

**ВЛИЯНИЕ БЛИЗОСТИ ЭКРАНА НА ПОДЪЕМНУЮ СИЛУ,
СОЗДАВАЕМУЮ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ СПЛОШНЫМИ СТРУЯМИ**

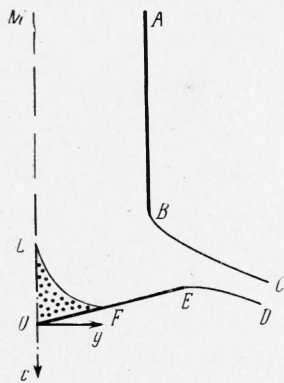
Ф. С. Владимирова

(Томск)

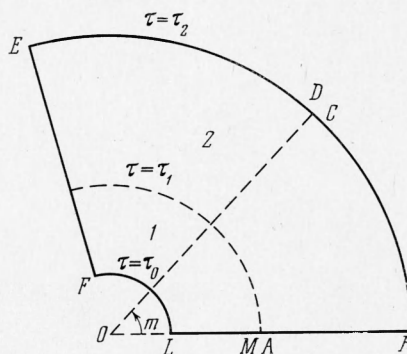
В связи с разработкой аппаратов вертикального взлета и посадки, а также аппаратов на воздушной подушке исследуется влияние близости Земли на подъемную силу, создаваемую вертикальными сплошными струями. Для плоского течения несжимаемой идеальной жидкости такое исследование выполнено в работе [1]. Там же на основе приближенного метода проведено обобщение полученного результата на случай сжимаемой жидкости.

В данной работе плоская задача об обтекании двухгранного препятствия струей газа, вытекающей из канала с параллельными стенками, решена методом Чаплыгина — Фальковича [2,3]. Из полученного решения, как частные случаи, следуют результаты работ [1,4-9]. Проведены расчеты, выяснено влияние близости экрана и эффекта сжимаемости жидкости на характеристики течения при дозвуковых скоростях.

1. Дозвуковой газовый поток, ограниченный полубесконечными параллельными стенками, расстояние между которыми равно $2d$, имеет вверху на бесконечности скорость v_1 и плотность ρ_1 . На некотором рас-



Фиг. 1



Фиг. 2

стоянии s от отверстия канала поток встречает на своем пути двухгранное препятствие, которое разделяет его на две симметричные ветви шириной δ на бесконечности. Ввиду симметрии задачи достаточно рассмотреть лишь половину области течения (фиг. 1).

Здесь AB — стенка канала, MLO — ось симметрии, OFE — грань препятствия, длина которой l , BC , ED — свободные поверхности струи, на которых скорость газа $v_2 > v_1$, плотность ρ_2 , m — угол наклона струи к оси x на бесконечности, s — расстояние вершины препятствия O от выходного отверстия канала, $\alpha = \sigma l$ ($0 < \sigma < 1$) — угол, который грань OFE образует с направлением скорости v_1 .

Предполагается, что в вершине препятствия образуется застойная зона LOF со сводной поверхностью LF , на которой скорость газа $v_0 < v_1$ и плотность ρ_0 . Схема струйного обтекания пластинки с застойной зоной перед ней была предложена С. А. Чаплыгиным [8].

Обозначим расход газа в канале через Q и примем, что вдоль линии тока $MLFED$ функция тока $\psi = 0$, следовательно, на линии тока ABC будет $\psi = Q/2$.

В плоскости годографа скорости с полярными координатами τ, θ ($\tau = v^2/v_m^2$, где v — скорость, v_m — максимальная скорость, θ — угол наклона скорости к оси x (фиг. 1)) всей области, занятой потоком, будет соответствовать сектор кольца с разрезом вдоль луча $\theta = 0$, радиусами τ_0, τ_2 и углом раствора α (фиг. 2). Значения, которые должна принимать функция тока вдоль границ области годографа скорости будут следующие:

$$\begin{aligned} \psi = 0 & \quad \text{при } \theta = 0, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ \psi = 0 & \quad \text{при } \theta = \alpha, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \psi = Q/2 & \quad \text{при } \theta = 0, \quad \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \\ \psi = 0 & \quad \text{при } \tau = \tau_0, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha \\ \psi = 0 & \quad \text{при } \tau = \tau_2, \quad m \leq \theta \leq \alpha \\ \psi = Q/2 & \quad \text{при } \tau = \tau_2, \quad 0 \leq \theta \leq m \end{aligned} \quad (1.2)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению внутренней задачи Дирихле для уравнения Чаплыгина

$$4\tau^2(1-\tau) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + 4\tau[1+(\beta-1)\tau] \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + [1-(2\beta+1)\tau] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.3)$$

в соответствующих подобластях сектора кольца. Здесь $\beta = 1/(\kappa - 1)$, $\kappa = c_p/c_v$. Так как $\tau < 1/(2\beta + 1)$, то в рассматриваемой области уравнение (1.3) будет эллиптического типа.

