

УДК 532.546

ОПИСАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗОКОНДЕНСАТНОЙ СМЕСИ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ КАПИЛЛЯРЕ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛА ПЛОТНОСТИ

О. Ю. Динариев

Объединенный институт физики Земли РАН им. О. Ю. Шмидта, 123810 Москва

Методом функционала плотности исследовано изотермическое течение двухфазной многокомпонентной смеси в тонком осесимметричном капилляре. Найден вид главного члена асимптотического решения при малом отношении характерного радиуса капилляра к его длине. Получен уточненный закон переноса смеси. Обсуждается вид возможных поправок к закону Дарси для скоростей фильтрации фаз.

Ключевые слова: многокомпонентная двухфазная смесь, капилляр, асимптотическое решение, множители Лагранжа.

Для газоконденсатных и нефтегазовых месторождений характерна ситуация, когда пластовая углеводородная смесь претерпевает фазовый переход типа жидкость — газ. При разработке месторождения газ и жидкость перемещаются в поровом пространстве породы, взаимодействуя с породой и между собой за счет гидродинамических сил вязкого трения и обмена компонентами смеси при фазовом переходе. При макроскопическом описании движения двухфазной смеси в пористой среде используется закон фильтрации Дарси [1]

$$u_g^a = -\frac{k_g(s)}{\mu_g}(\partial_a p_g + \rho_g \partial_a \varphi), \quad u_l^a = -\frac{k_l(s)}{\mu_l}(\partial_a p_l + \rho_l \partial_a \varphi), \quad (1)$$

где u_g^a , u_l^a — скорость фильтрации газа и углеводородной жидкости (конденсата или нефти); p_g , p_l — давление в газе и жидкости; ρ_g , ρ_l — массовая плотность газа и жидкости; μ_g , μ_l — сдвиговая вязкость газа и жидкости; $k_g(s)$, $k_l(s)$ — фазовые проницаемости породы, зависящие от насыщенности жидкости s ; φ — гравитационный потенциал.

Классический закон фильтрации (1) учитывает трение подвижных фаз с породой. Представляет интерес его уточнение с учетом возможных перекрестных членов по градиентам давления в фазах, описывающих трение между подвижными фазами и инерционные эффекты.

В настоящей работе рассмотрена задача об установившемся изотермическом течении многокомпонентной двухфазной смеси в осесимметричном капилляре. В основу гидродинамического описания системы положен метод функционала плотности [2–5], не требующий априорного задания пространственного расположения межфазных границ. Для течения в тонком осесимметричном капилляре найден главный член асимптотического решения при разложении в ряд по степеням отношения характерного радиуса капилляра к его длине. На основе полученных результатов обсуждается вид возможных поправок в выражениях для скоростей фильтрации фаз (1).

Приведем основные уравнения, используемые при описании многокомпонентной смеси методом функционала плотности в изотермическом случае [2]. Гравитационные силы считаем пренебрежимо малыми.

Пусть многокомпонентная смесь заполняет некоторую пространственную область D с гладкой границей ∂D . Индексы i, j, k соответствуют номерам компонентов и принимают значения $1, \dots, M$ (M — число компонентов). Индексы a, b, c соответствуют декартовым координатам x^a . По повторяющимся индексам проводится суммирование.

Рассматриваются только изотермические процессы. Введем следующие обозначения: n_i, m_i — молярная плотность и молярная масса компонента i ; $\rho = m_i n_i$ — массовая плотность смеси; I_{ia} — поток компонента i ; $v_a = \rho^{-1} m_i I_{ia}$ — среднемассовая скорость смеси; $Q_{ia} = I_{ia} - n_i v_a$ — диффузионный поток; p_{ab} — симметричный тензор напряжений в смеси; $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_a = \partial/\partial x^a$ — производные по времени и координате; $g_{,i} = \partial g/\partial n_i$; g — функция плотностей компонентов.

Течение смеси определяется уравнениями сохранения компонентов и импульса [6]

$$\partial_t n_i + \partial_a I_{ia} = 0; \quad (2)$$

$$\rho(\partial_t v_a + v_b \partial_b v_a) = \partial_b p_{ab}. \quad (3)$$

Граничные условия имеют вид

$$v_a|_{\partial D} = 0, \quad l_a Q_{ia}|_{\partial D} = 0, \quad (4)$$

где l_a — внутренняя нормаль к поверхности ∂D .

