УДК 533; 517.958

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ РАНГА ДВА УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Е. В. Мамонтов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Описаны инвариантные подмодели ранга два системы уравнений газовой динамики с общим уравнением состояния. Все подмодели (26 представителей) разделяются на два класса — эволюционные и стационарные. Приводятся новые зависимые и независимые переменные, коэффициенты и правые части соответствующих систем уравнений.

Как известно [1], система уравнений газовой динамики с общим уравнением состояния допускает 11-параметрическую группу Ли. Базис соответствующей алгебры Ли образуют операторы

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_5 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_6 = t\partial_z + \partial_w,$$
$$X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \quad X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w,$$
$$X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \quad X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z.$$

Оптимальная система подалгебр построена и приведена в [2, табл. 6].

В настоящей работе в рамках программы ПОДМОДЕЛИ анализируются инвариантные подмодели ранга два системы уравнений газовой динамики. Все такие подмодели (27 представителей) получаются относительно двухпараметрических подгрупп, отвечающих подалгебрам $L_{2,l}$ из табл. 6 работы [2] (ниже нумерация из табл. 6 используется при ссылках на соответствующую подмодель).

Следуя [3], все рассматриваемые подмодели (за исключением частично инвариантной подмодели 2.26) приводятся к одной из двух систем. Система уравнений эволюционного типа (типа E) имеет вид

$$U_t + UU_\xi + \frac{b_1}{R}P_\xi = a_1, \qquad V_t + UV_\xi = a_2, \qquad W_t + UW_\xi = a_3,$$
$$R_t + UR_\xi + RU_\xi = Ra_4, \quad P_t + UP_\xi + A(R,P)U_\xi = A(R,P)a_4,$$

где $b_1 = b_1(t,\xi)$, а функции a_i не содержат производных от искомых функций; $A = Rc^2$; $c = c(R,P)$. Характеристики определяются равенством $(d\xi - U dt)^3 (R d\xi^2 - 2RU d\xi dt + (RU^2 - Ab_1)dt^2) = 0$. По смыслу задачи $A > 0$, $R > 0$ и, как оказывается, $b_1 > 0$, поэтому все характеристики вещественные.

Система уравнений стационарного типа (типа S) имеет следующий вид:

$$UU_\xi + VU_\eta + \frac{1}{R}b_{11}P_\xi = a_1, \qquad UV_\xi + VV_\eta + \frac{1}{R}b_{22}P_\eta = a_2,$$
$$UW_\xi + VW_\eta + \frac{1}{R}(b_{31}P_\xi + b_{32}P_\eta) = a_3, \qquad UR_\xi + VR_\eta + R(U_\xi + V_\eta) = Ra_4,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01780) и программы «Ведущие научные школы» (код проекта 96-15-96283).

Таблица 1

Подмодель	Система координат	Базис подалгебры	ξ
2.8	C	$X_4,\ X_7$	r
2.9	C	$X_1,\ \beta X_4 + X_7$	r
2.10	C	$X_4,\ X_1 + X_7$	r
2.20	D	$\alpha X_1 + \sigma X_3 + X_5,\ \beta X_1 + \tau X_2 + X_6,$ $\alpha^2 + \beta^2 + (\sigma+\tau)^2 = 1$	$x + \dfrac{\beta\sigma - \alpha t}{t^2 - \sigma\tau} y + \dfrac{\alpha\tau - \beta t}{t^2 - \sigma\tau} z$
2.21	D	$X_3 + X_5,\ X_2 - X_6$	x
2.22	D	$X_5,\ X_6$	x
2.23	D	$\alpha X_1 + X_2,\ X_3 + X_4$	$x - \alpha y - tz$
2.24	D	$\alpha X_1 + X_2,\ X_4$	z
2.25	D	$X_1,\ X_3 + X_4$	y
2.27	D	$X_2,\ X_3$	x

