УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ГЕРЦА

И. И. Аргатов

Государственная морская академия им. адм. С. О. Макарова, 199106 Санкт-Петербург

Методом сращиваемых асимптотических разложений построены главные члены асимптотики решения контактной задачи с односторонним ограничением о сжатии без трения плоских упругих тел, первоначально касающихся в точке. Задача определения сближения контактирующих тел в зависимости от сдавливающей силы сведена к расчету так называемых коэффициентов локальной податливости. Рассмотрены примеры контакта упругого кольца и упругих круговых дисков со штампами и упругого диска с двумя обжимающими упругими полосами. Построена асимптотическая модель квазистатического соударения плоских упругих тел.

Задачи одностороннего контакта упругих тел исследовались в рамках теории вариационных неравенств (см. [1–4] и др.). Метод конечных элементов для численного решения задачи (1.8) разработан в [1]. В настоящей работе для получения приближенного решения данной задачи применяется метод сращиваемых асимптотических разложений [5–7]. В [8] этим методом решена задача о сжатии двух круговых дисков, в [9] — задача о вдавливании с трением упругого диска в жесткий угол. Рассматриваемая ниже задача решалась в [10] при исследовании прочности клапанов для каналов малого проходного сечения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим сжатие двух упругих тел Ω^1 и Ω^2 (рис. 1). Вектор перемещений точек тела Ω^r ($r = 1, 2$) обозначим через $\boldsymbol{u}^r = (u_1^r, u_2^r)$. Будем считать, что тело Ω^1 неподвижно закреплено на части границы Γ_u, т. е.

$$\boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma_u. \tag{1.1}$$

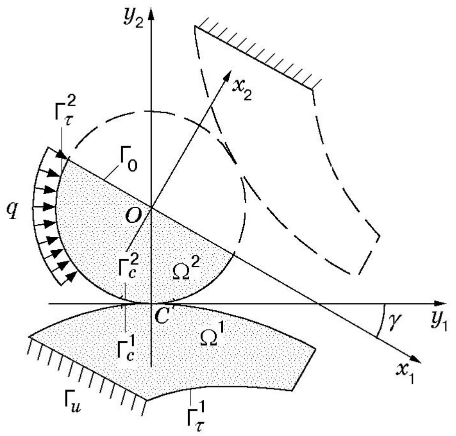

Рис. 1

Работа выполнена при финансовой поддержке Администрации Санкт-Петербурга (грант № М2000-2.2.П-16).

Вследствие симметрии задачи на части Γ_0 границы тела Ω^2 ставятся условия двустороннего контакта

$$u_2^2(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \tau_{12}^2(\boldsymbol{u}^2; \boldsymbol{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_0. \tag{1.2}$$

На участке Γ_τ^2 задаются поверхностные нагрузки

$$\sum_{j=1}^{2} \tau_{ij}^2(\boldsymbol{u}^2; \boldsymbol{x}) n_j^2(\boldsymbol{x}) = q_i(\boldsymbol{x}) \quad (i = 1, 2), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_\tau^2. \tag{1.3}$$

Часть границы Γ_τ^1 тела Ω^1 для простоты предполагается свободной от напряжений:

$$\sum_{j=1}^{2} \tau_{ij}^1(\boldsymbol{u}^1; \boldsymbol{x}) n_j^1(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (i = 1, 2), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_\tau^1. \tag{1.4}$$

Здесь $\tau_{ij}^r(\boldsymbol{u}^r)$ — компоненты напряжений, соответствующие вектору смещений $\boldsymbol{u}^r$; e_{ij}^r — компоненты тензора деформаций тела Ω^r:

$$\tau_{ij}^r = 2\mu_r e_{ij}^r + \delta_{ij} \mu_r \frac{3 - æ_r}{æ_r - 1}(e_{11}^r + e_{22}^r), \qquad e_{ij}^r = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i^r}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^r}{\partial x_i}\Big),$$

δ_{ij} — символ Кронекера; μ_r — модуль сдвига; $æ_r = 3 - 4\nu_r$ (в случае плоской деформации); ν_r — коэффициент Пуассона.

В недеформированном состоянии упругие тела Ω^1 и Ω^2 касаются в точке C, в которую поместим начало локальной системы координат y_1 и y_2. Под действием внешней нагрузки тело Ω^2 давит на тело Ω^1. Для простоты предполагаем, что трение между контактирующими поверхностями отсутствует. Будем считать, что участки границ Γ_c^1 и Γ_c^2, которые могут прийти в контакт в процессе деформации, являются гладкими кривыми и задаются уравнениями

$$y_2 = f_r(y_1), \qquad y_1 \in (-l_1, l_2) \qquad (r = 1, 2), \tag{1.5}$$

где $(-l_1, l_2)$ — промежуток, содержащий проекцию возможной зоны контакта. Определим расстояние между точками контактирующих тел в исходном положении (до деформации)

$$\Delta(y_1) = f_2(y_1) - f_1(y_1). \tag{1.6}$$

Для того чтобы получить граничные условия одностороннего контакта на Γ_c^1 и Γ_c^2, обратимся к вариационной формулировке [1] рассматриваемой задачи. Введем пространство возможных полей перемещений с конечной энергией $V = \{(\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2)\colon \boldsymbol{v}^1 = 0$ на Γ_u, $v_2^2 = 0$ на $\Gamma_0\}$ (см. [1]) и определим функционал потенциальной энергии

$$L(\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2) = \sum_{r=1}^{2} \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega^r} \sum_{i,j=1}^{2} \tau_{ij}^r(\boldsymbol{v}^r; \boldsymbol{x}) e_{ij}(\boldsymbol{v}^r; \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Gamma_\tau^2} \sum_{i=1}^{2} q_i(\boldsymbol{x}) v_i^2(\boldsymbol{x})\, ds_x.$$

