тоды механики сплошной среды. Т. 3. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1970, № 1.
3. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды, М., Физматгиз, 1962.
4. **Уилкинс М. Л.** Расчет упругопластических течений.— В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М., «Мир», 1967.
5. **Butkovich T. R.** Calculation of the shock wave from an underground nuclear explosion in granite.— «J. Geophys. Res.», 1965, vol. 70, p. 885—892.
6. **Родионов В. Н., Адушкин В. В., Костюченко В. Н., Николаевский В. Н., Ромашов А. Н., Цветков В. М.** Механический эффект подземного взрыва. М., «Недра», 1971.

УДК 539.373

НАПРЯЖЕННЫЙ СЛОЙ, СКРЕПЛЕННЫЙ С ПОЛУПЛОСКОСТЯМИ

Н. Н. Сергеев-Альбов

(*Новосибирск*)

1. В работе [1] показано, что при соударении пластин в режиме сварки взрывом за точкой контакта вдоль линии сварки образуется напряженный слой, подвергнутый сжимающим напряжениям. Была выдвинута гипотеза, что наличие напряженного слоя — причина волнообразования, которое имеет место при некоторых режимах соударения. В экспериментах по сварке взрывом установлено, что волнообразование происходит не в момент соударения, а некоторое время спустя, т. е. для начала процесса волнообразования необходимо начальное возмущение [2]. Такое возмущение может давать волна разрежения, приходящая от свободной поверхности метаемой пластины.

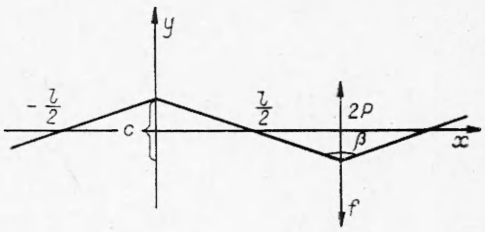
В данной работе исследуется вопрос о возможности волнообразного излома напряженного слоя $S = \{x, y | -\infty < x < +\infty, -h \leqslant y \leqslant h\}$ при условии, что этот слой сжат напряжениями, близкими к пределу текучести материала, но не превосходящими его. Случай, когда слой находится в пластическом состоянии, изучался в [1]. Пусть напряженный слой волнообразно изогнулся под воздействием малого возмущения. Так как рассматривается слой, сжатый напряжениями, близкими к пределу текучести материала, то естественно предположить, что в вершинах изгиба образуются пластические шарниры. В дальнейшем весь напряженный слой рассматривается как «стержневая система», соединенная посредством шарниров. Будем предполагать, что стержни абсолютно упругие и что вся «стержневая система» может выйти из состояния прямолинейного равновесия под воздействием малого возмущения. В слое S действуют сжимающие напряжения [1]

$$\sigma_{11}^0 = -k \, (k > 0),$$

где

$$k = \frac{4}{3\pi\tau_s} \rho_0 H U \sin(\gamma/2) \left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2 - b_0^2} \right); \tag{1.1}$$

c_0, b_0 — продольная и поперечная скорости звука в материале; ρ_0 — плотность материала; U — скорость точки контакта; γ — угол соударения;



Фиг. 1

H — высота пластины; τ_s — характерное время релаксации касательных напряжений в зоне пластических деформаций, расположенной в окрестности точки контакта.

В результате выхода стержневой системы из прямолинейного состояния равновесия в вершинах излома будет действовать вертикально направленная сила $f = 2kh \sin \beta$, где β — угол, образующийся между стержнями. Препятствовать излому стержневой системы будут основания соударяющихся пластин. Высота напряженного слоя [1] мала по сравнению с высотой пластин, и поэтому будем считать, что стержневая система скреплена с полуплоскостями $P_1 = \{x, y| -\infty < x < \infty, -\infty \leqslant y < -h\}$, $P_2 = \{x, y| -\infty < x < \infty, h < y < \infty\}$. Напряженный слой («стержневая система») выйдет из состояния прямолинейного равновесия под воздействием малого возмущения, если сила реакции $2P$, возникающая из-за изгиба оснований двух полуплоскостей, будет меньше силы f, которая возникает в вершинах излома «стержневой системы» (фиг. 1).

