

УДК 532.545

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРА ЧАСТИЦ ДОННЫХ НАНОСОВ НА ДЛИНУ ВОЛНЫ ДОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В НАПОРНЫХ КАНАЛАХ

Ю. Г. Крат, И. И. Потапов

Вычислительный центр ДВО РАН, 680000 Хабаровск, Россия
E-mails: kratyuliya@mail.ru, potapovii@rambler.ru

Сформулирована задача устойчивости поверхности песчаного дна в напорном канале прямоугольной формы относительно одномерных по пространству возмущений. Задача устойчивости русла решена с использованием аналитической формулы расхода наносов, в которой учтено влияние придонного давления на движение наносов. Получена аналитическая зависимость длин донных волн от гидродинамических параметров потока и диаметра донных частиц. Проведено сравнение полученной зависимости с экспериментальными данными.

Ключевые слова: напорный канал, донные волны, математическая модель.

DOI: 10.15372/PMTF20160307

Введение. Анализ устойчивости донной поверхности, выполненный в работах [1–3] с использованием оригинальной формулы расхода наносов, учитывающей влияние свободной поверхности потока на перенос наносов, показал, что в ряде случаев возмущение свободной поверхности приводит к развитию донных волн. Однако в экспериментах [4] установлено, что возникновение донных волн может происходить также в напорных каналах, когда возмущения свободной поверхности отсутствуют и модель устойчивости поверхности дна, предложенная в работах [1–3], неприменима.

В данной работе на основе аналитической формулы расхода наносов [5] сформулирована одномерная задача устойчивости поверхности песчаного дна напорного канала прямоугольной формы. Из решения задачи получена аналитическая зависимость, определяющая длину волны для наиболее быстро растущих донных возмущений. Проведено сравнение полученного решения с экспериментальными данными [4].

1. Уравнения гидродинамики. Рассматривается задача устойчивости поверхности дна канала при воздействии гидродинамического потока. Для определения осредненного по глубине поля скорости жидкости принимаются одномерные уравнения гидравлики [6] (в длинноволновом приближении с учетом квадратичного закона сопротивления и диссипативного слагаемого)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho_w} + g\zeta \right) + \frac{\lambda_g V^3}{Q} - \nu_t \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0; \quad (1.1)$$

$$Q = (h - \zeta)V, \quad (1.2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-05-07594 А) и в рамках комплексной программы фундаментальных исследований ДВО РАН (грант № 15-I-4-07, раздел 5.1.8).

© Крат Ю. Г., Потапов И. И., 2016

где t — время; V — скорость потока, осредненная по глубине; ρ_w — плотность жидкости; P — давление; g — ускорение свободного падения; ζ — функция, задающая форму поверхности дна; λ_g — коэффициент гидравлического сопротивления; Q — расход жидкости; ν_t — турбулентная вязкость потока; h — средняя глубина напорного канала.

Начало координат канала выберем таким образом, чтобы в начальный момент времени $t = 0$ средняя по координате x функция $\zeta(x)$ была равна нулю: $\langle \zeta(x) \rangle = 0$. Последнее диссипативное слагаемое в уравнении (1.1), несущественное в длинноволновом приближении, обеспечивает затухание коротких донных волн. Коэффициент гидравлического сопротивления λ_g определим как функцию диаметра донных частиц d и средней глубины канала h [7]:

$$\lambda_g = n(d/h)^{1/3}, \quad n = 0,08991.$$

Для решения задачи устойчивости требуется линеаризация уравнений (1.1), (1.2). В случае ровного дна $\zeta = 0$ решением задачи (1.1), (1.2) является однородный поток с постоянной скоростью U . Скорость U определяется из условия баланса сил сопротивления и заданного градиента давления

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P^*}{\partial x} + \frac{\lambda_g U^2}{h} = 0.$$

Определим возмущенные решения для функций V и P в виде

$$V = U + u, \quad P = \frac{\partial P^*}{\partial x} x + P',$$

где u , P' — малые возмущения.