Согласно [1] контактная задача о сжатии упругих тел Ω^1 и Ω^2, первоначально касающихся в точке, сводится к задаче минимизации функционала $L(\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2)$ на множестве допустимых перемещений

$$K_\Delta = \big\{(\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2) \in V\colon \hat{v}_2^1(y_1, f_1(y_1)) - \hat{v}_2^2(y_1, f_2(y_1)) \leqslant \Delta(y_1),\ y_1 \in (-l_1, l_2)\big\}.$$

Здесь $\hat{v}_2^r = -v_1^r \sin\gamma + v_2^r \cos\gamma$ — проекция вектора $\boldsymbol{v}^r$ на ось Oy_2; γ — угол между осями x_1 и y_1.

Справедливо следующее утверждение (см. теорему 2.6 в [1]). Пусть Γ_0 состоит из отрезков, параллельных оси Ox_1. Тогда, если $\cos(x_1, y_2) < 0$ и

$$Q_1 = \int\limits_{\Gamma_\tau^2} q_1(\boldsymbol{x})\, ds_x > 0, \tag{1.7}$$

то существует единственное решение $(\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{u}^2) \in K_\Delta$ задачи

$$L(\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{u}^2) \leqslant L(\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2) \qquad \forall (\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2) \in K_\Delta. \tag{1.8}$$

При этом в точках кривых Γ_c^1 и Γ_c^2 с одинаковой абсциссой $y_1 \in (-l_1, l_2)$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \hat{u}_2^1(y_1, f_1) - \hat{u}_2^2(y_1, f_2) \leqslant \Delta(y_1), \qquad \hat{T}_2^1(y_1, f_1)/\cos\alpha_1 = -\hat{T}_2^2(y_1, f_2)/\cos\alpha_2 \leqslant 0, \\ [\hat{u}_2^1(y_1, f_1) - \hat{u}_2^2(y_1, f_2) - \Delta(y_1)]\hat{T}_2^1(y_1, f_1) = 0; \end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\hat{T}_1^1(y_1, f_1) = \hat{T}_1^2(y_1, f_2) = 0. \tag{1.10}$$

Здесь $\hat{T}_i^r$ — проекция на ось Oy_i вектора напряжений на площадке с нормалью $\boldsymbol{n}^r$; α_r — угол между осью Oy_1 и касательной к Γ_c^r. Выполнение неравенства (1.7) обеспечивает вдавливание тела Ω^2 в Ω^1.

Чтобы использовать асимптотический метод, введем малый положительный параметр ε:

$$q_i = \varepsilon q_i^* \tag{1.11}$$

и будем считать, что к телу Ω^2 приложена пропорциональная параметру ε система сил с направленной вдоль оси Ox_1 равнодействующей

$$Q_1 = \varepsilon Q_1^*, \qquad Q_1^* = \int\limits_{\Gamma_\tau^2} q_1^*(\boldsymbol{x})\, ds_x.$$

Следуя [11], построим главные члены асимптотики решения задачи (1.8), (1.11) при $\varepsilon \to 0$.

2. Внешнее асимптотическое представление. Обозначим через $\boldsymbol{G}^1(\boldsymbol{x})$ решение задачи о действии на упругое тело Ω^1 единичной сосредоточенной силы, приложенной в точке C и направленной по нормали к границе внутрь области Ω^1. Вектор $\boldsymbol{G}^1(\boldsymbol{x})$ должен удовлетворять системе уравнений Ламе в Ω^1, граничному условию заделки (1.1) на участке Γ_u и условию отсутствия напряжений на участках Γ_τ^1 и $\Gamma_c^1 \setminus C$.

Введем проекции вектора $\boldsymbol{G}^1(\boldsymbol{x})$ на оси локальной системы координат Cy_1y_2

$$\hat{G}_1^1(\boldsymbol{y}) = G_1^1(\boldsymbol{x})\cos\gamma + G_2^1(\boldsymbol{x})\sin\gamma, \qquad \hat{G}_2^1(\boldsymbol{y}) = -G_1^1(\boldsymbol{x})\sin\gamma + G_2^1(\boldsymbol{x})\cos\gamma, \tag{2.1}$$

где $x_1 = y_1\cos\gamma - y_2\sin\gamma$; $x_2 = y_1\sin\gamma + y_2\cos\gamma$.