Таблица 2

Подмодель	U	V	W
2.8	v	$u - x/t$	w
2.9	v	$u - \beta\theta$	w
2.10	v	$u + (\theta - x)/t$	w
2.20	$u + \dfrac{\beta\sigma - \alpha t}{t^2 - \sigma\tau} v + \dfrac{\alpha\tau - \beta t}{t^2 - \sigma\tau} w + \dfrac{(\beta\sigma - \alpha t)(\tau z - ty) + (\alpha\tau - \beta t)(\sigma y - tz)}{(t^2 - \sigma\tau)^2}$	$v + \dfrac{\alpha t - \beta\sigma}{t^2 - \sigma\tau} u + \dfrac{\tau z - ty}{t^2 - \sigma\tau}$	$w + \dfrac{\beta t - \alpha\tau}{t^2 - \sigma\tau} u + \dfrac{\sigma y - tz}{t^2 - \sigma\tau}$
2.21	u	$v + tw - z$	$tv - w - y$
2.22	u	$v - y/t$	$w - z/t$
2.23	$u - \alpha v - tw - z$	$\alpha u + v - \alpha z$	$tu + w - tz$
2.24	w	$u - x/t + \alpha(y/t)$	v
2.25	v	$u - z$	w
2.27	u	v	w

$$UP_\xi + VP_\eta + A(R,P)(U_\xi + V_\eta) = A(R,P)a_4,$$

где $b_{ij} = b_{ij}(\xi,\eta)$, а функции a_i не содержат производных от искомых функций.

Характеристики определяются равенством

$$(Vd\xi - Ud\eta)^3((RU^2 - Ab_{11})d\eta^2 - 2RUVd\xi d\eta + (RV^2 - Ab_{22})d\xi^2) = 0.$$

Первый множитель задает три вещественных семейства характеристик. Второй множитель дает вещественные характеристики, если $\delta = b_{22}U^2 + b_{11}V^2 - b_{11}b_{22}c^2 \geqslant 0$, и комплексные, если $\delta < 0$.

Системы уравнений эволюционного типа получаются из подмоделей 2.8–2.10, 2.20–2.25, 2.27; системы уравнений стационарного типа — из подмоделей 2.1–2.7, 2.11–2.19.

В табл. 1–6 для всех подмоделей указаны соответствующие зависимые и независимые переменные, коэффициенты и правые части получающихся систем дифференциальных уравнений (R, P — функции ρ, p в новых переменных). Исходная система уравнений газовой динамики записывается либо в декартовых координатах (система координат D), либо в цилиндрических (система координат C).

Таблица 3

Подмодель	b_1	a_1	a_2	a_3	a_4
2.8	1	$(1/\xi)W^2$	$-(1/t)V$	$-(1/\xi)UW$	$-\left(\frac{1}{\xi}U+\frac{1}{t}\right)$
2.9	1	$(1/\xi)W^2$	$-(\beta/\xi)W$	$-(1/\xi)UW$	$-(1/\xi)U$
2.10	1	$(1/\xi)W^2$	$(W-\xi V)/t\xi$	$-(1/\xi)UW$	$-\left(\frac{1}{\xi}U+\frac{1}{t}\right)$
2.20	$1+\left(\frac{\beta\sigma-\alpha t}{t^2-\sigma\tau}\right)^2+\left(\frac{\alpha\tau-\beta t}{t^2-\sigma\tau}\right)^2$	$\frac{\sigma(\alpha\tau-\beta t)}{(t^2-\sigma\tau)^2}V+\frac{t(\alpha t-\beta\sigma)}{t^2-\sigma\tau}V+$ $+\frac{\tau(\alpha\tau-\beta t)}{(t^2-\sigma\tau)^2}W+\frac{t(\beta t-\alpha\tau)}{(t^2-\sigma\tau)^2}W$	$-\frac{t}{t^2-\sigma\tau}V+\frac{\tau}{t^2-\sigma\tau}W$	$\frac{\sigma}{t^2-\sigma\tau}V-\frac{t}{t^2-\sigma\tau}W$	$-\frac{2t}{t^2-\sigma\tau}$
2.21	1	0	0	0	$-2t/(1+t^2)$
2.22	1	0	$-(1/t)V$	$-(1/t)W$	$-2/t$
2.23	$1+\alpha^2+t^2$	$2\frac{tU+\alpha tV}{1+\alpha^2+t^2}-2\frac{(1+\alpha^2)W}{1+\alpha^2+t^2}$	$\alpha\frac{tU+\alpha tV}{1+\alpha^2+t^2}-\alpha\frac{(1+\alpha^2)W}{1+\alpha^2+t^2}$	$\frac{(1+t^2)U}{1+\alpha^2+t^2}+\frac{\alpha(1+t^2)V}{1+\alpha^2+t^2}-$ $-\alpha^2tW/(1+\alpha^2+t^2)$	0
2.24	1	0	$-(1/t)V+(\alpha/t)W$	0	$-1/t$
2.25	1	0	$-W$	0	0
2.27	1	0	0	0	0