Для замыкания задачи (2)–(4) необходимы явные выражения для диффузионных потоков Q_{ia} и тензора напряжений в смеси p_{ab} . Для их определения используется величина свободной энергии смеси, которая задается в виде функционала плотности [2]

$$F = \int_D \theta_v dV + \int_{\partial D} \theta_s dA. \quad (5)$$

Здесь $\theta_v = (1/2)\nu_{ij} \partial_a n_i \partial_a n_j + f$; $f(n_i)$ — свободная энергия гомогенного состояния в единице объема; $\theta_s(n_i)$ — поверхностная энергия на границе смеси с твердой фазой (поверхностное натяжение); ν_{ij} — положительно определенная симметричная матрица, элементы которой для простоты принимаются не зависящими от плотностей n_i .

Идея представления свободной энергии в виде функционала вида (5) предложена в [7] и использовалась в ряде задач [8, 9].

В [2] показано, что в статическом случае теория, в основе которой лежит выражение (5), позволяет представить равновесные параметры состояния многофазной среды в виде непрерывных функций. Вводя в выражение (5) квадраты градиентов плотностей, можно использовать области непрерывного перехода между фазами вместо геометрических поверхностей, разделяющих разные фазы.

В статическом случае равновесные состояния смеси соответствуют критическим точкам функционала (5) при заданных количествах каждого компонента смеси [2]

$$N_i = \int_D n_i dV. \quad (6)$$

Следовательно, необходимое условие равновесия записывается в виде вариационного уравнения

$$\delta F - \lambda_i \delta N_i = 0, \quad (7)$$

где λ_i — множители Лагранжа. Вычисляя вариацию функционала (5) в явном виде, получаем

$$\delta F = \int_D \Phi_i \delta n_i dV + \int_{\partial D} \psi_i \delta n_i dA, \quad (8)$$

$$\Phi_i = f_{,i} - \nu_{ij} \Delta n_j, \quad \psi_i = \theta_{s,i} - \nu_{ij} l_a \partial_a n_j, \quad \Delta = \partial_a \partial_a.$$

Таким образом, вариационные уравнения (7) сводятся к эллиптической системе дифференциальных уравнений

$$\Phi_i - \lambda_i = 0 \quad (9)$$

и граничным условиям

$$\psi_i = 0. \quad (10)$$

Неизвестные значения множителей Лагранжа λ_i должны определяться по заданным значениям N_i (см. (6)). Поскольку величина $f_{,i}$ равна химическому потенциалу компонента i , для гомогенных состояний множители Лагранжа равны химическим потенциалам компонентов смеси.

Возвращаясь к динамическим уравнениям, примем, что граничные условия (10) выполняются и в динамическом случае.

Введем в рассмотрение кинетическую энергию смеси

$$K = \frac{1}{2} \int_D \rho v_a v_a dV.$$

Используя (2)–(4), (8), (10), несложно вычислить производную от полной энергии смеси $E = K + F$:

$$\frac{dE}{dt} = \int_D (-\tau_{ab} \partial_a v_b + Q_{ia} \partial_a \Phi_i) dV;$$

$$\tau_{ab} = p_{ab} - \sigma_{ab}, \quad \sigma_{ab} = -\nu_{ij} \partial_a n_i \partial_b n_j + \delta_{ab}(\theta_v - \Phi_i n_i). \quad (11)$$

Тензоры σ_{ab} , τ_{ab} интерпретируются как тензор статических напряжений и тензор вязких напряжений соответственно. Другими словами, матрица σ_{ab} описывает напряжения в неоднородной смеси, которые не зависят от параметров течения. В однородной среде матрица σ_{ab} сводится к обычным напряжениям в идеальной жидкости $\sigma_{ab} = -p\delta_{ab}$ ($p = f_{,i} n_i - f$ — гидростатическое давление).