2. Пусть напряженное состояние в плоскости (x, y) описывается системой уравнений нелинейной теории упругости (эти уравнения являются одной из форм записи уравнений работы [3])

$$\rho d\bar{u}/dt - \partial\sigma_{11}/\partial x - \partial\sigma_{12}/\partial y = 0,$$
$$\rho d\bar{v}/dt - \partial\sigma_{12}/\partial x - \partial\sigma_{22}/\partial y = 0,$$
$$\frac{d\ln k_1}{dt} - \cos^2\varphi\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} - \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right) - \sin^2\varphi\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{d\ln k_2}{dt} - \sin^2\varphi\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right) - \cos^2\varphi\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} = 0,$$
$$(2.1)\qquad \frac{d\ln k_3}{dt} = 0,$$
$$2\left(k_1^2 - k_2^2\right)\frac{d\varphi}{dt} + \left(k_1^2 - k_2^2\right)\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right) -$$
$$-\left(k_1^2 + k_2^2\right)\left[\cos 2\varphi\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right) - \sin 2\varphi\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right)\right] = 0,$$
$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial y},$$

где σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} — компоненты тензора напряжений; $\bar{u}$, $\bar{v}$ — компоненты вектора скорости перемещений точек среды; k_1, k_2, k_3 — коэффициенты растяжения (сжатия) точек среды; φ — угол поворота системы координат относительно главных осей; ρ — плотность среды.

Уравнение состояния среды будем задавать следующим образом:

$$(2.2)\qquad E(k_1, k_2, k_3) = K_0(\delta^n - 1)^2/(2n^2) + 2b_0^2\delta^m D,$$

где c_0, b_0—продольная и поперечная скорости звука в среде; $K_0 = c_0^2 - \frac{4}{3}b_0^2$; n, m — константы уравнения состояния;

$$\delta = 1/(k_1k_2k_3);\quad D = \left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)/2,$$

$$d_i = \ln\left(k_i/\sqrt[3]{k_1k_2k_3}\right) \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Компоненты тензора напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} через главные напряжения σ_1, σ_2 и угол φ определяются по формулам

$$\sigma_{11} = \sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\varphi, \quad \sigma_{22} = \sigma_1 \sin^2\varphi + \sigma_2 \cos^2\varphi,$$

$$\sigma_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin\varphi \cos\varphi.$$

Главные напряжения связаны с уравнением состояния формулами Мурнагана [3]

$$\sigma_i = \rho k_i E_i, \quad E_i = \partial E/\partial k_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.3}$$

Для конкретного уравнения состояния (2.2) формулы (2.3) приобретают вид

$$\sigma_i = -\rho_0 K_0 \delta^{n+1}(\delta^n - 1)/n - 2\rho_0 b_0^2 m \delta^{m+1} D + 2\rho_0 b_0^2 \delta^{m+1} d_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где ρ_0 — плотность материала при нормальных условиях.

В начальный момент напряженное состояние в плоскости $(x,\ y)$ задается в виде

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{33}^0 = -k, \quad \sigma_{12}^0 = 0, \quad \bar{u}^0 = \bar{v}^0 = 0, \quad \sigma_{22}^0 = 0 \quad \text{в слое } S, \tag{2.4}$$

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{33}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma_{12}^0 = 0, \quad \bar{u}^0 = \bar{v}^0 = 0 \quad \text{в полуплоскостях } P_1,\ P_2. \tag{2.5}$$

По заданным напряжениям можно восстановить коэффициенты растяжения (сжатия) среды k_1, k_2, k_3. Так как $\sigma_{12}^0 = 0$, то $\varphi^0 = 0$. Из (2.5) следует, что в полуплоскостях P_1 и P_2 $k_1^0 = k_2^0 = k_3^0 = 1$.

Пусть начальное напряженное состояние плоскости $(x,\ y)$ подвергнуто малому возмущению. Решение для возмущенного состояния системы (2.1) будем искать в виде

$$k_1 = k_1^0 + \varepsilon\alpha(x,\ y), \quad k_2 = k_2^0 + \varepsilon\beta(x,\ y), \quad k_3 = k_3^0,$$

$$\varphi = \varphi^0 + \varepsilon\varphi^1(x,\ y), \quad \bar{u} = \bar{u}^0 + \varepsilon u^1(x,\ y), \quad \bar{v} = \bar{v}^0 + \varepsilon v^1(x,\ y), \tag{2.6}$$

где $\varepsilon \ll 1$.