Таблица 4

Подмодель	Система координат	Базис подалгебры	ξ	η	U
2.1	C	$X_{10},\ X_7+\alpha X_{11},\ \alpha\neq 0$	r/x	$e^{-2\alpha\theta}(x^2+r^2)$	$e^{\alpha\theta}(xv-ru)/x^2$
2.2	C	$\alpha X_4+X_7,\ \beta X_4+X_{11}$	r/t	$x-\alpha\theta-\beta\ln\|t\|$	$v-r/t$
2.3	C	$X_4, X_7+\alpha X_{11},\ \alpha\neq 0$	$te^{-\alpha\theta}$	r/t	$1-(\alpha t/r)w$
2.4	C	$X_1,\ \beta X_4+X_7+\alpha X_{11},\ \alpha\neq 0$	r/t	$\theta-(1/\alpha)\ln\|t\|$	$v-r/t$
2.5	C	$X_7,\ X_{10}$	x	r	u
2.6	C	$X_1+X_7,\ X_{10}$	r	$x-\theta$	v
2.7	C	$\alpha X_1+X_7,\ X_4+X_{10}$	r	$x-(1/2)t^2-\alpha\theta$	v
2.11	C	$X_1,\ \beta X_4+X_7+X_{10}$	$\theta-t$	r	$w/r-1$
2.12	D	$X_{10},\ X_{11}$	z/y	$(y^2+z^2)/x^2$	$(x/y^2)(yw-zv)$
2.13	D	$X_4,\ X_{11}$	y/t	z/t	$v-y/t$
2.14	D	$X_4,\ \alpha X_5+X_{11},\ \alpha\neq 0$	$y/t-\alpha\ln\|t\|$	z/t	$v-y/t-\alpha$
2.15	D	$X_1,\ \beta X_4+\alpha X_5+X_{11},\ \alpha\neq 0$	$y/t-\alpha\ln\|t\|$	z/t	$v-y/t-\alpha$
2.16	D	$X_1,\ \beta X_4+X_{11}$	y/t	z/t	$v-y/t$
2.17	D	$X_1,\ X_{10}$	y	z	v
2.18	D	$X_3,\ X_4+\alpha X_6+X_{10}$	$x-t^2/2$	y	$u-t$
2.19	D	$X_1,\ X_4+X_{10}$	y	z	v

Таблица 5

Подмодель	V	W	b_{11}	b_{22}	b_{31}
2.1	$(2/r)e^{-\alpha\theta}(xru+r^2v-\alpha(x^2+r^2)w)$	w	$(1+\xi^2)^2/\eta$	$4\eta(1+\alpha^2(1+1/\xi^2))$	0
2.2	$u-x/t-(\alpha t/r)w-\beta$	w	1	$1+\alpha^2/\xi^2$	0
2.3	$(1/t)(v-r/t)e^{\alpha\theta}$	$u-x/t$	α^2/η^2	$1/\xi^2$	0
2.4	$(t/r)w-1/\alpha$	$u-\beta\theta$	1	$1/\xi^2$	0
2.5	v	w	1	1	0
2.6	$u-(1/r)w$	w	1	$1+1/\xi^2$	0
2.7	$u-t-(\alpha/r)w$	w	1	$1+\alpha^2/\xi^2$	0
2.11	v	$u-\beta t$	$1/\eta^2$	1	0
2.12	$(2/x^2)(xyv+xzw-(y^2+z^2)u)$	u	$(1+\xi^2)^2/\eta$	$4\eta(1+\eta)$	0
2.13	$w-z/t$	$u-x/t$	1	1	0
2.14	$w-z/t$	$u-x/t$	1	1	0
2.15	$w-z/t$	$u-\beta\ln\|t\|$	1	1	0
2.16	$w-z/t$	$u-\beta\ln\|t\|$	1	1	0
2.17	w	u	1	1	0
2.18	v	$w-\alpha t$	1	1	0
2.19	w	$u-t$	1	1	0