Выражения для тензора вязких напряжений τ_{ab} диффузионных потоков Q_{ia} должны быть совместимыми с условием диссипативности модели $dE/dt \leq 0$. Простейший (но не единственный) способ удовлетворить этому условию — использовать модель Навье — Стокса для вязких напряжений и обобщенный закон Фика для диффузии:

$$\tau_{ab} = (\zeta - 2\mu/3)\delta_{ab} \partial_c v_c + \mu(\partial_a v_b + \partial_b v_a); \quad (12)$$

$$Q_{ia} = -D_{ij} \partial_a \Phi_j. \quad (13)$$

Здесь $\zeta(n_i)$, $\mu(n_i)$ — положительные коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости смеси; $D_{ij}(n_k)$ — симметричная матрица коэффициентов диффузии с неотрицательными собственными значениями (единственное нулевое собственное значение этой матрицы соответствует собственному вектору m_i).

Проверим совместимость статических уравнений (9) с гидродинамическими уравнениями (2), (3), (12), (13). Для этого удобно использовать легко проверяемое тождество

$$\partial_b \sigma_{ab} = -n_i \partial_a \Phi_i. \quad (14)$$

Пусть условия (9) выполнены и среднемассовая скорость равна нулю. Подстановка соотношений (9) в (13) показывает, что диффузионные потоки равны нулю и уравнения сохранения компонентов (2) удовлетворяются. При этом уравнения импульсов (3) удовлетворяются в силу тождества (14).

Наоборот, пусть среднemasсовая скорость и диффузионные потоки равны нулю. Тогда из (13) следует равенство $\Phi_i = \Phi_{i0} + m_i\psi$, где Φ_{i0} — постоянные; ψ — некоторая функция координат. Из условия равновесия $\partial_b\sigma_{ab} = 0$ и тождества (14) следует, что ψ — постоянная. Таким образом, доказано выполнение уравнений (9).

Исследуем установившееся течение многокомпонентной смеси в осесимметричном капилляре с переменным радиусом. Будем использовать цилиндрические координаты: z — координата вдоль оси капилляра, r — расстояние от оси, θ — угол азимута. Радиус капилляра задается функцией $r = r_c(z)$. Неизвестными в данной задаче являются поля плотностей $n_i(z, r)$ и компоненты скорости $v_z(z, r)$, $v_r(z, r)$.

Гидродинамические уравнения (2), (3) сводятся к системе уравнений

$$\partial_z(n_i v_z + Q_{iz}) + (\partial_r + r^{-1})(n_i v_r + Q_{ir}) = 0; \quad (15)$$

$$\rho(v_z \partial_z + v_r \partial_r)v_z = \partial_z p_{zz} + (\partial_r + r^{-1})p_{zr}, \quad (16)$$

$$\rho(v_z \partial_z + v_r \partial_r)v_r = \partial_z p_{zr} + (\partial_r + r^{-1})p_{rr} - r^{-3}p_{\theta\theta},$$

в которых в соответствии с соотношениями (11)–(13) выражения для диффузионных потоков компонент тензора напряжений имеют вид

$$Q_{iz} = -D_{ij} \partial_z \Phi_j, \quad Q_{ir} = -D_{ij} \partial_r \Phi_j,$$

$$p_{zz} = -\nu_{ij} \partial_z n_i \partial_z n_j + \theta_v - \Phi_i n_i + (\zeta + 4\mu/3)\partial_z v_z + (\zeta - 2\mu/3)(\partial_r v_r + r^{-1}v_r),$$

$$p_{rr} = -\nu_{ij} \partial_r n_i \partial_r n_j + \theta_v - \Phi_i n_i + (\zeta - 2\mu/3)(\partial_z v_z + r^{-1}v_r) + (\zeta + 4\mu/3)\partial_r v_r,$$

$$p_{\theta\theta} = r^2(\theta_v - \Phi_i n_i) + (\zeta - 2\mu/3)r^2(\partial_z v_z + \partial_r v_r) + (\zeta + 4\mu/3)rv_r,$$

$$p_{zr} = p_{rz} = -\nu_{ij} \partial_r n_i \partial_z n_j + \mu(\partial_z v_r + \partial_r v_z),$$

$$\theta_v = \nu_{ij}(\partial_z n_i \partial_z n_j + \partial_r n_i \partial_r n_j)/2 + f, \quad \Phi_i = f_{,i} - \nu_{ij}(\partial_z^2 n_j + r^{-1}\partial_r(r\partial_r n_j)).$$

Граничные условия на стенках капилляра $r = r_c(z)$ следуют из соотношений (4), (10):

$$v_r = 0, \quad v_z = 0, \quad Q_{ir} = 0, \quad \nu_{ij} \partial_r n_j = \theta_{s,i}. \quad (17)$$