При $|\boldsymbol{y}| = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \to 0$ верны асимптотические формулы

$$\hat{G}_i^1(\boldsymbol{y}) = S_i^1(\boldsymbol{y}/R_1) + n_1 A_i^1 + O(|\boldsymbol{y}|) \qquad (i = 1, 2). \tag{2.2}$$

Здесь R_1 — радиус кривизны контура Γ_c^1 в точке C; $\boldsymbol{S}^r(\boldsymbol{y}/R_1)$ — решение задачи Фламана (см., например, [12, § 90]) о действии на упругую полуплоскость $y_2 \leqslant 0$ (для $r = 1$) единичной сосредоточенной силы, направленной противоположно оси Cy_2, причем

$$\begin{gathered} 4\pi\mu_r S_1^r(\boldsymbol{\zeta}) = -2\zeta_1\zeta_2/|\boldsymbol{\zeta}|^2 + (æ_r - 1)\,\mathrm{arctg}(\zeta_1/\zeta_2), \\ 4\pi\mu_r S_2^r(\boldsymbol{\zeta}) = (æ_r + 1)\ln|\boldsymbol{\zeta}| - 2\zeta_2^2/|\boldsymbol{\zeta}|^2, \qquad n_r = (æ_r + 1)/(4\pi\mu_r) \end{gathered} \tag{2.3}$$

($\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2)$ — безразмерные координаты).

На удалении от площадки контакта поле перемещений $\boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x})$ упругого тела Ω^1 представим в виде

$$\boldsymbol{v}^1(\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{G}^1(\boldsymbol{x}), \tag{2.4}$$

где P — контактная сила.

Рассмотрим тело Ω^2. При описании его поля перемещений $\boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{x})$ на удалении от площадки контакта воздействие тела Ω^1 на тело Ω^2 заменяем сосредоточенной силой P, направленной по оси Cy_2. В результате получим задачу о равновесии тела Ω^2 под действием самоуравновешенной системы нагрузок, лежащего на гладкой опоре Γ_0, решение которой определено с точностью до поступательного смещения.

Введем нормированное решение $\boldsymbol{v}^{20}(\boldsymbol{x})$ указанной задачи, однозначно определенное условием $v_1^{20}(O) = 0$, имеющим простой механический смысл: проскальзывание на опоре в точке O равно нулю. Вектор $\boldsymbol{v}^{20}(\boldsymbol{x})$ должен удовлетворять однородной системе уравнений Ламе в области Ω^2, граничным условиям (1.2) двустороннего контакта на Γ_0, силовому граничному условию (1.3) на Γ_τ^2 и асимптотическому условию при $\boldsymbol{x} \to C$ (ср. с (2.2)):

$$\hat{v}_i^{20}(\boldsymbol{y}) = -P\big[S_i^2(\boldsymbol{y}/R_2) + n_2 A_i^2 + O(|\boldsymbol{y}|)\big] \qquad (i = 1, 2). \tag{2.5}$$

Здесь R_2 — радиус кривизны Γ_c^2 в точке C; $\hat{v}_i^{20}(\boldsymbol{y})$ — проекция на ось Cy_i вектора $\boldsymbol{v}^{20}(\boldsymbol{x})$ (см. (2.1)).

Из уравнения статического равновесия тела Ω^2 находим

$$P = \varepsilon P^*, \qquad P^* = (\sin\gamma)^{-1} Q_1^*. \tag{2.6}$$

Итак, внешнее асимптотическое представление для поля перемещений упругого тела Ω^2 представим в виде суммы

$$\boldsymbol{v}^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}^{20}(\boldsymbol{x}) + \alpha \boldsymbol{e}_1, \tag{2.7}$$

где постоянная α — малое смещение центра тела Ω^2 вдоль оси Ox_1. Положим

$$\alpha = \varepsilon\alpha^*. \tag{2.8}$$

Величина α определяется локальными деформациями в зоне контакта.

3. Задача одностороннего контакта для пограничного слоя. Участки границ Γ_c^1 и Γ_c^2 в окрестности точки первоначального касания аппроксимируем параболами

$$f_r(y_1) = (-1)^r (2R_r)^{-1} y_1^2 + O(y_1^3) \qquad (r = 1, 2). \tag{3.1}$$

Введем “растянутые” координаты

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2), \qquad \eta_i = \varepsilon^{-1/2} y_i. \tag{3.2}$$

Степень растяжения в (3.2) выбрана так, чтобы в координатах η_1 и η_2 размер площадки контакта в главном не зависел от параметра ε (см. известные решения контактной задачи о давлении на упругую полуплоскость штампа, очерченного дугой параболы [12, 13]).

Соответственно для величины зазора между поверхностями тел Ω^1 и Ω^2 в недеформированном состоянии (см. (1.6)) находим

$$\Delta(\varepsilon^{1/2}\eta_1) = \varepsilon\big[(2R_1)^{-1} + (2R_2)^{-1}\big]\eta_1^2 + O(\varepsilon^{3/2}\eta_1^3). \tag{3.3}$$

Вместе с тем в координатах (3.2) уравнения границ Γ_c^1 и Γ_c^2 согласно (1.5) и (3.1) в главном имеют вид

$$\eta_2 = (-1)^r \varepsilon^{1/2} (2R_r)^{-1} \eta_1^2 \qquad (r = 1, 2). \tag{3.4}$$

Поскольку при переходе к координатам (3.2) концы дуг Γ_c^1 и Γ_c^2 удаляются от точки C на расстояния $\varepsilon^{-1/2}l_1$ и $\varepsilon^{-1/2}l_2$, задачу для внутреннего асимптотического представления $\boldsymbol{w}^r(\boldsymbol{\eta})$ поля перемещений $\boldsymbol{u}^r(\boldsymbol{x})$ точек упругого тела Ω^r формулируем в полубесконечной области, границей которой является парабола (3.4).