Таблица 6

Подмодель	b_{32}	a_1	a_2	a_3	a_4
2.1	$-2\alpha(\sqrt{(1+\xi^2)\eta}/\xi)$	$\frac{2\xi}{1+\xi}U^2-\frac{1}{\eta}UV-UW$	$2\frac{\eta}{(1+\xi^2)^2}U^2+\frac{1}{2\eta}V^2-VW$	$-\frac{1}{\xi(1+\xi^2)}UW-\frac{1}{2\eta}VW$	$\frac{2\xi^2-1}{\xi(1+\xi^2)}U-\frac{1}{2\eta}V-\frac{2\alpha}{\xi}\sqrt{\frac{1+\xi^2}{\eta}}W$
2.2	$-\alpha/\xi$	$-U+(1/\xi)W^2$	$-\beta-V-\frac{\alpha}{\xi}W+2\frac{\alpha}{\xi^2}UW$	$-W-(1/\xi)UW$	$-3-(1/\xi)U$
2.3	0	$(1-U)\left(\frac{1}{\xi}+\frac{2}{\eta}V\right)$	$-\frac{1}{\xi}V-\frac{1}{\xi}UV+\frac{\eta}{\xi^2\alpha^2}(1-U)$	$-(1/\xi)W$	$-3/\xi-(1/\eta)V$
2.4	0	$\frac{\xi}{\alpha^2}-U+\xi\left(\frac{2}{\alpha}+V\right)V$	$-\left(2\frac{U}{\xi}+1\right)\left(V+\frac{1}{\alpha}\right)$	$-\beta/\alpha-\beta V$	$-(2+U/\xi)$
2.5	0	0	$(1/\eta)W^2$	$-(1/\eta)VW$	$-(1/\eta)V$
2.6	$-1/\xi$	$(1/\xi)W^2$	$(2/\xi^2)UW$	$-(1/\xi)UW$	$-(1/\xi)U$
2.7	$-\alpha/\xi$	$(1/\xi)W^2$	$(2\alpha/\xi^2)UW-1$	$-(1/\xi)UW$	$-(1/\xi)U$
2.11	0	$-(2/\eta)V(U+1)$	$\eta(U+1)^2$	$-\beta$	$-(1/\eta)V$
2.12	-2η	$-\frac{1}{\eta}UV+\frac{2\xi}{1+\xi^2}U^2-UW$	$\frac{2\eta}{(1+\xi^2)^2}U^2+\frac{1}{2\eta}V^2-VW$	0	$\frac{2\xi}{1+\xi^2}U-2W$
2.13	0	$-U$	$-V$	$-W$	-3
2.14	0	$-(U+\alpha)$	$-V$	$-W$	-3
2.15	0	$-(U+\alpha)$	$-V$	$-\beta$	-2
2.16	0	$-U$	$-V$	$-\beta$	-2
2.17	0	0	0	0	0
2.18	0	-1	0	$-\alpha$	0
2.19	0	0	0	-1	0

Автор выражает благодарность Л. В. Овсянникову и участникам программы ПОДМОДЕЛИ С. В. Хабирову, А. П. Чупахину, С. В. Головину, А. А. Черевко за полезное обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
3. **Хабиров С. В.** К анализу инвариантных подмоделей ранга три уравнений газовой динамики // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 6. С. 764–766.

Поступила в редакцию 15/VII 1997 г.