Граничные условия на оси капилляра ($r = 0$) следуют из симметрии задачи и непрерывности потока:

$$v_r = 0, \quad \partial_r v_z = 0, \quad Q_{ir} = 0, \quad \partial_r n_i = 0. \quad (18)$$

Из уравнения (15) следует обычное уравнение неразрывности

$$\partial_z(\rho v_z) + (\partial_r + r^{-1})(\rho v_r) = 0, \quad (19)$$

а также интегральные законы сохранения

$$\frac{dq_i}{dz} = 0, \quad q_i = 2\pi \int_0^{r_c} (n_i v_z + Q_{iz})r dr. \quad (20)$$

Здесь q_i — полный поток компонента i через поперечное сечение капилляра.

Помимо граничных условий (17), (18) необходимо сформулировать граничные условия на концах капилляра. Эти условия приведены ниже при построении решения.

Пусть координата z изменяется от 0 до $L > 0$, R_c — характерный радиус капилляра. Удобно определить малый параметр $\delta = R_c/L$ и безразмерные координаты $x = z/L$ и $y = r/R_c$. Введем также безразмерный радиус капилляра $R(x) = R_c^{-1}r_c(z)$. Для простоты будем использовать систему единиц измерения, в которой $L = 1$.

Для построения асимптотического решения с малым параметром δ необходимо задать порядок искомых величин по отношению к δ . При этом должны выполняться определяющие уравнения и граничные условия, связывающие искомые величины. С физической точки зрения искомая асимптотика описывает течение в капилляре фиксированной длины с бесконечно малым радиусом. В этом случае необходимо выбрать порядок величин ν_{ij} , $\theta_{s,i}$, определяющих толщины поверхностных слоев и межфазных зон [2, 3], а также коэффициентов диффузии. Будем использовать выражения

$$\nu_{ij} = \delta^2 \alpha_{ij}, \quad \theta_{s,i} = \delta \beta_i, \quad D_{ij} = \delta^2 d_{ij}(n_k), \quad (21)$$

где α_{ij} , β_i — конечные постоянные. Искомые величины представим в виде рядов

$$n_i = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \delta^\alpha n_i^\alpha(x, y), \quad v_z = \delta^2 \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \delta^\alpha v_z^\alpha(x, y), \quad v_r = \delta^2 \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \delta^\alpha v_r^\alpha(x, y). \quad (22)$$

При подстановке соотношений (21), (22) в граничные условия (17), (18) получаются граничные условия для главных членов асимптотического решения:

— при $y = R(x)$

$$v_r^0 = 0, \quad v_z^0 = 0; \quad (23)$$

$$d_{ij}(n_k^0) \partial_y \Phi_j^0 = 0; \quad (24)$$

$$\alpha_{ij} \partial_y n_j^0 = \beta_i; \quad (25)$$

— при $y = 0$

$$v_r^0 = 0, \quad \partial_y v_z^0 = 0; \quad (26)$$

$$d_{ij}(n_k^0) \partial_y \Phi_j^0 = 0; \quad (27)$$

$$\partial_y n_i^0 = 0. \quad (28)$$

Здесь $\Phi_i^0 = f_{,i}(n_k^0) - \alpha_{ij} y^{-1} \partial_y (y \partial_y n_j^0)$.

Уравнение (19) дает в главном приближении обыкновенное дифференциальное уравнение $(\partial_y + y^{-1})(m_i n_i^0 v_r^0) = 0$, интеграл которого имеет вид $m_i n_i^0 v_r^0 = y^{-1} C_1(x)$. Последнее выражение совместимо с граничными условиями (23), (26), только если $C_1(x) = 0$. Таким образом, имеем

$$v_r^0 = 0. \quad (29)$$

Используя (14) и (29), из (15), (16) получаем следующие уравнения:

$$(\partial_y + y^{-1})(d_{ij}(n_k^0) \partial_y \Phi_j^0) = 0; \quad (30)$$

$$-n_i^0 \partial_z \Phi_i^0 + (\partial_y + y^{-1})(\mu(n_k^0) \partial_y v_z^0) = 0; \quad (31)$$

$$-n_i^0 \partial_y \Phi_i^0 = 0. \quad (32)$$

Соотношения (24), (27), (30), (32) выполняются, только если величины Φ_i^0 не зависят от радиальной координаты y , т. е. если выполняются уравнения

$$\Phi_i^0 = \lambda_i(x). \quad (33)$$

Сравнение системы уравнений (33) с условиями равновесия (9) позволяет интерпретировать (33) как условия равновесного распределения компонентов смеси в поперечном сечении капилляра. Таким образом, система уравнений (33) с граничными условиями (25), (28) определяет плотности компонентов $n_i^0 = n_i^0(x, y)$. При этом зависимость n_i^0 от продольной