Следуя С. В. Фальковичу [3], решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(\tau, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n z_\lambda(\tau) + B_n \zeta_\lambda(\tau)] \sin \lambda \theta, \quad \lambda = n/\sigma \\ \psi_2(\tau, \theta) &= \frac{Q(\alpha - \theta)}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n z_\lambda(\tau) + D_n \zeta_\lambda(\tau)] \sin \lambda \theta \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь индекс при ψ соответствует номеру подобласти сектора кольца, в которой ищется решение; $z_\lambda(\tau)$ — интеграл уравнения

$$4\tau^2(1-\tau) z_\lambda'' + 4\tau[1+(\beta-1)\tau] z_\lambda' - \lambda^2[1-(2\beta+1)\tau] z_\lambda = 0 \quad (1.5)$$

регулярный при $\tau = 0$; $\zeta_\lambda(\tau)$ — второй линейно-независимый интеграл уравнения (1.5), полученный Лайтхиллом [10] и Черри [11, 12] и впервые использованный в теории газовых струй С. В. Фальковичем [3]. Для вронскиана этих интегралов имеем

$$w_\lambda(\tau) = z_\lambda'(\tau) \zeta_\lambda(\tau) - \zeta_\lambda'(\tau) z_\lambda(\tau) = \lambda(1-\tau)^\beta \tau^{-1} \quad (1.6)$$

Коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n подлежат определению из граничных условий и условий аналитического продолжения [3].

В принятых обозначениях выражение для расхода газа принимает вид

$$Q = 2dv_1(1 - \tau_1)^\beta \quad (1.7)$$

Функции тока, определяемые посредством (1.4), удовлетворяют граничным условиям (1.1). Потребуем теперь выполнения граничных условий (1.2), а также условий аналитического продолжения через границы подобластей, т. е.

$$\psi_1(\tau_1, \theta) = \psi_2(\tau_1, \theta), \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} \quad \text{при } \tau = \tau_1 \quad 0 \leq \theta \leq \alpha \quad (1.8)$$

Из условий (1.2) и (1.8) следует система уравнений

$$\begin{aligned} A_n z_\lambda(\tau_0) + B_n \zeta_\lambda(\tau_0) &= 0 \\ C_n z_\lambda(\tau_2) + D_n \zeta_\lambda(\tau_2) &= -(Q/n\pi) \cos \lambda m \\ (A_n - C_n) z_\lambda'(\tau_1) + (B_n - D_n) \zeta_\lambda'(\tau_1) &= 0 \\ (A_n - C_n) z_\lambda(\tau_1) + (B_n - D_n) \zeta_\lambda(\tau_1) &= Q/n\pi \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений и используя (1.6), найдем коэффициенты A_n, \dots, D_n . Так определяется функция тока (1.4), и окончательное решение задачи будет иметь вид

$$\psi_1(\tau, \theta) = \frac{Q}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} f_\lambda(\tau) \sin \lambda \theta \quad (1.9)$$

$$\psi_2(\tau, \theta) = \frac{Q}{\alpha} \left[\frac{\alpha - \theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \chi_\lambda(\tau) \sin \lambda \theta \right]$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_\lambda(\tau) &= \left[\frac{T_\lambda'(\tau_1, \tau_2)}{w_\lambda(\tau_1)} - \cos \lambda m \right] \frac{T_\lambda(\tau, \tau_0)}{T_\lambda(\tau_2, \tau_0)} \\ \chi_\lambda(\tau) &= \frac{T_\lambda'(\tau_1, \tau_0)}{w_\lambda(\tau_1)} \frac{T_\lambda(\tau, \tau_2)}{T_\lambda(\tau_2, \tau_0)} - \frac{T_\lambda(\tau, \tau_0)}{T_\lambda(\tau_2, \tau_0)} \cos \lambda m \end{aligned} \quad (1.10)$$

