ее амплитуды растет ($\eta \sim t^{-3/2}$ при $t \to \infty$, для ровного дна $\eta \sim t^{-1/3}$). Эти эффекты усиливаются при увеличении наклона дна.

4. Выше был построен главный член асимптотики решения задачи (1.1) и указан способ вычисления последующих приближений. Трудность построения высших приближений связана с тем, что в представлении (3.2) функции $\rho(\xi, \tau)$, $A_0(\xi, y, \tau, \xi_0)$, $B_0(\xi, y, \tau, \xi_0)$ имеют конечную гладкость в окрестности кривой $\tau = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} h^{-1/2}(\beta)\, d\beta$, что соответствует области длинных волн. Действительно, у этих функций различный вид в зависимости от того, с какой стороны от указанной кривой мы находимся. Поэтому для построения высших приближений необходимо дополнительно уточнить поведение решения в области длинных волн. Главный член асимптотики решения состоит из трех частей, каждая из которых справедлива в своей области определения. Однако эти области имеют зоны перекрытия и покрывают область $x \in R^1$, $-h(\varepsilon x) < y < 0$, $t > 0$ без зазоров. Существование зон перекрытия позволяет известными методами (метод составных асимптотических разложений, метод срезающих функций и т. д.) [9] построить равномерно пригодное приближенное решение, которое, будучи подставленным в соотношения (1.1), даст невязку; ее порядок по ε известен. В случае локализованной неровности дна ($h(\xi) \equiv 1$ при $\xi \notin (\xi_1, \xi_2)$, $\varepsilon x_0 < \xi_1$) порядок невязки равен $\varepsilon^{3/2}$ при $\varepsilon \to 0$.

Автор выражает благодарность И. В. Стуровой за постоянное внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Доброхотов С. Ю., Жевандров П. Н.** Нестационарные характеристики и операторный метод Маслова в линейных задачах о неустановившихся волнах на воде // Функцион. анализ и его прил.— 1985.— Т. 13, вып. 4.
2. **Keller J. B.** Surface waves on water of non-uniform depth // J. Fluid Mech.— 1958.— V. 4, N 6.
3. **Доброхотов С. Ю.** Методы Маслова в линеаризованной теории гравитационных волн на поверхности жидкости // ДАН СССР.— 1983.— Т. 269, № 1.
4. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости.— М.: Наука, 1977.
5. **Федорюк М. В.** Метод перевала.— М.: Наука, 1977.
6. **Камке Э.** Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.— М.: Наука, 1966.
7. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
8. **Ludwig D.** Uniform asymptotic expansions at a caustic // Comm. Pure Appl. Math.— 1966.— V. 20, № 1.
9. **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.

г. Новосибирск *Поступила 22/VI 1988 г., в окончательном варианте — 20/I 1989 г.*

УДК 532,68

Л. К. Антановский

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Квазистационарное приближение применимо для описания движения жидкости с малыми ускорениями и заключается в опускании сил инерции в уравнениях Навье — Стокса. Эта ситуация заведомо реализуется в тонких слоях жидкости, капиллярах и каплях малого размера, где силы поверхностного натяжения доминируют над всеми массовыми силами, включающими и инерционные члены.

В работе рассматривается задача об устойчивости равновесия слоя жидкости на поверхности круглого цилиндра с изотермической свободной границей. На основе представления решений системы Стокса на плоскости через бианалитическую функцию напряжений — тока эллиптическая часть задачи сведена к системе одномерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. После ее решения нестационарное кинематическое условие приводит к параболическому псевдодифференциальному уравнению для параметризации возмущенной свободной границы. Вычислен спектр линеаризованного оператора «нормальная скорость» и получено условие устойчивости цилиндрической формы свободной границы по отношению к ее малым плоским начальным возмущениям.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость осуществляет квазистационарное плоскопараллельное движение под действием термокапиллярных сил. Обозначим через $\Omega = \Omega(t)$ двусвязную область, занятую жидкостью в момент времени t, с неподвижной стенкой цилиндра Σ и свободной границей $\Gamma = \Gamma(t)$. Математическая формулировка задачи будет заключаться в нахождении области течения Ω, скорости $v = v_x + iv_y$ и давления p в зависимости от точки $z = x + iy \in \Omega$ и времени t, которые удовлетворяют уравнениям