Согласно методу сращиваемых разложений асимптотические формулы (2.2) и (2.5) (с учетом (2.4) и (2.7)) дают условия на поведение вектор-функций $\boldsymbol{w}^1(\boldsymbol{\eta})$ и $\boldsymbol{w}^2(\boldsymbol{\eta})$ на бесконечности. Так, пренебрегая в (2.2) и (2.5) членами $O(\varepsilon^{1/2}|\boldsymbol{\eta}|)$ по сравнению с единицей, при $|\boldsymbol{\eta}| \to \infty$ находим

$$\boldsymbol{w}^1(\boldsymbol{\eta}) = \varepsilon P^*\big[\boldsymbol{S}^1(\varepsilon^{1/2}\boldsymbol{\eta}/R_1) + n_1\boldsymbol{A}^1\big] + O(|\boldsymbol{\eta}|^{-1}); \qquad (3.5)$$

$$\boldsymbol{w}^2(\boldsymbol{\eta}) = -\varepsilon P^*\big[\boldsymbol{S}^2(\varepsilon^{1/2}\boldsymbol{\eta}/R_2) + n_2\boldsymbol{A}^2\big] + \varepsilon\alpha^*(\cos\gamma, -\sin\gamma) + O(|\boldsymbol{\eta}|^{-1}). \qquad (3.6)$$

В соотношениях (3.5), (3.6) использованы нормировки (2.6) и (2.8).

Граничные условия для векторов $\boldsymbol{w}^1(\boldsymbol{\eta})$ и $\boldsymbol{w}^2(\boldsymbol{\eta})$ получим из граничных условий одностороннего контакта без трения (1.9) и (1.10), в которые необходимо подставить зависимости (3.1) и произвести обратную (3.2) замену переменных. В результате с учетом (3.4) условие непроникновения точек контактирующих тел (см. первое неравенство в (1.9)) принимает вид

$$w_2^1(\eta_1, \varepsilon^{1/2}\varphi_1(\eta_1)) - w_2^2(\eta_1, \varepsilon^{1/2}\varphi_2(\eta_1)) \leqslant \varepsilon\Delta^*(\eta_1). \qquad (3.7)$$

Здесь $\varphi_r(\eta_1) = (-1)^r(2R_r)^{-1}\eta_1^2$ $(r = 1, 2)$; $\Delta^*(\eta_1) = [(2R_1)^{-1} + (2R_2)^{-1}]\eta_1^2$. Аналогично (3.7) преобразуются остальные соотношения в (1.9), (1.10).

4. Внутреннее асимптотическое представление. Решение в области локальных деформаций представим в виде

$$\boldsymbol{w}^1(\boldsymbol{\eta}) = \varepsilon\boldsymbol{W}^1(\boldsymbol{\eta}) + \varepsilon P^* n_1(\boldsymbol{A}^1 + \hat{\boldsymbol{e}}_2\ln\sqrt{\varepsilon}); \qquad (4.1)$$

$$\boldsymbol{w}^2(\boldsymbol{\eta}) = \varepsilon\boldsymbol{W}^2(\boldsymbol{\eta}) - \varepsilon P^* n_2(\boldsymbol{A}^2 + \hat{\boldsymbol{e}}_2\ln\sqrt{\varepsilon}) + \varepsilon\alpha^*(\cos\gamma, -\sin\gamma), \qquad (4.2)$$

где $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ — орт координатной оси $C\eta_2$.

Подставляя (4.1) и (4.2) в (3.7), находим

$$\begin{gathered} W_2^1(\eta_1, \varepsilon^{1/2}\varphi_1(\eta_1)) - W_2^2(\eta_1, \varepsilon^{1/2}\varphi_2(\eta_1)) \leqslant \Delta_\varepsilon^*(\eta_1), \\ \Delta_\varepsilon^*(\eta_1) = \Delta^*(\eta_1) - P^*\sum_{r=1}^{2} n_r(A_2^r + \ln\sqrt{\varepsilon}) - \alpha^*\sin\gamma. \end{gathered} \qquad (4.3)$$

Окончательно граничное условие для главных членов асимптотики вектор-функций $\boldsymbol{W}^1(\boldsymbol{\eta})$ и $\boldsymbol{W}^2(\boldsymbol{\eta})$ получим, переходя в левой части неравенства (4.3) к пределу при $\varepsilon \to 0$ и "распрямляя" границы (3.4).

Таким образом, векторы $\boldsymbol{W}^1(\boldsymbol{\eta})$ и $\boldsymbol{W}^2(\boldsymbol{\eta})$ должны удовлетворять системе уравнений Ламе в полуплоскостях $\eta_2 < 0$ и $\eta_2 > 0$ соответственно, а на бесконечности удовлетворять условиям $(r = 1, 2)$

$$\boldsymbol{W}^r(\boldsymbol{\eta}) = (-1)^{r+1}P^*\boldsymbol{S}^r(\boldsymbol{\eta}/R_r) + O(|\boldsymbol{\eta}|^{-1}), \qquad |\boldsymbol{\eta}| \to \infty. \qquad (4.4)$$