где для удобства записи положено [13]

$$\begin{aligned} T_\lambda(\tau, \tau_i) &= z_\lambda(\tau) \zeta_\lambda(\tau_i) - z_\lambda(\tau_i) \zeta_\lambda(\tau), \quad T_\lambda(\tau_i, \tau_i) = 0 \\ T_\lambda'(\tau_i, \tau_j) &= [T_\lambda(\tau, \tau_j)]_{\tau=\tau_i}, \quad T_\lambda'(\tau_i, \tau_i) = w_\lambda(\tau_i) \quad (i, j = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

Свойства функций $f_\lambda(\tau), \chi_\lambda(\tau)$ выражаются следующими равенствами [14]:

$$\begin{aligned} f_\lambda(\tau_0) &= 0, \quad f_\lambda(\tau_1) - \chi_\lambda(\tau_1) = 1, \quad \chi_\lambda(\tau_2) = -\cos \lambda m \\ f_\lambda'(\tau_1) - \chi_\lambda'(\tau_1) &= 0 \\ f_\lambda'(\tau_0) &= \left[\frac{T_\lambda'(\tau_1, \tau_2)}{w_\lambda(\tau_2)} - \cos \lambda m \right] \frac{w_\lambda(\tau_0)}{T_\lambda(\tau_2, \tau_0)} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \chi_\lambda'(\tau_2) &= \frac{w_\lambda(\tau_2)}{w_\lambda(\tau_1)} \frac{T_\lambda'(\tau_1, \tau_0)}{T_\lambda(\tau_2, \tau_0)} - \frac{T_\lambda'(\tau_2, \tau_0)}{T_\lambda(\tau_2, \tau_0)} \cos \lambda m \\ \lim_{\tau_0 \rightarrow 0} f_\lambda'(\tau_0) &= 0, \quad \lim_{\tau_0 \rightarrow 0} \chi_\lambda'(\tau_2) = \frac{w_\lambda(\tau_2)}{w_\lambda(\tau_1)} \frac{z_\lambda'(\tau_1)}{z_\lambda(\tau_2)} - \frac{z_\lambda'(\tau_2)}{z_\lambda(\tau_2)} \cos \lambda m \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\lim_{v_m \rightarrow \infty} \tau_0 f_\lambda'(\tau_0) = \frac{\lambda}{2} \left(q_{01}^\lambda \frac{1 + q_{12}^{2\lambda}}{1 - q_{02}^{2\lambda}} - \frac{2q_{02}^\lambda}{1 - q_{02}^{2\lambda}} \cos \lambda m \right) \quad (1.13)$$

$$\lim_{v_m \rightarrow \infty} \tau_2 \chi_\lambda'(\tau_2) = \frac{\lambda}{2} \left(q_{12}^\lambda \frac{1 + q_{01}^{2\lambda}}{1 - q_{02}^{2\lambda}} - \frac{1 + q_{02}^{2\lambda}}{1 - q_{02}^{2\lambda}} \cos \lambda m \right)$$

$$q_{ij} = (\tau_i / \tau_j)^{1/2} = v_i / v_j \quad (i, j = 0, 1, 2)$$

2. Определим связь между параметрами задачи и размеры застойной зоны. Вдоль любой линии тока имеют место общие формулы

$$\begin{aligned} dx &= \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{v} \left[2\tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau} d\theta - \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\tau \right] \cos \theta \\ dy &= \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{v} \left[2\tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau} d\theta - \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\tau \right] \sin \theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

которые на струйной поверхности $\tau = \text{const}$ преобразуются к виду

$$dx = \frac{2\tau}{v(1-\tau)^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \cos \theta d\theta, \quad dy = \frac{2\tau}{v(1-\tau)^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \sin \theta d\theta \quad (2.2)$$

Подставив $\psi_1(\tau, \theta)$ из (1.9) с учетом (1.10) в (2.2), положив $\tau = \tau_0$ и проинтегрировав полученное выражение по θ вдоль струйной поверхности LF от 0 до θ , а затем определив постоянные интегрирования из условия, что $x_F = l_1 \cos \alpha$, $y_L = 0$ ($l_1 = OF$ на фиг. 1), найдем параметрические уравнения границы LF застойной зоны

$$x = l_1 \cos \alpha + \frac{Q\tau_0(1-\tau_0)^{-\beta}}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{\lambda}'(\tau_0)}{\lambda} \left[(-1)^n \frac{2\lambda \cos \alpha}{\lambda^2 - 1} - \frac{\cos(\lambda+1)\theta}{\lambda+1} - \frac{\cos(\lambda-1)\theta}{\lambda-1} \right] \quad (2.3)$$

$$y = \frac{Q\tau_0(1-\tau_0)^{-\beta}}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{\lambda}'(\tau_0)}{\lambda} \left[\frac{\sin(\lambda-1)\theta}{\lambda-1} - \frac{\sin(\lambda+1)\theta}{\lambda+1} \right] \quad (2.4)$$