Подставляя (2.6) в последние четыре уравнения (2.1) и оставляя в полученных соотношениях только члены первого порядка малости по ε, для функций α, β, φ^1 получим выражения

$$\alpha = k_1^0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \beta = k_2^0 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varphi^1 = \frac{k_2^{02}}{k_1^{02} - k_2^{02}} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k_1^{02}}{k_1^{02} - k_2^{02}} \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.7}$$

где u, v — компоненты перемещений точек среды из начального состояния в возмущенное.

Воспользуемся соотношениями (2.7), формулами Мурнагана (2.3), представлением (2.6) и преобразуем первые два уравнения системы (2.1) к виду

$$k_1^{02} E_{11}^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_1^0 k_2^0 \left(E_{12}^0 + \frac{k_2^0 E_1^0 - k_1^0 E_2^0}{k_1^{02} - k_2^{02}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + k_2^{02} \frac{k_1^0 E_1^0 - k_2^0 E_2^0}{k_1^{02} - k_2^{02}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

(2.8)

$$k_1^{02}\frac{k_1^0E_1^0-k_2^0E_2^0}{k_1^{02}-k_2^{02}}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+k_1^0k_2^0\left(E_{12}^0+\frac{k_2^0E_1^0-k_1^0E_2^0}{k_1^{02}-k_2^{02}}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+k_2^{02}E_{22}^0\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

где $E_{ij}=\partial^2E/\partial k_i\partial k_j$ $(i,\ j=1,\ 2)$, а верхний индекс нуль указывает на то, что величины отнесены к начальному состоянию.

Воспользуемся уравнением состояния (2.2) и вычислим коэффициенты системы (2.8)

$$k_1^2E_{11}=-\{-K_0\delta^n(\delta^n-1)/n-2b_0^2m\delta^mD+2b_0^2\delta^md_1\}+$$
$$+\{K_0(2\delta^{2n}-\delta^n)+2b_0^2m^2\delta^mD-4mb_0^2\delta^md_1+4b_0^2\delta^m/3\},$$
$$k_1k_2\left(E_{12}+\frac{k_2E_1-k_1E_2}{k_1^2-k_2^2}\right)=K_0(2\delta^{2n}-\delta^n)+2b_0^2m^2\delta^mD-2b_0^2m\delta^m(d_1+d_2)-$$
$$-2b_0^2\delta^m/3+K_0\delta^n(\delta^n-1)/n+2b_0^2\delta^mmD+2b_0^2\delta^m\frac{k_2^2d_1-k_1^2d_2}{k_1^2-k_2^2},$$

(2.9)
$$\frac{k_1E_1-k_2E_2}{k_1^2-k_2^2}=\frac{2b_0^2\delta^m(\ln k_1-\ln k_2)}{k_1^2-k_2^2},$$
$$k_2^2E_{22}=-\{-K_0\delta^n(\delta^n-1)/n-2b_0^2m\delta^mD+2b_0^2\delta^md_2\}+$$
$$+\{K_0(2\delta^{2n}-\delta^n)+2b_0^2m^2\delta^mD-4b_0^2m\delta^md_2+4b_0^2\delta^m/3\}.$$

Уравнения (2.8) для слоя S с учетом того, что $E_2^0=0$, запишутся в виде

(2.10)
$$k_1^{02}E_{11}^0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+k_1^0k_2^0\left(E_{12}^0+\frac{k_2^0E_1^0}{k_1^{02}-k_2^{02}}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+k_2^{02}\frac{k_1^0E_1^0}{k_1^{02}-k_2^{02}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$
$$k_1^{02}\frac{k_1^0E_1^0}{k_1^{02}-k_2^{02}}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+k_1^0k_2^0\left(E_{12}^0+\frac{k_2^0E_1^0}{k_1^{02}-k_2^{02}}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+k_2^{02}E_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Коэффициенты системы (2.10) определяются по формулам (2.9) подстановкой в них k_1^0, k_2^0, k_3^0, которые определяются по (2.4). В полуплоскостях P_1, P_2 $k_1^0=k_2^0=k_3^0=1$, поэтому система (2.8) в этом случае имеет вид