Из уравнения (1.2) выразим линеаризованную зависимость между возмущением дна ζ и возмущением скорости потока $u = U\zeta/h$. С учетом введенных определений выполним линеаризацию уравнения (1.1) и получим уравнение для градиента динамического напора p

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \text{Fr} \left(\frac{1}{U} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + 3\lambda_g \frac{\zeta}{h} - \frac{\nu_t}{U} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right), \quad (1.3)$$

где $p = P'/(\rho_w g)$ — гидравлический напор; $\text{Fr} = U^2/(gh)$ — безразмерное число Фруда.

2. Уравнения русловых деформаций. Форму поверхности дна можно определить из уравнения сохранения массы песка [8]

$$\rho_s(1 - \varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

где ρ_s — плотность частиц песка; ε — коэффициент пористости песчаного дна; G — удельный массовый расход донных наносов.

Согласно [5] удельный расход движущихся в придонном слое наносов $G = (1 - \varepsilon)\rho_s G_\varepsilon$, линеаризованный по малым параметрам ζ , $\partial \zeta / \partial x$, $\partial p / \partial x$, определяется уравнением

$$G_\varepsilon = S \frac{U^3}{g} \left(a \left(1 + 3 \frac{\zeta}{h} \right) - b \frac{\partial \zeta}{\partial x} - c \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (2.2)$$

где

$$a = 1 - \chi, \quad b = e + c, \quad c = \frac{1 - \chi}{s \text{tg} \varphi}, \quad e = \frac{1 - \chi/2}{\text{tg} \varphi}, \quad S = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{\lambda_g \lambda_g}}{\varkappa(1 - \varepsilon) \text{tg} \varphi \rho_b},$$

$$\rho_b = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w}, \quad s = f \rho_b, \quad \chi = \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \quad T = \rho_w \lambda_g U^2, \quad T_0 = \frac{9}{8} \frac{\varkappa^2 \text{tg} \varphi (\rho_s - \rho_w)}{c_x} dg,$$

φ — угол внутреннего трения донных частиц; \varkappa — постоянная Кармана; f — концентрация частиц в придонном слое; c_x — коэффициент лобового сопротивления частиц; T_0 — напряжение начала движения донных частиц; T — придонное касательное напряжение. Уравнение (2.2) замыкает уравнение (2.1).

Подставляя уравнения (1.3), (2.2) в (2.1), получаем

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + A \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial x} + B \frac{\partial \zeta}{\partial x} - C \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - D \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0, \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} A &= cS \text{Fr}^2 h, & B &= 3S \text{Fr} (a + c \text{Fr} \lambda_g) U, \\ C &= S \text{Fr} (b - c(1 + \text{Fr})) U h, & D &= cS \text{Fr}^2 \nu_t h. \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. Линейная задача развития донных возмущений. Возмущения донной поверхности ζ зададим в виде

$$\zeta = \zeta_0 h \exp(\sigma t + ikx), \quad (3.1)$$

где ζ_0 — безразмерный коэффициент; k — волновое число; σ — частота колебаний волны.

Подставляя (3.1) в уравнение (2.3), получаем

$$\sigma + Ai\sigma k + Bik - Ck^2 - Dik^3 = 0. \quad (3.2)$$

Из решения (3.2) определим частоту колебаний донной волны

$$\sigma = -k \frac{Bi - Ck - Dk^2 i}{1 + Aki}.$$

Выделим из выражения для частоты σ ее действительную $\sigma_R = \text{Re}(\sigma)$ и мнимую $\sigma_m = \text{Im}(\sigma)$ части:

$$\begin{aligned} \sigma_R &= k^2 \frac{C + A(Dk^2 - B)}{1 + A^2 k^2}; \\ \sigma_m &= k \frac{-ACk^2 + Dk^2 - B}{1 + A^2 k^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для определения максимально быстро растущей волны [8] найдем производную от σ_R по k :

$$\frac{d\sigma_R}{dk} = -2k \frac{C + AB + 2ADk^2 + A^3 Dk^4}{(1 + A^2 k^2)^2} = 0. \quad (3.4)$$