координаты x фактически выражается через зависимость от x параметров λ_i и радиуса капилляра R . Поэтому плотности компонентов могут быть представлены в функциональном виде $n_i^0 = n_i^0(y; R, \lambda_j)$. Параметры $\lambda_i(x)$ следует интерпретировать как локальные химические потенциалы смеси.

Конкретный функциональный вид решения $n_i^0 = n_i^0(y; R, \lambda_j)$ задачи (33) с граничными условиями (25), (28) определяется используемой функцией свободной энергии гомогенного состояния $f(n_i)$. Обычно при описании реальных углеводородных смесей используются полуэмпирические кубические уравнения состояния [10, 11]. В этом случае аналитические выражения для функции $f(n_i)$ оказываются достаточно сложными, что исключает возможность вычисления функций $n_i^0(y; R, \lambda_j)$ в конечном аналитическом виде. Поэтому в общем случае для решения задачи (33), (25), (28) следует использовать численные методы. Тем не менее, как показано ниже, анализ рассматриваемой задачи о течении газоконденсатной смеси в осесимметричном капилляре дает ряд важных результатов.

Введем функции $J_i(y; R, \lambda_j)$, определяемые уравнением

$$y^{-1} \partial_y (y \mu^0 \partial_y J_i) = -n_i^0 \quad (34)$$

и граничными условиями

$$J_i|_{y=R} = 0, \quad \partial_y J_i|_{y=0} = 0,$$

где $\mu^0(y; R, \lambda_j) = \mu(n_i^0(y; R, \lambda_j))$. Функции $J_i(y; R, \lambda_j)$ могут быть найдены в виде двойных интегралов:

$$J_i(y; R, \lambda_j) = \int_y^R (y_2 \mu^0(y_2; R, \lambda_j))^{-1} \int_0^{y_2} y_1 n_i^0(y_1; R, \lambda_j) dy_1 dy_2.$$

Сравнивая уравнения (31) и (34), легко получить выражение для продольной скорости течения $v_z^0(x, y) = -J_i d\lambda_i/dx$. Подстановка этого выражения в (20) дает главную асимптотику для потоков компонентов в виде $q_i = \delta^2 q_i^0$, где

$$q_i^0 = -\Psi_{ij} \frac{d\lambda_j}{dx}, \quad \Psi_{ij}(y; R, \lambda_k) = 2\pi \int_0^R (n_i^0 J_j + D_{ij}(n_k^0)) y dy. \quad (35)$$

Матрица Ψ_{ij} является симметричной и положительно определенной:

$$\Psi_{ij} = 2\pi \int_0^R \left[(y \mu^0(y; R, \lambda_k))^{-1} \int_0^y y_1 n_i^0(y_1; R, \lambda_k) dy_1 \int_0^y y_2 n_j^0(y_2; R, \lambda_k) dy_2 + \right. \\ \left. + d_{ij}(n_k^0(y; R, \lambda_k)) \right] y dy. \quad (36)$$

Таким образом, закон переноса (35) удовлетворяет теории Онзагера.

Уравнения сохранения компонентов смеси $dq_i^0/dx = 0$ и закон переноса (35) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для определения химических потенциалов смеси $\lambda_i(x)$ вдоль капилляра. В качестве граничных условий можно использовать значения λ_i на концах капилляра.