(2.11)
$$\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

где σ — коэффициент Пуассона материала полуплоскости

$$\sigma=(3K_0-2b_0^2)/(2(3K_0+b_0^2)).$$

Напряжения в этом случае будут определяться по перемещениям равенствами

$$\sigma_{11}=\frac{\mathrm{E}}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[(1-\sigma)\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma\frac{\partial v}{\partial y}\right],$$
$$\sigma_{12}=\frac{\mathrm{E}}{2(1+\sigma)}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right],$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[\sigma\frac{\partial u}{\partial x} + (1-\sigma)\frac{\partial v}{\partial y}\right],$$

где E — модуль Юнга материала полуплоскостей

$$E = 9\rho_0 K_0 b_0^2/(3K_0 + b_0^2).$$

3. У системы уравнений (2.10), описывающей напряженное состояние в слое S, и у системы (2.11), описывающей возмущенное состояние в полуплоскостях P_1 и P_2, будем искать решения вида

$$u(x, y) = iU(y)e^{i\omega x},\ v(x, y) = V(y)e^{i\omega x}. \tag{3.1}$$

Подстановка (3.1) в (2.11) дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2U}{\partial y^2} + \frac{\omega}{1-2\sigma}\frac{dV}{dy} - \omega^2\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}U(y) = 0, \tag{3.2}$$
$$\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{d^2V}{\partial y^2} - \frac{\omega}{1-2\sigma}\frac{\partial U}{\partial y} - \omega^2 V(y) = 0;$$

Определим реакцию упругих полуплоскостей P_1 и P_2 на заданный изгиб их границ. Пусть выполнены следующие граничные условия: $\sigma_{12}(x, -h) = 0$, $v(x, -h) = B_0e^{i\omega x}$, $\sigma_{12}(x, h) = 0$, $v(x, h) = A_0e^{i\omega x}$. Для системы (3.2) граничные условия имеют вид

$$V(-h) = B_0,\ \left[\frac{dU}{dy} + \omega V\right]_{y=-h} = 0; \tag{3.3}$$

$$V(h) = A_0,\ \left[\frac{dU}{dy} + \omega V\right]_{y=h} = 0. \tag{3.4}$$

В полуплоскости P_1 решение системы (3.2), убывающее на бесконечности и принимающее при $y = -h$ заданные граничные условия (3.3), дается формулами

$$U(y) = \frac{B_0e^{\omega(y+h)}}{2(1-\sigma)}[(2\sigma-1) - \omega(y+h)],\ V(y) = \frac{B_0e^{\omega(y+h)}}{2(1-\sigma)}[2(1-\sigma) - \omega(y+h)].$$

Соответственно в полуплоскости P_2 решение системы (3.2), убывающее на бесконечности и принимающее при $y = h$ заданные граничные условия (3.4), дается формулами

$$U(y) = -\frac{A_0e^{\omega(h-y)}}{2(1-\sigma)}[2\sigma - 1 + \omega(y-h)],\ V(y) = \frac{A_0e^{\omega(h-y)}}{2(1-\sigma)}[2 - 2\sigma + \omega(y-h)].$$

Тогда по полученным перемещениям восстанавливается σ_{22} — компонента тензора напряжений на границах полуплоскостей $y = -h$, $y = h$

$$\sigma_{22}(x, -h) = \frac{E\omega}{2(1-\sigma^2)}B_0e^{i\omega x}; \tag{3.5}$$

$$\sigma_{22}(x, h) = -\frac{E\omega}{2(1-\sigma^2)}A_0e^{i\omega x}. \tag{3.6}$$

Теперь в слое S у системы уравнений (2.10) ищем решения, принимающие на границах $y = -h$ и $y = h$ заданные значения (3.5), (3.6) и