Действительный корень, получаемый из решения уравнения (3.4), имеет вид

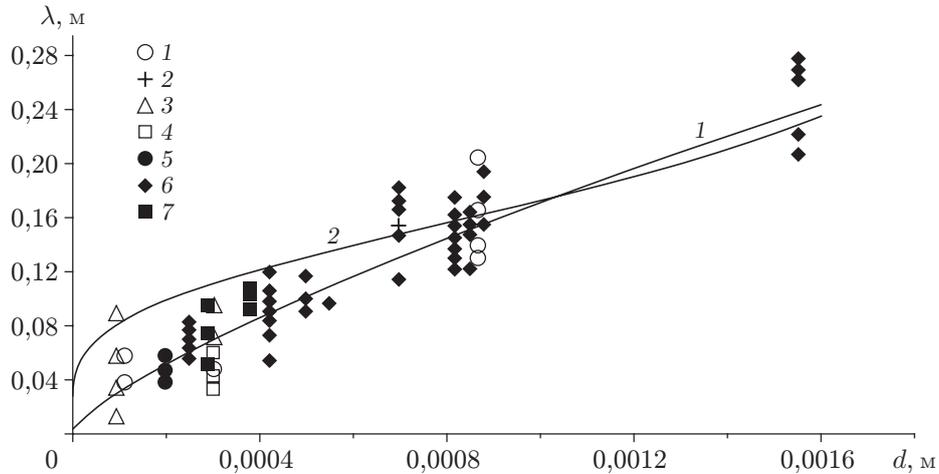
$$k_{\max} = \frac{1}{A} \sqrt{\sqrt{1 + A(AB - C)/D} - 1}. \quad (3.5)$$

Используя выражение $\lambda = 2\pi/k$ и формулы (2.4), (3.5), для длины максимально быстро растущей донной волны получаем

$$\lambda = \frac{2\pi cS \text{Fr}^2 h}{\sqrt{\sqrt{1 + S \text{Re} \text{Fr} (c(1 + \text{Fr}) - b - 3S \text{Fr}^2 c(a + c\lambda_g \text{Fr}))} - 1}}, \quad (3.6)$$

где $\text{Re} = Uh/\nu_t$ — число Рейнольдса.

Проведено сравнение результатов расчетов по зависимости (3.6) с экспериментальными данными [9, 10] и результатами расчетов по феноменологической зависимости Коулмана [4] для течения в напорном канале глубиной $h = 0,1$ м при средней скорости потока $U = 0,5$ м/с. Поскольку в работе Коулмана [4] не указаны значения физико-механических параметров донных частиц, при проведении сравнения принимались значения, характер-



Зависимость длины донной волны от диаметра донных частиц в напорном канале: точки — экспериментальные данные, приведенные в работе [4] (1 — данные [4], 2 — данные [9], 3, 4 — данные [10], 5 — данные [12], 6 — данные [13], 7 — данные [14]), линии — результаты расчетов (1 — зависимость Коулмана $\lambda = 31,12d^{0,75}$, 2 — зависимость (3.6))

ные для песчаных материалов ($\varphi = 28^\circ$, $\rho_b = 1,65$, $\varepsilon = 0,35$) и водогрунтовой смеси ($f = 0,1$, $c_x = 0,6$, $\nu_t = 0,02$). Постоянная Кармана \varkappa , согласно опытам Никурадзе для чистой воды, равна 0,4, для смеси в зависимости от концентрации f имеет меньшие значения [11]: $0,20 \leq \varkappa \leq 0,35$. В данной работе принято значение $\varkappa = 0,2$.

На рисунке представлена зависимость длины донной волны от диаметра донных частиц.

Следует отметить, что полученное аналитическое решение (3.6) качественно хорошо согласуется с экспериментальными данными только в области, соответствующей длинноволновому приближению ($h \leq \lambda$). Это обусловлено тем, что используемая в данной работе гидродинамическая модель является длинноволновой моделью мелкой воды. Вероятно, поэтому результаты расчетов по зависимости (3.6) существенно отличаются от экспериментальных данных [9, 10, 12–14], соответствующих коротковолновой области, однако это различие не превышает стандартного разброса экспериментальных данных. Следовательно, полученное в рамках линейного приближения задачи аналитическое решение (3.6) согласуется с экспериментальными данными не только качественно, но и количественно.