(1.1) $$\nabla p = \mu\Delta v, \ \operatorname{div} v = 0 \text{ в } \Omega;$$

(1.2) $$v = 0 \text{ на } \Sigma;$$

(1.3) $$P(n) = (d/ds)(\sigma dz/ds) \text{ на } \Gamma;$$

(1.4) $$V_n = v\cdot n \text{ на } \Gamma;$$

(1.5) $$\Gamma = \Gamma_0 \text{ при } t = 0.$$

Здесь $P(n) = pn - \mu(n\cdot\nabla v + \nabla v\cdot n)$ — вектор давления (поток импульса) вдоль внутренней нормали $n = idz/ds$; s — длина дуги границы Ω; μ — динамический коэффициент вязкости; σ — переменный коэффициент поверхностного натяжения; V_n — скорость перемещения Γ вдоль нормали n.

В силу известной формулы Френе $d^2z/ds^2 = kn$ (k — кривизна Γ) динамическое условие (1.3) принимает свой обычный вид (в равновесии имеем формулу Лапласа $p = \sigma k$). В общем случае на Γ возникает касательная составляющая вектора давления, равная $d\sigma/ds$, что приводит к конвекции жидкости. В задаче о термокапиллярной конвекции предполагается известной зависимость σ от температуры θ: $\sigma = \sigma(\theta)$. Для простоты θ будет удовлетворять квазистационарной задаче

(1.6) $$\Delta\theta = 0 \text{ в } \Omega,\ \theta = \theta_0 \text{ на } \Sigma,\ d\theta/dn = \beta(\theta - \theta_\infty) \text{ на } \Gamma$$

(θ_0 — температура стенки Σ, θ_∞ — температура контактирующего газа, β — коэффициент межфазного теплообмена).

Ниже рассматривается конкретная задача, когда стенка $\Sigma = \{|z| = R_0\}$ имеет постоянную температуру θ_0, не равную θ_∞. Тогда существует состояние равновесия слоя жидкости с изотермической свободной границей $\Gamma = \{|z| = R\}$ (для определенности $R > R_0$). В данном случае решением (1.6) является

$$\theta(z) = \theta_0 + (\theta_\infty - \theta_0)B\ln(|z|/R_0)/(1 + aB),$$

где $a = \ln(R/R_0)$, $B = \beta R$ — число Био. По температуре свободной границы $\theta_* = (\theta_0 + aB\theta_\infty)/(1 + aB)$ определим термокапиллярное число

$$C = \frac{B(\theta_0 - \theta_\infty)\sigma'(\theta_*)}{(1 + aB)\sigma(\theta_*)} \equiv R\frac{d\theta}{dn}\frac{\sigma'(\theta)}{\sigma(\theta)} \text{ на } \Gamma,$$

знак которого и будет определять устойчивость. А именно, будет показано, что описанное состояние равновесия асимптотически устойчиво по отношению к малому начальному возмущению Γ_0, если $C > 0$, и неустойчиво при выполнении противоположного неравенства $C < 0$. Для чистых свободных границ $\sigma'(\theta) < 0$, поэтому неустойчивость наступает при $\theta_0 > \theta_\infty$.

Предлагается следующая схема решения задачи (1.1)—(1.6). Фиксируется кривая Γ в момент времени t и решается вспомогательная задача (1.1)—(1.3), (1.6) в известной области Ω. Так как эта задача однозначно разрешима, то определен оператор «нормальная скорость» $N(\Gamma)$, сопоставляющий кривой Γ нормальную компоненту скорости $v\cdot n$ на Γ [1]. Теперь уравнения (1.4)—(1.5) формально записываются в виде задачи Коши для кривой Г ($\partial \Gamma/\partial t = V_n$):

$$\partial\Gamma/\partial t = N(\Gamma), \quad \Gamma(0) = \Gamma_0. \tag{1.7}$$

Очевидно, что вся информация об устойчивости по линейному приближению состояния равновесия жидкости заключена в структуре спектра линеаризованного на покое оператора $N(\Gamma)$.