$\sigma_{12}(x, -h) = 0$, $\sigma_{12}(x, h) = 0$ и имеющие вид (3.1). Введем обозначения:

$$c_1 = c_2 = k_1^0 k_2^0 \left(\mathrm{E}_{12}^0 + \frac{k_2^0 \mathrm{E}_1^0}{k_1^{02} - k_2^{02}} \right); \; c_3 = k_1^{02} \frac{k_1^0 \mathrm{E}_1^0}{k_1^{02} - k_2^{02}};$$

$$c_4 = - k_1^{02} \mathrm{E}_{11}^0; \; c_5 = - k_2^{02} E_{22}^0; \; c_6 = k_2^{02} \frac{k_1^0 \mathrm{E}_1^0}{k_1^{02} - k_2^{02}}.$$

Подставив (3.1) в систему (2.10), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} c_6 \frac{d^2U}{dy^2} + c_1 \omega \frac{dV}{dy} + c_4 \omega^2 U = 0, \\ c_5 \frac{d^2V}{dy^2} + c_2 \omega \frac{dU}{dy} + c_3 \omega^2 V = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Решение системы уравнений (3.7) запишем в виде

$$\begin{gathered} U(y) = m_1 [a \cos \nu\omega y - b \sin \nu\omega y] e^{\mu\omega y} + m_2 \{b \cos \nu\omega y + \\ + a \sin \nu\omega y] e^{\mu\omega y} + m_3 [-a \cos \nu\omega y - b \sin \nu\omega y] e^{-\mu\omega y} + \\ + m_4 [-b \cos \nu\omega y + a \sin \nu\omega y] e^{-\mu\omega y}, \\ V(y) = m_1 \cos \nu\omega y e^{\mu\omega y} + m_2 \sin \nu\omega y e^{\mu\omega y} + \\ + m_3 \cos \nu\omega y e^{-\mu\omega y} - m_4 \sin \nu\omega y e^{-\mu\omega y}, \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} \mu = \sqrt{- (c_3c_6 + c_4c_5 - c_1c_2)/(4c_5c_6) + \sqrt{c_3c_4/(c_5c_6)}/2}; \\ \nu = \sqrt{(c_3c_6 + c_4c_5 - c_1c_2)/(4c_5c_6) + \sqrt{c_3c_4/(c_5c_6)}/2}; \\ a = -c_5\mu/c_1 - c_3\mu/(c_1(\mu^2 + \nu^2)); \; b = -c_5\nu/c_1 + c_1\nu/(c_1(\mu^2 + \nu^2)); \end{gathered}$$

m_1, m_2, m_3, m_4 — произвольные постоянные;

$$\begin{gathered} B_0 = V(-h) = m_1 \cos \nu\omega h e^{-\mu\omega h} - m_2 \sin \nu\omega h e^{-\mu\omega h} + \\ + m_3 \cos \nu\omega h e^{\mu\omega h} + m_4 \sin \nu\omega h e^{\mu\omega h}; \\ A_0 = V(h) = m_1 \cos \nu\omega h e^{\mu\omega h} + m_2 \sin \nu\omega h e^{\mu\omega h} + \\ + m_3 \cos \nu\omega h e^{-\mu\omega h} - m_4 \sin \nu\omega h e^{-\mu\omega h}. \end{gathered}$$

Условия на границе слоя S дают следующую алгебраическую систему уравнений относительно констант m_1, m_2, m_3, m_4:

$$\begin{gathered} m_1A_{11} + m_2A_{12} + m_3A_{13} + m_4A_{14} = 0, \; m_1A_{13} + m_2A_{14} + m_3A_{11} + \\ + m_4A_{12} = 0, \; m_1B_{11} + m_2B_{12} + m_3B_{13} + m_4B_{14} = 0, \; m_1B_{13} + m_2B_{14} + \\ + m_3B_{11} + m_4B_{12} = 0, \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} A_{11} = [(-a_{11} + R) \cos \nu\omega h + a_{12} \sin \nu\omega h] e^{\mu\omega h}; \\ A_{12} = [-a_{12} \cos \nu\omega h + (-a_{11} + R) \sin \nu\omega h] e^{\mu\omega h}; \\ A_{13} = [(a_{11} + R) \cos \nu\omega h + a_{12} \sin \nu\omega h] e^{-\mu\omega h}; \\ A_{14} = [a_{12} \cos \nu\omega h - (a_{11} + R) \sin \nu\omega h] e^{-\mu\omega h}; \\ B_{11} = (b_{11} \cos \nu\omega h - b_{12} \sin \nu\omega h) e^{\mu\omega h}; \; B_{12} = (b_{12} \cos \nu\omega h + \end{gathered}$$