Из этих равенств легко получить размеры $OF = l_1$, $LO = h$ зоны спокойного газа, для чего следует в (2.3), (2.4) положить соответственно $\theta = 0$, $\theta = \alpha$ и принять во внимание (1.7)

$$l_1 = \frac{4d}{\alpha} \left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau_0} \right)^\beta \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda^2 - 1} \tau_0 f_{\lambda}'(\tau_0) \quad (2.5)$$

$$h = \frac{4d}{\alpha} \left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau_0} \right)^\beta \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 - 1} \tau_0 f_{\lambda}'(\tau_0) \quad (2.6)$$

Из равенств (2.4) при $\theta = \alpha$, т. е. $d\theta = 0$, следует выражение для элемента длины dl грани препятствия

$$dl = \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2v\tau^{1/2}(1-\tau)^{\beta+1}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{\theta=\alpha} d\tau \quad (2.7)$$

Вставив выражения для функции тока (1.9) с учетом (1.10) в равенство (2.7), проинтегрировав полученное выражение от τ_0 до τ_2 , приняв во внимание равенства (2.5), (1.11) и выполнив элементарные преобразования аналогично [14], получим выражение для отрезка $FE = l_2$ в виде

$$l_2 = \frac{d}{\sin \alpha} \left\{ 1 - \Delta(\tau_1, \tau_2) \left[\cos m + \frac{4 \sin \alpha}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - 1} \tau_2 \lambda_{\lambda}'(\tau_2) \right] \right\} - l_1 \quad (2.8)$$

где

$$\Delta(\tau_1, \tau_2) = \left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau_2} \right)^\beta \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^{1/2}$$

После сложения равенств (2.5) и (2.8) найдем длину l грани препятствия

$$l = \frac{d}{\sin \alpha} \left\{ 1 - \Delta(\tau_1, \tau_2) \left[\cos m + \frac{4 \sin \alpha}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - 1} \tau_2 \lambda_{\lambda}'(\tau_2) \right] \right\} \quad (2.9)$$

Проинтегрировав равенства (2.2) по θ от 0 до θ с учетом $\psi_2(\tau, \theta)$ из (1.9), а затем положив $\tau = \tau_2$ и определив постоянные интегрирования из условия, что координаты точки $B(-s, d)$ известны, получим параметрические уравнения контура струи BC

$$x = -s + \frac{Q\tau_2}{\alpha} \frac{(1 - \tau_2)^{-\beta}}{v_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\lambda}'(\tau_2)}{\lambda} \left[\frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1} - \frac{\cos(\lambda + 1)\theta}{\lambda + 1} - \frac{\cos(\lambda - 1)\theta}{\lambda - 1} \right] \quad (2.10)$$

$$y = d + \frac{Q\tau_2}{\alpha} \frac{(1 - \tau_2)^{-\beta}}{v_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\lambda}'(\tau_2)}{\lambda} \left[\frac{\sin(\lambda - 1)\theta}{\lambda - 1} - \frac{\sin(\lambda + 1)\theta}{\lambda + 1} \right]$$

Аналогично находятся уравнения контура струи ED

$$\begin{aligned} x' &= l \cos \alpha + \\ &+ \frac{Q\tau_2}{\alpha} \frac{(1 - \tau_2)^{-\beta}}{v_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\lambda}'(\tau_2)}{\lambda} \left[(-i)^n \frac{2\lambda \cos \alpha}{\lambda^2 - 1} - \frac{\cos(\lambda + 1)\theta}{\lambda + 1} - \frac{(\cos \lambda - 1)\theta}{\lambda - 1} \right] \quad (2.11) \\ y' &= l \sin \alpha + \\ &+ \frac{Q\tau_2}{\alpha} \frac{(1 - \tau_2)^{-\beta}}{v_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\lambda}'(\tau_2)}{\lambda} \left[(-i)^n \frac{2\lambda \sin \alpha}{\lambda^2 - 1} + \frac{\sin(\lambda - 1)\theta}{\lambda - 1} - \frac{\sin(\lambda + 1)\theta}{\lambda + 1} \right] \end{aligned}$$

Здесь x' , y' — координаты точек, расположенных на контуре ED .