Кроме того, на границе раздела $\eta_2 = 0$ должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{gathered} W_2^1(\eta_1, 0) - W_2^2(\eta_1, 0) \leqslant \Delta_\varepsilon^*(\eta_1), \qquad \tau_{22}^1(\eta_1, 0) = \tau_{22}^2(\eta_1, 0) \leqslant 0, \\ \big[W_2^1(\eta_1, 0) - W_2^2(\eta_1, 0) - \Delta_\varepsilon^*(\eta_1)\big]\tau_{22}^1(\eta_1, 0) = 0, \qquad \tau_{12}^1(\eta_1, 0) = \tau_{12}^2(\eta_1, 0) = 0. \end{gathered} \qquad (4.5)$$

Точное решение данной задачи легко выписать, используя результаты [12, 13]. Обозначим полуширину искомой площадки контакта (в координатах (3.2)) через h_*. Вектор-функцию $\boldsymbol{W}^r(\boldsymbol{\eta})$ представим в форме интеграла

$$\boldsymbol{W}^r(\boldsymbol{\eta}) = (-1)^{r+1} \int\limits_{-h_*}^{h_*} \boldsymbol{S}\Big(\frac{\eta_1-\xi}{R_r}, \frac{\eta_2}{R_r}\Big) p^*(\xi)\, d\xi \tag{4.6}$$

с плотностью, распределенной по закону

$$p^*(\eta_1) = (2P^*/(\pi h_*))\sqrt{1-\eta_1^2/h_*^2}. \tag{4.7}$$

Вектор (4.6) удовлетворяет асимптотическому условию (4.4). В то же время на границе полуплоскости выполняется равенство

$$W_2^r(\eta_1, 0) = (-1)^r P^* n_r \Big(\frac{\eta_1^2}{h_*^2} - \ln\frac{2R_r}{h_*} - \frac{1}{2}\Big), \quad \eta_1 \in (-h_*, h_*). \tag{4.8}$$

Подставляя в уравнение совместности перемещений $W_2^1(\eta_1, 0) - W_2^2(\eta_1, 0) = \Delta_\varepsilon^*(\eta_1)$, $\eta_1 \in (-h_*, h_*)$ выражение для $\Delta_\varepsilon^*(\eta_1)$ из (4.3) и граничные значения (4.8), после несложных преобразований получим систему уравнений

$$h_*^2 = (2R_1R_2/(R_1+R_2))P^*(n_1+n_2); \tag{4.9}$$

$$P^* \sum_{r=1}^{2} n_r \Big(\ln\frac{2R_r}{\sqrt{\varepsilon}h_*} + \frac{1}{2} - A_2^r\Big) = \alpha^* \sin\gamma, \tag{4.10}$$

где n_r — упругая постоянная, выражение для которой приведено в (2.3); $2h_*$ — размер участка контакта в координатах (3.2). В реальном масштабе, согласно (3.2) имеем

$$h = \sqrt{\varepsilon} h_*. \tag{4.11}$$

Итак, в результате построения главных членов асимптотики исходной контактной задачи получены формулы (4.7), (4.9) и (4.10). Уравнения (4.7), (4.9), как и следовало ожидать, совпадают с зависимостями Герца. Новым соотношением является уравнение (4.10), связывающее силу P^* с перемещением α^*.

5. Асимптотическое моделирование сжатия упругих тел. Примеры. Для определения контактного давления и основных параметров контакта h и α имеем уравнения (см. (2.6), (2.8), (4.7) и (4.9)–(4.11))

$$p(y_1) = (2P/(\pi h))\sqrt{1-y_1^2/h^2}, \qquad h^2 = (2R_1R_2/(R_1+R_2))(n_1+n_2)P; \tag{5.1}$$

$$P \sum_{r=1}^{2} n_r \Big(\ln\frac{2R_r}{h} + \frac{1}{2} - A_2^r\Big) = \alpha \sin\gamma. \tag{5.2}$$

В уравнение (5.2) входят безразмерные постоянные A_2^1 и A_2^2 (коэффициенты в асимптотических формулах (2.2) и (2.5)). Величина A_2^1 зависит от положения точки C, а также от формы и способа закрепления тела Ω^1. Величина A_2^2 зависит от распределения нагрузки, приложенной к телу Ω^2. В частных случаях, некоторые из которых обсуждаются ниже, удается получить явное выражение для этих величин.

5.1. *Сжатие упругого кольца криволинейными штампами.* Рассмотрим упругое кольцо Ω с внешним радиусом R и внутренним βR $(0 \leqslant \beta < 1)$, сдавливаемое абсолютно

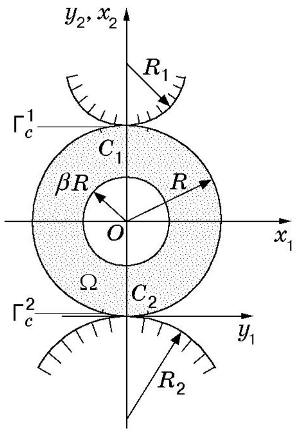

Рис. 2

β	c
0,1	0,0926
0,2	0,4042
0,3	1,0638
0,4	2,4052
0,5	5,3122
0,6	12,4833
0,7	34,4229

жесткими штампами (рис. 2). Для простоты внутренняя граница кольца Ω предполагается незагруженной. Обозначим через $2\delta_0$ сближение штампов и положим $\delta_0 = \varepsilon\delta_0^*$, где ε — малый параметр. Тогда условие непроникновения точек тела Ω в штамп, например на границе Γ_c^2 (определяемой уравнением $y_2 = f_2(y_1)$), имеет вид $u_2(y_1, f_2) \geqslant \varepsilon\delta_0^* - [(2R_1)^{-1} + (2R_2)^{-1}]y_1^2$ для $|y_1| < l_2$.