Закон переноса (35) имеет общий характер независимо от того, находится ли смесь в однофазном или двухфазном состоянии. Если смесь находится в двухфазном состоянии и зона межфазного перехода мала по сравнению с радиусом капилляра (так что можно ввести радиус $y = \tau$ для межфазной границы), то закон (35) допускает уточнение с введением скоростей фильтрации фаз. Пусть жидкая фаза смачивающая (т. е. жидкость расположена вблизи стенок капилляра), n_{ig}^0, n_{il}^0 — плотности компонентов в газе и жидкости,

$d_{ijg} = d_{ij}(n_{kg}^0)$, $d_{ijl} = d_{ij}(n_{kl}^0)$ — приведенные коэффициенты диффузии в газе и жидкости. Разделяя область интегрирования в выражении (36) на подобласти, соответствующие газу и жидкости, и используя соотношения Гиббса — Дюгема $dp_g = n_{ig}^0 d\lambda_i$, $dp_l = n_{il}^0 d\lambda_i$, преобразуем закон (35) к виду

$$q_i^0 = q_{ig} + q_{il}, \quad q_{ig} = \pi R^2 \left(n_{ig}^0 u_g - \left(\frac{\tau}{R} \right)^2 d_{ijg} \frac{d\lambda_j}{dx} \right), \quad q_{il} = \pi R^2 \left(n_{il}^0 u_l - \left(1 - \left(\frac{\tau}{R} \right)^2 \right) d_{ijl} \frac{d\lambda_j}{dx} \right);$$

$$u_g = -R^2 \left(\frac{\Sigma_1}{\mu_g} + \frac{\Sigma_2}{\mu_l} \right) \frac{dp_g}{dx} - \frac{R^2 \Sigma_3}{\mu_l} \frac{dp_l}{dx}, \quad u_l = -\frac{R^2 \Sigma_4}{\mu_l} \frac{dp_g}{dx} - \frac{R^2 \Sigma_5}{\mu_l} \frac{dp_l}{dx}; \quad (37)$$

$$\Sigma_1 = \frac{1}{8} \left(\frac{\tau}{R} \right)^4, \quad \Sigma_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{R} \right)^4 \ln \frac{\tau}{R}, \quad \Sigma_3 = \Sigma_4 = \frac{1}{4} \left(\frac{\tau}{R} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{\tau}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{\tau}{R} \right)^2 \ln \frac{\tau}{R} \right),$$

$$\Sigma_5 = \frac{1}{8} \left(1 - \left(\frac{\tau}{R} \right)^2 \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\tau}{R} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{\tau}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{\tau}{R} \right)^2 \ln \frac{\tau}{R} \right).$$

Выражения (37) представляют собой обобщение выражений (1) для фазовых скоростей фильтрации. Отметим, что эти выражения содержат перекрестные члены, т. е. скорость фильтрации газа зависит от градиента давления в жидкости, и наоборот, скорость фильтрации жидкости зависит от градиента давления в газе. Величины $R^2 \Sigma_A$ имеют смысл коэффициентов фазовых проницаемостей. При учете взаимного трения фаз имеется четыре независимых коэффициента в отличие от двух коэффициентов в классическом законе (1). Для реальных пористых сред аналитические выражения для фазовых проницаемостей имеют более сложный вид и зависят от свойств породы. Тем не менее функциональный вид закона фильтрации должен соответствовать выражениям (37).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Движение** углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968.
2. **Динариев О. Ю.** О гидродинамическом описании многокомпонентной многофазной смеси в узких порах и тонких слоях // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 5. С. 776–783.
3. **Динариев О. Ю.** Течение в капилляре с поверхностно-активными стенками. Метод функционала плотности // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. Вып. 2. С. 141–148.
4. **Динариев О. Ю.** Температурные эффекты при описании многокомпонентной смеси методом функционала плотности // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 3. С. 433–442.
5. **Динариев О. Ю.** Описание капиллярно-гравитационных волн в теории функционала плотности // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. Вып. 5. С. 145–151.
6. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1.
7. **Sahn J. W., Hilliard J. E.** Free energy of a nonuniform system. 1. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1958. V. 28. P. 258–267.
8. **Эглит М. Э.** Одно обобщение модели идеальной сжимаемой жидкости // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 351–354.
9. **Трускиновский Л. М.** Равновесные межфазные границы // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 2. С. 306–310.
10. **Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т.** Свойства газов и жидкостей. Л.: Химия. Ленингр. отд-ние, 1982.
11. **Гуревич Г. Р., Брусиловский А. И.** Справочное пособие по расчету фазового состояния и свойств газоконденсатных смесей. М.: Недра, 1984.

Поступила в редакцию 16/XI 2001 г.,
в окончательном варианте — 14/II 2002 г.