Для получения еще одного соотношения между параметрами задачи воспользуемся предположением Н. Е. Жуковского [15] о том, что точки C и D лежат на эквипотенциальных линиях. При таком допущении, следуя [16] и учитывая равенства (2.9) — (2.11) и уравнение неразрывности

$$\delta = d \Delta(\tau_1, \tau_2) \quad (2.12)$$

найдем соотношение для $v = s/d$ в виде

$$v = -\operatorname{ctg} \alpha + \Delta(\tau_1, \tau_2) \left[\sin m + \cos m \operatorname{ctg} \alpha + \frac{4}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 - 1} \tau_2 \lambda_{\lambda}'(\tau_2) \right] \quad (2.13)$$

3. Равнодействующую R давлений на препятствие определим путем интегрирования вдоль его граней

$$R = 2(J + p_0 l_1 - p_2 l) \sin \alpha, \quad J = \int_{l_1}^l p dl \quad (3.1)$$

Здесь p — давление перед гранью препятствия, p_0 — давление в застойной зоне, p_2 — давление за препятствием. Учитывая равенство (2.8) и используя соотношения

$$p = p^{\circ} (1 - \tau)^{\beta+1}, \quad p^{\circ} = v_m^2 / 2(\beta + 1) \quad (3.2)$$

где p° — давление газа в точке торможения, представим J в виде

$$J = \frac{p^{\circ}}{2v_m} \left[\int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau^{3/2}} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right)_{\theta=\alpha} d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_0} \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau^{3/2}} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right)_{\theta=\alpha} d\tau \right] \quad (3.3)$$

Из равенств (2.5), (2.9) и (3.2) легко получить выражения

$$p_0 l_1 = \frac{2Qp^\circ}{\alpha} \frac{1-\tau_0}{v_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda^2-1} f_{\lambda}'(\tau_0) \quad (3.4)$$

$$p_2 l = \frac{Qp^\circ}{2 \sin \alpha} \frac{1-\tau_2}{v_2} \left[\Delta(\tau_2, \tau_1) - \cos m + \frac{4 \sin \alpha}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda^2-1} \tau_2 \chi_{\lambda}'(\tau_2) \right]$$

Вычислив интегралы в (3.3) с учетом (1.9), (1.10), аналогично тому как выполнено в работе [14], и приняв во внимание равенства (3.2), (3.4), окончательно получим

$$R = Qv_1 [1 + \mathcal{F}(\tau_1, \tau_2) - (\tau_2/\tau_1)^{1/2} \cos m] \quad (3.5)$$

где

$$\mathcal{F}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1-\tau_1}{2(\beta+1)\tau_1} \left[1 - \left(\frac{1-\tau_2}{1-\tau_1} \right)^{\beta+1} \right]$$

Легко убедиться, что при $v_m \rightarrow \infty$ функция $\mathcal{F}(\tau_1, \tau_2)$ преобразуется к виду

$$\mathcal{F}(v_1, v_2) = (v_2^2 - v_1^2)/2v_1^2 \quad (3.6)$$

Соотношения (1.9), (2.5), (2.6), (2.9), (2.13) и (3.5) дают решение поставленной задачи, из которых, как частные случаи, следует ряд известных результатов С. А. Чаплыгина [2], Л. Н. Сретенского [4], В. И. Трошина [5], Е. Мургулеску [7], Н. А. Слезкина [9]. Например, при $\tau_0 = 0$, $m = \pi/2$, $\sigma = 1/2$ ($\lambda = 2n$) с учетом (1.12) получим решение задачи об ударе газовой струи, вытекающей из канала, по беспредельной плоскости в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(\tau, \theta) &= \frac{Q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} + \frac{T'_{2n}(\tau_1, \tau_2)}{w_{2n}(\tau_1)} \right] \frac{z_{2n}(\tau) \sin 2n\theta}{z_{2n}(\tau_2) n} \\ \psi_2(\tau, \theta) &= \frac{Q}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} + \frac{z'_{2n}(\tau_1) T_{2n}(\tau, \tau_2)}{w_{2n}(\tau_1) z_{2n}(\tau)} \right] \frac{z_{2n}(\tau) \sin 2n\theta}{z_{2n}(\tau_2) n} \right\} \\ v &= \Delta(\tau_1, \tau_2) \left\{ 1 + \frac{8\tau_2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \left[(-1)^{n-1} \frac{z'_{2n}(\tau_2)}{z_{2n}(\tau_2)} + \frac{w_{2n}(\tau_2)}{w_{2n}(\tau_1)} \frac{z'_{2n}(\tau_1)}{z_{2n}(\tau_2)} \right] \right\} \\ R &= Qv_1 [1 + \mathcal{F}(\tau_1, \tau_2)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