Внешнее асимптотическое представление поля перемещений тела Ω выберем в виде $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{x}) + \alpha\boldsymbol{e}_2$, где $\boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{x})$ — решение задачи о сжатии упругого кольца сосредоточенными в точках C_1 и C_2 силами P. Используя явное решение (см. [14, гл. 7, § 7.6]), для компонент вектора $\boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{x} \to C_2$ получаем разложение (2.5) с коэффициентами $A_1 = 0$ и $A_2 = 1 - \ln 2 - c$, где

$$c = c_0 + \sum_{k=2,4,\ldots} \frac{k}{k^2-1} c_k, \quad c_0 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}, \quad c_k = 2\beta^{2k-2}\,\frac{k^2(1-\beta^2)^2 + k(1-\beta^4) + 2\beta^2(1-\beta^{2k})}{(1-\beta^{2k})^2 - k^2\beta^{2k-2}(1-\beta^2)^2}.$$

Результаты расчетов по данным формулам приведены в таблице.

В качестве внутреннего асимптотического представления в окрестности точки C_2 будем иметь сумму (4.2) с $\gamma = \pi/2$. В результате несложных вычислений получим

$$h_i^2 = 2RR_i(R+R_i)^{-1}nP \quad (i=1,2), \qquad n = (\text{æ}+1)/(4\pi\mu); \tag{5.3}$$

$$\alpha = \frac{1}{4}nP\ln\frac{R_2(R+R_1)}{R_1(R+R_2)}; \tag{5.4}$$

$$nP\big(\ln(4R/h_1) + \ln(4R/h_2) - 1 + 2c\big) = 2\delta_0. \tag{5.5}$$

Для случая кругового диска ($\beta = 0$) данная задача рассматривалась в [8]. Уравнения (5.3) и (5.5) (при $c = 0$) с точностью до обозначений согласуются с результатами [8]. Относительное смещение центра упругого диска (5.4) в [8] не вычислялось. Зависимость (5.5) для кругового диска совпадает с полученной другим способом в [15] (см. § 5.6, формула (5.57)). Следует отметить также работу [16], в которой выписана двухчленная асимптотика в случае сжатия упругого диска прямолинейными штампами. Зависимости (5.3) и (5.5) совпадают с главными членами асимптотических формул (4.24) и (4.23) соответственно, полученных в [16].

5.2. *Сжатие двух упругих дисков.* Контактное давление, возникающее между дисками (рис. 3), и полуширина h участка контакта определяются формулами (5.1). Для полуширины контакта h_i диска со штампом имеем зависимость

$$h_i^2 = 2R_inP \qquad (i=1,2). \tag{5.6}$$

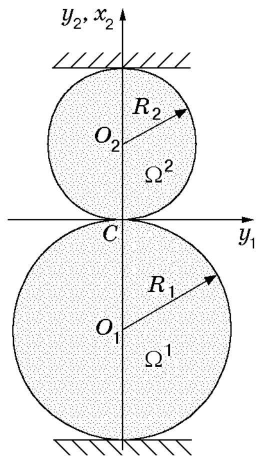

Рис. 3

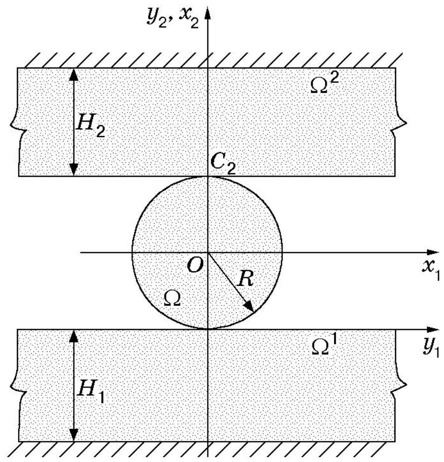

Рис. 4

Сближение штампов $2\delta_0$ связано с величиной сдавливающих усилий P уравнением

$$P\sum_{i=1}^{2} n_i\Big(\ln\frac{4R_i}{h}+\ln\frac{4R_i}{h_i}-1\Big)=2\delta_0. \tag{5.7}$$

Сближение центров упругих дисков равно

$$\alpha_1-\alpha_2=P\sum_{i=1}^{2} n_i\Big(\ln\frac{4R_i}{h}-\frac{1}{2}\Big), \tag{5.8}$$

где α_i — перемещение точки O_i вдоль оси $O_i x_2$.

Формулы (5.1), (5.6)–(5.8) в главном дают решение поставленной задачи. Впервые приближенная зависимость между сближением центров круговых дисков и сдавливающей силой выведена в [17, гл. 8]. Другие решения приведены в [18, § 54; 19]. Задача о сжатии двух дисков сосредоточенными силами изучена в [8, 20]. Решение этой задачи дается соотношениями (5.1) и (5.8), по существу, совпадающими с результатами [8, 20]. Следует отметить, что формула (5.8) представляет собой асимптотически точный результат.