$$+ b_{11} \sin \nu\omega h)e^{\mu\omega h}; \ B_{13} = (b_{11} \cos \nu\omega h + b_{12} \sin \nu\omega h)e^{-\mu\omega h};$$

$$B_{14} = (b_{12} \cos \nu\omega h - b_{11} \sin \nu\omega h)e^{-\mu\omega h};$$

$$a_{11} = b_1 k_1^0 a - b_2 k_2^0 \mu; \ a_{12} = b_1 k_1^0 b - b_2 k_2^0 \nu;$$

$$b_1 = \rho^0 k_2^0 E_{12}; \ b_2 = \rho^0 k_2^0 \mathrm{E}_{22}^0;$$

$$b_{11} = (\mu a - b\nu)\frac{k_2^{02}}{k_1^{02} - k_2^{02}} + \frac{k_1^{02}}{k_1^{02} - k_2^{02}};$$

$$b_{12} = \frac{k_2^{02}}{k_1^{02} - k_2^{02}}(\mu b + a\nu); \quad R = \frac{\mathrm{E}}{2(1 - \sigma^2)}.$$

Линейная однородная система алгебраических уравнений имеет отличное от нуля решение, если определитель этой системы равен нулю, т. е.

$$\begin{gathered}
[[-2b_{12}R \cos 2\nu\omega h - 2(b_{11}a_{11} + a_{12}b_{12}) \sin 2\nu\omega h - b_{12}R(e^{-2\mu\omega h} + \\
+ e^{2\mu\omega h}) + (a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12})(e^{-2\mu\omega h} - e^{2\mu\omega h})][-2b_{12}R \cos 2\nu\omega h - 2 \times \\
\times (b_{11}a_{11} + a_{12}b_{12}) \sin 2\nu\omega h + b_{12}R(e^{-2\mu\omega h} + e^{2\mu\omega h}) - (a_{12}b_{11} - \\
- a_{11}b_{12})(e^{-2\mu\omega h} - e^{2\mu\omega h})] = 0.
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Корни уравнения (3.8) ищем численно. При тех значениях сжимающих напряжений в слое S, которые задаются формулой (1.1), корни (3.8) будут комплексными, вида $\omega = \theta + i\psi$. Если $\omega = \theta + i\psi$ — корень, то $\bar{\omega} = \theta - i\psi$ также является корнем уравнения (3.8). Возьмем тот корень, который имеет меньшую положительную мнимую часть. Этот корень будет давать решение, наименее убывающее при $x \to \infty (x > 0)$. Например, для железа при сжатиях $\sigma_{11}^0 = -19$кбар $\theta = 2{,}89$, $\psi = 0{,}826$. При этом длина λ наименее убывающей при $x \to \infty$ волны, по которой изогнется слой, определяется по формуле $\lambda = 2\pi/\theta$. Будем считать, что в результате такого изгиба слоя S в вершинах полуволн образуются пластические шарниры. В дальнейшем слой рассматривается как «стержневая система». Длина l «стержней» равна половине длины волн, т. е. $l = \pi/\theta$.

4. Вычислим силу реакции полуплоскости P_1 на излом ее границы (фиг. 1). Равновесие напряженного состояния в полуплоскости описывается системой уравнений (2.11). Вертикальное смещение границы полуплоскости P_1 зададим следующим образом:

$$v(x, -h) = \frac{4C}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos[(2k-1)\theta x], \tag{4.1}$$

где C — амплитуда изгиба.