Для определения скорости движения донных волн используем решение (3.3):

$$W = -\frac{\sigma_m}{k} = \frac{A(C - \nu_t)k^2 + B}{1 + A^2k^2}. \quad (3.7)$$

С учетом малости числа Фруда для равнинных рек разложим выражение (3.7) в ряд по этому числу. Отбрасывая в полученном разложении члены выше первого порядка, получаем зависимость, определяющую скорость движения донных возмущений:

$$W = 3aSU \text{ Fr},$$

или

$$W = \frac{4(1 - \chi)\lambda_g^{1,5}}{\varkappa\rho_b(1 - \varepsilon) \text{ tg } \varphi} U \text{ Fr}. \quad (3.8)$$

Заметим, что асимптотическая зависимость (3.8) обобщает формулу Пушкарева [15]

$$W = 0,0188U \text{ Fr}$$

и согласуется с аналогичными решениями, полученными в работах [1–3], для открытых потоков.

Заключение. В работе сформулирована одномерная задача устойчивости поверхности песчаного дна напорного канала прямоугольной формы. Особенности задачи являются нестационарность ее гидродинамической модели и наличие аналитической формулы для расчета расхода наносов, которая учитывает влияние уклонов донной поверхности, нормального и касательного напряжений на движение наносов.

В рамках линеаризованной постановки сформулированной задачи без использования дополнительных гипотез получена аналитическая зависимость длины донной волны от чисел Фруда и Рейнольдса при различных значениях физико-механических и гранулометрических характеристик донных частиц.

Проведено сравнение результатов расчетов по полученной зависимости длин донных волн от диаметра донных частиц с известными экспериментальными данными, показавшее, что они хорошо согласуются.

Полученная для напорного канала асимптотическая формула скорости движения донных волн при малых числах Фруда обобщает эмпирическую формулу Пушкарева и хорошо согласуется с известными решениями для открытых каналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петров А. Г., Потапов И. И.** О развитии возмущений песчаного дна канала // Докл. АН. 2010. Т. 431, № 2. С. 191–195.
2. **Петров А. Г., Потапов И. И.** Об устойчивости песчаного дна канала постоянной ширины // Докл. АН. 2010. Т. 433, № 5. С. 631–634.
3. **Петров А. Г., Потапов И. И.** О влиянии турбулентной вязкости на процессы образования и движения донных волн // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 1. С. 57–68.
4. **Coleman S. E., Fedele J. J., Garcia M. H.** Closed-conduit bed-forms initiation and development // J. Hydraul. Engng. 2003. V. 129, N 12. P. 956–965.
5. **Петров А. Г., Потапов И. И.** Перенос наносов под действием нормальных и касательных придонных напряжений с учетом уклона дна // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 5. С. 100–105.
6. **Картвелишвили Н. А.** Потоки в недеформируемых руслах. Л.: Гидрометеоиздат, 1973.
7. **Гришанин К. В.** Гидравлическое сопротивление естественных русел. СПб.: Гидрометеоиздат, 1992.
8. **Гришанин К. В.** Устойчивость русел рек и каналов. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
9. **Nakagawa H., Tsujimoto T.** Spectral analysis of sand bed instability // J. Hydraul. Engng. 1984. V. 110, N 4. P. 467–483.
10. **Kuru W. C., Leighton D. T., McCready M. J.** Formation of waves on a horizontal erodible bed of particles // Intern. J. Multiphase Flow. 1995. V. 21, N 6. P. 1123–1140.
11. **Петров П. Г.** Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // ПМТФ. 1991. № 5. С. 72–75.
12. **Coleman S. E., Mellville B. W.** Initiation of bed forms on a flat sand bed // J. Hydraul. Engng. 1996. V. 122, N 6. P. 301–310.
13. **Coleman S. E., Cornelius G. A.** Alluvial sand wavelets // Proc. of the 7th Intern. symp. on river sedimentation, Hong Kong (China), Dec. 1998. S. 1., 1998. P. 65–71.
14. **Coleman S. E., Eling B.** Sand wavelets in laminar open-channel flows // J. Hydraul. Res. 2000. V. 38, N 5. P. 331–338.
15. **Пушкарев В. Ф.** Движение влекомых наносов // Тр. Гос. гидрол. ин-та. 1948. Вып. 8. С. 93–110.

*Поступила в редакцию 15/IV 2014 г.,
в окончательном варианте — 6/V 2015 г.*