5.3. *Сжатие упругого диска между упругими полосами.* Пусть упругие полосы шириной H_1 и H_2, жестко сцепленные со штампами, сдавливают упругий диск радиусом R (рис. 4). Как и выше, сближение штампов обозначим через $2\delta_0$. Тогда внешнее асимптотическое представление для поля перемещений первой полосы имеет вид $\boldsymbol{v}^1(\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{G}^1(\boldsymbol{x}) + \delta_0\boldsymbol{e}_2$. Здесь $\boldsymbol{G}^1(\boldsymbol{x})$ — решение задачи о действии на границу упругого тела Ω^1 в точке C_1 единичной сосредоточенной силы, направленной противоположно оси Ox_2, причем $\boldsymbol{G}^1(\boldsymbol{x}) = 0$ при $x_2 = -(R+H_1)$.

В асимптотической формуле $G_j^1(y_1, y_2-R) = S_j^1(\boldsymbol{y}/H_1)+n_1A_j^1+O(|\boldsymbol{y}|)$, $|\boldsymbol{y}|\to 0$ $(j=1,2)$ равны $A_1^1=0$ и $A_2^1=d_0^1$, где постоянная d_0^i согласно результатам [21, § 22] имеет вид

$$d_0^i=\int\limits_0^\infty \frac{1}{u}\big(1-\mathrm{e}^{-u}-L_i(u)\big)\,du, \qquad L_i(u)=\frac{2æ_i\,\mathrm{sh}\,(2u)-4u}{2æ_i\,\mathrm{ch}\,(2u)+1+æ_i^2+4u^2}.$$

В частности, $d_0^i\approx 0{,}527$ для значения коэффициента Пуассона $\nu_i=0{,}3$ (см. [21, табл. 3]).

Полуширина участка контакта вычисляется по формуле

$$h_i^2=2R(n_i+n)P \qquad (i=1,2). \tag{5.9}$$

Контактная сила P связана со сближением штампов уравнением

$$nP\Big(\ln\frac{4R}{h_1}+\ln\frac{4R}{h_2}-1\Big)+\sum_{i=1}^{2}n_iP\Big(\ln\frac{2H_i}{h_i}+\frac{1}{2}-d_0^i\Big)=2\delta_0. \tag{5.10}$$

Перемещение центра диска в результате деформации равно

$$\alpha=\frac{1}{4}\,nP\ln\frac{n_1+n}{n_2+n}+\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^i}{2}\,n_iP\Big(\ln\frac{2H_i}{h_i}+\frac{1}{2}-d_0^i\Big). \tag{5.11}$$

Формулы (5.9)–(5.11) могут быть использованы при расчетах упругих деформаций подшипников качения.

6. Асимптотическая модель квазистатического соударения плоских упругих тел. Решение задачи о соударении круговых цилиндров вдоль их образующих в квазистатической постановке дано в [22] (см. также [23]). Построим асимптотическую модель квазистатического соударения двух цилиндров, в момент удара касающихся вдоль общей образующей. Для этого, следуя [22, 23], воспользуемся решением задачи о сжатии круговых дисков Ω^1 и Ω^2 (обозначения см. на рис. 4) под действием нагрузок, распределенных по их площадям с плотностью $(-1)^{r+1}S_r^{-1}P\boldsymbol{e}_2$ ($r=1,2$), где P — равнодействующая контактных давлений; $S_r=\pi R_r^2$ — площадь диска Ω^r.

Внешнее асимптотическое представление выберем в виде $\boldsymbol{v}^r(\boldsymbol{y})=P\boldsymbol{G}^r(\boldsymbol{y})+\alpha_r\boldsymbol{e}_2$. Здесь $\boldsymbol{G}^r(\boldsymbol{y})$ — решение задачи о деформации диска Ω^r под действием распределенной нагрузки $(-1)^{r+1}S_r^{-1}\boldsymbol{e}_2$, уравновешенной единичной сосредоточенной силой $(-1)^r\boldsymbol{e}_2$, приложенной в точке C, причем в точке O_r (центре диска) выполняется условие $\boldsymbol{G}^r(O_r)=0$. Используя явные формулы [22], находим

$$\boldsymbol{G}^r(\boldsymbol{y})=(-1)^{r+1}\big[\boldsymbol{S}^r(\boldsymbol{y}/R_r)+n_rA_2^r\boldsymbol{e}_2\big]+O(|\boldsymbol{y}|),\qquad |\boldsymbol{y}|\to 0; \tag{6.1}$$

$$A_2^r=\big[2(\text{æ}_r+1)\big]^{-1}(\text{æ}_r+2)\qquad (r=1,2). \tag{6.2}$$

При рассмотрении пограничного слоя в первом приближении следует пренебречь распределенными нагрузками. Тогда, используя решение, построенное в п. **4**, получим уравнение

$$\alpha=P\sum_{r=1}^{2}n_r\Big(\ln\frac{2R_r}{h}+\frac{1}{2}-A_2^r\Big), \tag{6.3}$$

связывающее сближение дисков $\alpha=\alpha_1-\alpha_2$ с контактной силой P. Полуширина участка контакта h вычисляется по формуле (5.1).

Уравнение (6.3) (с учетом (6.2)) совпадает с аналогичным в [22; 23, гл. 3, уравнение (4.6)], полученным другим способом.