Будем искать решение (2.11), удовлетворяющее условию (4.1) и $\sigma_{12}(x, -h) = 0$, в виде

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} U_{2k-1}(y) \sin[(2k-1)\theta x], \tag{4.2}$$

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} V_{k-1}(y) \cos[(2k-1)\theta x].$$

Тогда искомым решением будет решение вида (4.2), в котором

$$U_{2k-1}(y) = -\left[r_{2k-1} - \frac{4\sigma - 3}{(2k-1)\theta} d_{2k-1} + d_{2k-1}(y + h)\right] e^{(2k-1)\theta(y+h)},$$

$$V_{2k-1}(y) = [r_{2k-1} + d_{2k-1}(y+h)]\, e^{(2k-1)\theta(y+h)},$$

где

$$r_{2k-1} = \frac{4C}{\pi^2}, \quad d_{2k-1} = -\frac{4C}{\pi^2}\frac{(2k-1)\,\theta}{2(1-\sigma)}.$$

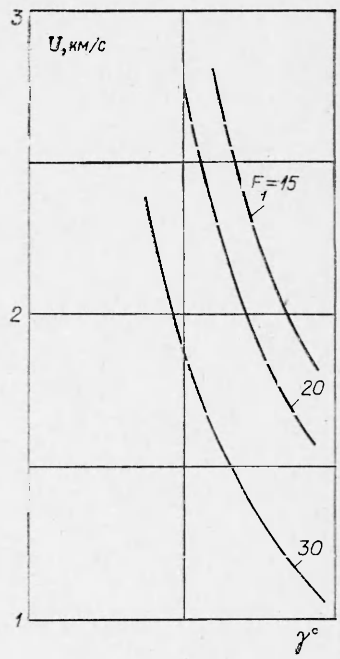
Сила P реакции полуплоскости P_1 на излом границы, сосредоточенная в вершине излома и имеющая вертикальное направление (см. фиг. 1), определится в виде

$$(4.3) \qquad P = \int\limits_{-l/2}^{l/2} \sigma_{22}(x, -h)\, dx =$$

$$= \frac{4C}{\pi^2}\frac{\mathrm{E}}{(1-\sigma^2)}\sum^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} - \frac{4C}{\pi^2}\frac{\mathrm{E}}{(1-\sigma^2)}\,G,$$

где постоянная Каталана $G = 0{,}915965594\ldots$

Реакция двух полуплоскостей на изгиб оснований будет равна $2P$. Естественно предположить, что имеются зоны пластических деформаций, расположенные в полуплоскостях в окрестностях излома их границ. В связи с этим в (4.3) величину $\mathrm{E}/(1-\sigma^2)$ заменим на $\tilde{\mathrm{E}}/(1-\tilde{\sigma}^2) = \mathrm{E}_0$ — характерный модуль в зоне пластических деформаций. Для железа $\rho_0 = 7{,}84$ г/см^3, $b_0 = 2{,}8$ км/с, $c_0 = 5{,}7$ км/с, $n = 0{,}63$, $m = 2{,}7$, $\sigma_s = 20$ кбар, а величина θ при сжатиях k, близких к σ_s, лежит в пределах $1{,}43 \leqslant \theta h \leqslant 1{,}45$. Высота слоя h берется из работы [1]. Для того чтобы слой изломался, необходимо, чтобы сила была больше $2P$, т. е.



Фиг. 2

$$(4.4) \qquad U > \frac{2\mathrm{E}_0 G}{\theta h}\frac{3\tau_s}{4\rho_0 H}\left(\frac{c_0^2 - b_0^2}{c_0^2 - 2b_0^2}\right)\frac{1}{\sin(\gamma/2)}.$$

Воспользуемся (4.4) и построим на плоскости (U, γ) кривую, отделяющую область тех значений U и γ, при которых возможен излом слоя. Точки U и γ, которые лежат выше кривых, изображенных на фиг. 2, отвечают значениям скоростей точки контакта и углов соударений, при которых возможен излом слоя. Кривые построены для железа при различных значениях $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}(1-\tilde{\sigma}^2)/\tilde{\mathrm{E}}(1-\sigma^2)$ ($\tau_s = 1$ мкс).

Автор выражает благодарность С. К. Годунову и Е. И. Роменскому за обсуждения работы.

Поступила 21 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К., Сергеев-Альбов Н. Н.** Уравнения линейной теории упругости с точечными максвелловскими источниками релаксации напряжений.— ПМТФ, 1977, № 4.
2. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973.
3. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М., «Наука», 1978.