В этом случае R можно интерпретировать как подъемную силу, создаваемую сплошными струями. Однако при условии постоянной подводимой мощности [1]

$$\tau_{2\infty}^{3/2} (1 - \tau_{2\infty})^\beta d = \tau_2^{3/2} (1 - \tau_2)^\beta \delta \quad (3.8)$$

более удобным критерием увеличения подъемной силы вследствие близости Земли является отношение ее величины к тяге на значительном удалении от Земли

$$L_\infty = 2\rho_{2\infty} v_{2\infty}^2 d \quad (3.9)$$

где $v_{2\infty}$ — скорость истечения газа из сопла на значительном удалении от Земли, $\rho_{2\infty}$ — плотность газа в этой струе.

Поделив почленно второе выражение (3.7) на равенство (3.9), получим

$$c_L \equiv R/L_\infty = \Delta(\tau_1, \tau_{2\infty}) [1 + \mathcal{F}(\tau_1, \tau_2)] \quad (3.10)$$

Учитывая уравнение неразрывности (2.12), условие постоянной подводимой мощности (3.8) можно представить в виде

$$\tau_{2\infty}^{3/2} (1 - \tau_{2\infty})^\beta = \tau_2 \tau_1^{1/2} (1 - \tau_1)^\beta \quad (3.11)$$

4. Полученный результат легко распространить на случай несжимаемой жидкости. Соотношения (2.5), (2.6), (2.9), (2.13) и (3.5) с учетом (1.13), (3.6) принимают вид

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{2dq_{10}}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \left[q_{01}^\lambda \frac{1 + q_{12}^{2\lambda}}{1 - q_{02}^{2\lambda}} - \frac{2q_{02}^\lambda}{1 - q_{02}^{2\lambda}} \cos \lambda m \right] \\ \frac{l}{d} &= \frac{1 - q_{12} \cos m}{\sin \alpha} + \frac{2q_{12}}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \left[q_{12}^\lambda \frac{1 + q_{01}^{2\lambda}}{1 - q_{02}^{2\lambda}} - \frac{1 + q_{02}^{2\lambda}}{1 - q_{02}^{2\lambda}} \cos \lambda m \right] \\ v &= -\operatorname{ctg} \alpha + q_{12}(\sin m + \cos m \operatorname{ctg} \alpha) + \frac{2q_{12}}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \left[q_{12}^\lambda \frac{1 + q_{01}^{2\lambda}}{1 - q_{02}^{2\lambda}} - \frac{1 + q_{02}^{2\lambda}}{1 - q_{02}^{2\lambda}} \cos \lambda m \right] \\ R &= (Q/2v_1) (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos m) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из формул (4.1) при $v_1 = v_2$ следует результат работы [6], а также можно получить известные формулы Н. Е. Жуковского [15]. Например, полагая $\alpha = \pi/2$, $\lambda = 2n$, $v_1 = v_2$ и используя соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{8n \sin^2 nm}{4n^2 - 1} = \sin m \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{m}{2} \right)$$

получим решение задачи об обтекании пластинки струей несжимаемой жидкости по схеме Чаплыгина

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{32dq_{10}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} \frac{q_{01}^{2n} \sin^2 nm}{1 - q_{01}^{4n}} \\ h &= \frac{32dq_{10}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \frac{q_{01}^{2n} \sin^2 nm}{1 - q_{01}^{4n}} \\ \frac{l}{d} &= 2 \sin^2 \frac{m}{2} + \frac{2}{\pi} \sin m \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{m}{2} \right) + \frac{32}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} \frac{q_{01}^{4n} \sin^2 nm}{1 - q_{01}^{4n}} \\ R &= 4d\rho_1 v_1^2 \sin^2 m/2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Переходя в формулах (4.2) к пределу при $m \rightarrow 0$, $d \rightarrow \infty$ и отыскивая из выражения для l предел

$$\lim_{m \rightarrow 0} (dm^2) = \frac{2l\pi}{\pi + 4 + 64\Omega}$$

найдем известные формулы Чаплыгина [8]

$$l_1 = \frac{64lq_{10}H}{\pi + 4 + 64\Omega}, \quad h = \frac{64lq_{10}\Pi}{\pi + 4 + 64\Omega}, \quad R = \frac{2\rho_1 v_1^2 l \pi}{\pi + 4 + 64\Omega}$$