Согласно второму закону Ньютона движение центра масс диска Ω^r в процессе соударения описывается уравнением $S_r\rho_r\ddot{\alpha}_r=(-1)^rP$, где ρ_r — плотность материала; точкой обозначено дифференцирование по времени. Следствием последних двух уравнений ($r=1,2$) является уравнение

$$M_0\ddot{\alpha}=-P,\qquad M_0=S_1S_2\rho_1\rho_2/(S_1\rho_1+S_2\rho_2). \tag{6.4}$$

Для уравнения (6.4) ставятся начальные условия $\alpha=0$ и $\dot{\alpha}=v_1-v_2$, где v_r — скорость тела Ω^r в момент $t=0$.

В работах [22, 23] уравнения (5.1), (6.3), (6.4) положены в основу квазистатической теории соударения круговых цилиндров. Для того чтобы воспользоваться результатами

[22, 23] в общем случае прямого центрального удара плоских ограниченных тел, первоначально касающихся в точке, необходимо лишь вычислить коэффициенты в (6.2). В случае упругого кольца величина A_2^r может быть получена по формулам [24].

Заключение. Явное выражение для коэффициента A_2^2 в исходной задаче можно получить в частном случае кругового диска, воспользовавшись формулами [12] (см. § 80а).

Построенные в п. **5** решения для случая круговых дисков обобщаются на случай упругих колец.

Проблема уточнения построенного асимптотического решения связана с проблемой построения асимптотики задачи одностороннего контакта для пограничного слоя в объединении областей $\eta_2 \leqslant \sqrt{\varepsilon}\varphi_1(\eta_1)$ и $\eta_2 \geqslant \sqrt{\varepsilon}\varphi_2(\eta_1)$ (см. (4.3)). Задача определения поправки к вектору $\boldsymbol{W}^r(\boldsymbol{\eta})$ должна решаться одновременно с корректировкой участка контакта $(-h_*, h_*)$. При этом вариации зон контакта, вообще говоря, будут различными (так же, как при учете касательных перемещений [25, 26]). Следует отметить, что формальная асимптотика зоны контакта в односторонних задачах строилась в [27, 28].

Основной результат данной работы заключается в следующем. Задача расчета упругой деформации двумерных контактирующих тел Ω^1 и Ω^2, которую нельзя определить через контактные напряжения в теории Герца (см. [15, § 5.6]), в первом приближении сведена к вычислению безразмерных интегральных характеристик A_2^1 и A_2^2, которые можно назвать коэффициентами локальной податливости упругих тел Ω^1 и Ω^2 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я.** Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986.
2. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
3. **Кравчук А. С.** Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: Мос. гос. акад. приборостроения и информатики, 1997.
4. **Хлуднев А. М.** К проблеме контакта линейно-упругого тела с упругими и жесткими телами (вариационный подход) // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47, № 6. С. 999–1005.
5. **Ван-Дайк М. Д.** Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
6. **Ильин А. М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
7. **Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A.** Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Berlin: Akad.-Verlag, 1991. Bd 1.
8. **Schwartz J., Harper Y.** On the relative approach of two-dimensional elastic bodies in contact // Intern. J. Solids Structures. 1971. V. 7, N 12. P. 1613–1626.
9. **Петров Ю. В.** О контактном взаимодействии упругого диска с жестким угловым вырезом // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1989. Вып. 2. С. 62–64.
10. **Иванов К. П., Морозов Н. Ф., Нарбут М. А., Ривкинд В. Я.** Задачи гидродинамики и прочности каналов малого проходного сечения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987.
11. **Аргатов И. И.** Вдавливание штампа в форме эллиптического параболоида в плоскую границу упругого тела // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 4. С. 671–679.
12. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
13. **Штаерман И. Я.** Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
14. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
15. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.

16. **Sternberg E., Turteltaub M. J.** Compression of an elastic roller between two rigid plates // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа: Сб. к 80-летию акад. Н. И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1972. С. 495–515.
17. **Динник А. Н.** Избранные труды. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. Т. 1.
18. **Феппль А., Феппль Л.** Сила и деформация. М.: Гостехтеоретиздат, 1933. Т. 1.
19. **Рабинович И. Ш.** К решению задачи о контакте цилиндров с параллельными осями // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1958. № 10. С. 139, 140.
20. **Loo T. T., Troy N. Y.** Effect of curvature on the Hertz theory for two circular cylinders in contact // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1958. V. 25, N 1. P. 122–124.
21. **Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
22. **Зегжда С. А., Филиппов Н. Г.** О соударении цилиндров вдоль их образующих // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1986. Вып. 3. С. 58–62.
23. **Зегжда С. А.** Соударение упругих тел. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1994.
24. **Yu Y.-Y.** Gravitational stresses in a circular ring resting on concentrated support // J. Appl. Mech. 1955. V. 22, N 1. P. 103–106.
25. **Галанов Б. А.** Постановка и решение некоторых уточненных задач упругого контакта двух тел // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1983. № 6. С. 56–63.
26. **Солдатенков И. А.** Контактная задача для упругой полуплоскости при учете касательного перемещения на контакте // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 4. С. 51–61.
27. **Назаров С. А.** О возмущениях решений задачи Синьорини для скалярного уравнения второго порядка // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 1. С. 115–126.
28. **Аргатов И. И., Назаров С. А.** Асимптотическое решение задачи Синьорини с препятствием на тонком продолговатом множестве // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 10. С. 3–32.

Поступила в редакцию 3/X 2000 г.,
в окончательном варианте — 10/IV 2001 г.