1002.3419.
6. Sandeep K., Aman H., Huajian G. Notch insensitive fracture in nanoscale thin films // Appl. Phys. Lett. 2009. V. 94, N 25. 253104. DOI: 10.1063/1.3157276.
7. Gu X. W., Wu Z., Zhang Y.-W., et al. Microstructure versus flaw: Mechanisms of failure and strength in nanostructures // Nano Lett. 2013. V. 13, N 11. P. 5703–5709. DOI: 10.1021/nl403453h.
8. Zhan H., Zhang G., Yang C., Gu Y. Breakdown of Hooke's law at nanoscale — 2D materials-based nanospring // Nanoscale. 2018. V. 10, iss. 40. P. 18961–18968. DOI: 10.1039/C8NR04882G.
9. Zhang T., Li X., Kadkhodaei S., Gao H. Flaw insensitive fracture in nanocrystalline graphene // Nano Lett. 2012. V. 12, N 9. P. 4605–4610. DOI: 10.1021/nl301908b.
10. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968.

11. **Ломакин Е. В., Лурье С. А., Рабинский Л. Н., Соляев Ю. О.** Об уточнении напряженного состояния в прикладных задачах упругости за счет градиентных эффектов // Докл. АН. 2019. Т. 489, № 6. С. 585–591. DOI: 10.31857/S0869-56524896585-591.
12. **Ватульян А. О., Нестеров С. А.** Решение задачи градиентной термоупругости для полосы с покрытием // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 163, кн. 2. С. 181–196. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196.
13. **Eringen A. C.** Nonlocal continuum field theories. N. Y.; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
14. **Zienkiewicz O.** The finite element method: Its basis and fundamentals. 7th ed. / O. Zienkiewicz, R. Taylor, J. Z. Zhu. Oxford: Butterworth — Heinemann, 2013.
15. **Bathe K.-J.** Finite element procedures. 2nd ed. S. l.: Prentice Hall, 2014.
16. **Kuvyrkin G. N., Savelyeva I. Yu., Sokolov A. A.** Features of the software implementation of the numerical solution of stationary heat equation taking into account the effects of nonlocal finite element method // J. Phys. Conf. Ser. 2020. V. 1479. 012034.
17. **Савельева И. Ю.** Вариационная формулировка математической модели процесса стационарной теплопроводности с учетом пространственной нелокальности // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2022. № 2. С. 68–86. DOI: 10.18698/1812-3368-2022-2-68-86.
18. **Савельева И. Ю.** Двойственная вариационная модель стационарного процесса теплопроводности, учитывающая пространственную нелокальность // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2022. № 5. С. 45–61. DOI: 10.18698/1812-3368-2022-5-45-61.
19. **Кувыркин Г. Н., Соколов А. А.** Принцип Сен-Венана в задачах нелокальной теории упругости // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2023. № 4. С. 4–17. DOI: 10.18698/1812-3368-2023-4-4-17.
20. **Глаголев В. В., Маркин А. А.** Влияние линейного параметра на хрупкое разрушение упругого слоя с круговым отверстием // ПМТФ. 2023. Т. 64, № 5. С. 159–165. DOI: 10.15372/PMTF202315252.
21. **Сукнев С. В.** Расчетно-экспериментальное исследование разрушения хрупкого материала с эллиптическим отверстием при сжатии // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 171–178.
22. **Биргер И. А.** Расчет на прочность деталей машин: Справ. 4-е изд., перераб. и доп. / И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, Г. Б. Иосилевич. М.: Машиностроение, 1993.
23. **Безухов Н. И.** Основы теории упругости и пластичности. М.: Высш. шк., 1968.
24. **Кувыркин Г. Н.** Математическая модель нелокальной термовязкоупругой среды. Ч. 1. Определяющие уравнения // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2013. № 1. С. 26–33.
25. **Polizzotto C.** Nonlocal elasticity and related variational principles // Intern. J. Solids Structures. 2001. V. 38. P. 7359–7380. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00039-7.
26. **Pisano A. A., Sofi A., Fuschi P.** Nonlocal integral elasticity: 2D finite element based solutions // Intern. J. Solids Structures. 2009. V. 46. P. 3836–3849.
27. **Соколов А. А., Савельева И. Ю.** Программа для ЭВМ “NonLocFEM”: Свидетельство о гос. регистрации ПрЭВМ, рег. № 2021661966 от 22.09.2022. М.: Роспатент, 2022.
28. **Pisano A. A., Fuschi P., Polizzotto C.** Integral and differential approaches to Eringen’s nonlocal elasticity models accounting for boundary effects with applications to beams in bending // Z. angew. Math. Mech. 2021. Bd 101, N 8. e202000152. DOI: 10.1002/zamm.202000152.
29. **Kuvyrkin G. N., Savelyeva I. Y., Sokolov A. A.** 2D nonlocal elasticity: Investigation of stress and strain fields in complex shape regions // Z. angew. Math. Mech. 2022. Bd 103, N 3. e202200308. DOI: 10.1002/zamm.202200308.

30. **Андреев А. В.** Инженерные методы определения концентрации напряжений в деталях машин. М.: Машиностроение, 1976.
31. **Qiu T. Q., Juhasz T., Suarez C., et al.** Femtosecond laser heating of multi-layer metals. 2. Experiments // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1994. V. 37, N 17. P. 2799–2808. DOI: 10.1016/0017-9310(94)90397-2.
32. **Jolley K., Gill S.** Modelling transient heat conduction in solids at multiple length and time scales: a coupled non-equilibrium molecular dynamics/continuum approach // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7412–7425. DOI: 10.1016/j.jcp.2009.06.035.

*Поступила в редакцию 18/IX 2023 г.,*

*после доработки — 11/XI 2023 г.*

*Принята к публикации 27/XI 2023 г.*