где

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{4n^2 - 1} \frac{q_{01}^{2n}}{1 - q_{01}^{4n}}, \quad \Pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^2 - 1} \frac{q_{01}^{2n}}{1 - q_{01}^{4n}} \\ \Omega &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{4n^2 - 1} \frac{q_{01}^{4n}}{1 - q_{01}^{4n}} \end{aligned}$$

Соотношения (3.7), (3.10), (3.11) в случае несжимаемой жидкости принимают вид:

$$v = q_{12} + \frac{1 + q_{12}^2}{\pi} \ln \frac{1 + q_{12}}{1 - q_{12}}, \quad c_L = \frac{1 + q_{12}^2}{2^{1/3} q_{12}}, \quad v_{2\infty} = (v_1 v_2)^{2/3} \quad (4.3)$$

По формулам (3.7), (3.10), (3.11) и (4.3) проведены расчеты при скорости звука $a = 340$ м/сек, $\beta = 2.5$, результаты которых представлены в таблице. Расчеты для сжимаемой жидкости проводились по τ , однако для выявления эффекта сжимаемости в таблице приведены скорости в м/сек.

v	Сжимаемая жидкость				Несжимаемая жидкость		
	v_1	v_2	$v_{2\infty}$	c_L	v_2	$v_{2\infty}$	c_L
0.2	24.2	213.2	104.7	1.994	199.7	98.8	2.074
0.4	24.2	103.4	63.9	1.374	102.0	63.2	1.378
0.4	54.7	259.5	158.7	1.380	230.5	142.7	1.378
0.6	24.2	70.3	49.3	1.136	70.3	49.3	1.138
0.6	54.7	163.1	114.3	1.137	158.1	110.6	1.138
0.6	76.1	244.0	171.3	1.140	221.0	154.9	1.138
0.8	24.2	53.6	41.1	1.023	55.0	41.8	1.031
0.8	54.7	124.1	94.8	1.027	124.2	94.5	1.031
0.8	76.1	180.9	138.2	1.029	172.8	131.4	1.031
0.8	107.6	278.0	213.2	1.030	244.3	185.9	1.031
1.0	24.2	45.7	36.9	0.978	46.1	37.2	0.978
1.0	54.7	104.0	84.9	0.980	104.1	84.0	0.978
1.0	76.1	146.8	119.4	0.981	144.8	116.8	0.978
1.0	107.6	214.4	175.3	0.986	204.7	165.2	0.978
1.2	24.2	39.9	33.7	0.954	40.4	34.0	0.956
1.2	54.7	89.6	75.9	0.955	91.2	76.9	0.956
1.2	76.1	128.0	108.5	0.955	126.0	106.5	0.956
1.2	107.6	181.8	155.4	0.962	179.3	151.1	0.956
1.2	152.2	268.1	232.8	0.967	253.7	214.0	0.956
1.4	24.2	35.6	31.3	0.946	36.4	31.2	0.946
1.4	54.7	80.3	70.5	0.946	82.3	71.8	0.946
1.4	76.1	114.3	100.4	0.948	114.5	99.8	0.946
1.4	107.6	162.8	143.7	0.948	161.1	140.8	0.946
1.4	152.2	234.0	209.2	0.951	229.0	200.0	0.946
1.4	186.4	293.4	267.3	0.959	280.4	244.7	0.946
1.6	24.2	33.1	29.7	0.945	33.6	30.1	0.945
1.6	54.7	74.0	66.7	0.946	75.9	65.1	0.945
1.6	76.1	105.3	94.9	0.946	105.6	94.7	0.945
1.6	107.6	143.3	131.3	0.949	149.3	133.9	0.945
1.6	152.2	212.6	194.4	0.951	211.2	181.1	0.945
1.6	186.4	259.7	241.2	0.958	258.6	231.9	0.945
1.6	215.2	298.9	282.8	0.967	298.6	267.7	0.945
1.8	24.2	30.8	28.2	0.948	31.4	28.8	0.948
1.8	54.7	69.1	63.7	0.950	71.1	65.1	0.948
1.8	76.1	98.3	90.5	0.950	99.0	90.2	0.948
1.8	107.6	137.8	127.8	0.952	139.9	128.2	0.948
1.8	152.2	194.9	182.2	0.956	197.9	181.3	0.948
1.8	186.4	238.4	225.1	0.961	242.4	222.1	0.948
1.8	215.2	275.2	262.9	0.969	279.1	255.9	0.948
2.0	24.2	29.3	27.9	0.954	29.9	27.8	0.953
2.0	54.7	65.6	61.4	0.955	67.5	62.9	0.953
2.0	76.1	92.8	87.0	0.956	93.9	87.6	0.953
2.0	107.6	131.7	123.8	0.957	132.8	123.8	0.953
2.0	152.2	183.9	174.6	0.962	187.0	174.6	0.953
2.0	186.4	223.6	214.8	0.967	230.0	214.5	0.953
2.0	215.2	257.3	248.4	0.973	265.6	247.6	0.953
2.0	240.6	280.9	274.4	0.981	296.9	276.8	0.953

Из анализа таблиц и формул вытекают следующие выводы:

1) при возрастании v от 0.2 до 1.6 значение c_L — отношение подъемной силы к тяге при постоянной подводимой мощности — падает более чем на 45% и достигает минимума, который меньше единицы. Затем c_L растет с ростом v и достигает единицы для несжимаемой жидкости при $v = \infty$, для сжимаемой же при конечном v , определяемом формулой

$$v = 1 + \frac{16\tau}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \frac{z'_{2n}(\tau)}{z_{2n}(\tau)}$$

где Σ' означает суммирование по нечетным n ;

2) эффект сжимаемости не увеличивает существенно влияние Земли на подъемную силу, создаваемую вертикальными сплошными струями;

3) дополнительного прироста подъемной силы при возрастании скорости v_1 в случае несжимаемой жидкости не возникает и этот прирост не существен для сжимаемой жидкости.

Поступила 1 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Cohen M. J. Analysis of lift augmentation of vertical solid jets in proximity of the ground. Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, Ser. E., No. 2. (Рус. перев.: Исследование приращения подъемной силы, создаваемой вертикальными сплошными струями вблизи Земли. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер., Е, Прикл. механ., 1965, т. 32, № 2, стр. 7—15.)
2. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Собр. соч., М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1949, т. 2, стр. 19—137.
3. Фалькович С. В. К теории газовых струй. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4, стр. 459—464.
4. Сретенский Л. Н. К теории газовых струй. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2, стр. 305—332.
5. Трошин В. И. Обтекание пластинки струей газа, вытекающей из канала. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4, стр. 766—769.
6. Murgulescu E. Asupra devierii unui jet de largime finita printr-un obstacol diedric. Studii si cercetari matematice, 1964, tom. 15, No. 3, pp. 417—427.
7. Murgulescu E. Asupra devierii unuui jet gazos subsonic, de largime finita, printr-un obstacol diedric. Studii si cercetari matematice Acad. RSR, 1965, tom. 17, No. 7, pp. 1007—1019.
8. Чаплыгин С. А. К вопросу о струях в несжимаемой жидкости. Собр. соч., М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1948, т. 2, стр. 5—18.
9. Слезкин Н. А. Об ударе плоской газовой струи в безграничную стенку. ПММ, 1952, т. 16, вып. 2, стр. 227—230.
10. Lighthill M. J. The hodograph transformation in transonic flow. II. Auxiliary theorems on the hypergeometric functions $\psi_n(\tau)$. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1947, vol. 191, pp. 341—351.
11. Cherru T. M. Flow of a compressible fluid about a cylinder. II. Flow with circulation. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1949, vol. 196, No. 1044, pp. 1—31.
12. Cherru T. M. Asymptotic expansions of the hypergeometric functions occurring in gas-flow theory. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1950, vol. 202, No. 1071, pp. 507—523.
13. Макеев Н. Н. О соударении газовых струй. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2, стр. 308—315.
14. Владимир Ф. С. Струйное обтекание пластинки вблизи стенки. ПМТФ, 1968, № 3, стр. 104—109.
15. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока. Сочинения. М.—Л., Гостехиздат, 1949, т. 2, стр. 489—626.
16. Владимир Ф. С. Соударение струй, вытекающих из каналов с параллельными стенками. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1, стр. 11—19.