2. Комплексная функция напряжений — тока. Для решения вспомогательной задачи удобно перейти к комплексным переменным. Введем функцию тока ψ равенствами $v_x = -\partial\psi/\partial y$, $v_y = \partial\psi/\partial x$ или $v = i\nabla\psi$. Из (1.1) следует уравнение $\Delta^2\psi = 0$, поэтому $\psi = \operatorname{Im} w$, где $w = \varphi + i\psi$ — бианалитическая функция: $\partial^2 w/\partial\bar{z}^2 = 0$ ($2\partial/\partial z = \partial/\partial x - i\partial/\partial y$, $2\partial/\partial\bar{z} = \partial/\partial x + i\partial/\partial y$ — операторы Коши — Римана). Функцию $\varphi = \operatorname{Re} w$ по аналогии с плоской теорией упругости назовем функцией напряжений, а w — функцией напряжений — тока. На безвихревом движении φ превращается в потенциал скорости: $v = -\nabla\varphi$. Легко установить, что по функции тока функция напряжений определена с точностью до произвольного слагаемого

$$c_0(x^2 + y^2) + c_1 x + c_2 y + c_3. \tag{2.1}$$

Так как функция Δw аналитична, то из системы Стокса (1.1) в силу условий Коши — Римана имеем

$$\frac{dp}{ds} = -\mu\frac{d}{dn}(\Delta\psi) = -\mu\frac{d}{ds}(\Delta\varphi).$$

Ввиду произвольности числа c_0 в выражении (2.1) можно считать $p = -\mu\Delta\varphi$, поэтому

$$P(n) = -\mu(\Delta\varphi)n - 2\mu(\partial v/\partial\bar{z})\bar{n} = -4\mu i\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\frac{dz}{ds} - i\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{z}^2}\frac{d\bar{z}}{ds}\right\} =$$
$$= -4\mu i\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\frac{dz}{ds} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}^2}\frac{d\bar{z}}{ds}\right\} = -4\mu i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right).$$

Следовательно, справедливы представления Колосова — Мусхелишвили

$$P\left(i\frac{dz}{ds}\right) = -2\mu i\frac{d}{ds}(\bar{\nabla}\varphi), \quad v = i\nabla\psi, \quad p = -\mu\Delta\varphi. \tag{2.2}$$

В терминах $w = \varphi + i\psi$ с использованием (2.2) граничные условия (1.2)—(1.3) записываются в симметричной форме

$$\begin{aligned} &\varphi = 0, \ 2\mu d\varphi/dn = \sigma(\theta) \quad \text{на } \Gamma,\\ &\psi = 0, \ d\psi/dn = 0 \quad \text{на } \Sigma. \end{aligned} \tag{2.3}$$

При интегрировании динамического условия (1.3) была использована произвольность чисел c_1, c_2, c_3 в (2.1). После решения задачи (1.6), (2.3) с фиксированной кривой Г оператор «нормальная скорость» вычисляется как $N(\Gamma) = d\psi/ds$.

3. Смешанная задача для бианалитической функции. Для бианалитической функции $w = \varphi + i\psi$ в двусвязной области Ω, ограниченной замкнутыми кривыми Г и Σ, рассмотрим смешанную задачу общего вида

$$\begin{aligned} &\varphi = f_1, \ d\varphi/dn = dg_1/ds \quad \text{на } \Gamma,\\ &\psi = f_2, \ d\psi/dn = dg_2/ds \quad \text{на } \Sigma \end{aligned} \tag{3.1}$$

(f_1, f_2, dg_1/ds, dg_2/ds — заданные функции).

Справедливо представление Гурса $w(z) = w_0(z) + \bar{z}w_1(z)$, где $w_0(z)$, $w_1(z)$ — аналитические функции, в терминах которых задача (3.1) записывается следующим образом:

$$(3.2)\qquad \mathrm{Re}\,(w_0+\bar z w_1)=f_1,\quad 2\mathrm{Im}\left(w_1\frac{d\bar z}{ds}\right)-\frac{d\Psi}{ds}=\frac{dg_1}{ds}\quad \text{на } \Gamma,$$

$$\mathrm{Im}\,(w_0+\bar z w_1)=f_2,\quad 2\mathrm{Re}\left(w_1\frac{d\bar z}{ds}\right)-\frac{d\varphi}{ds}=-\frac{dg_2}{ds}\quad \text{на } \Sigma.$$

В самом деле, в силу равенства $dz/dn = n = idz/ds$ получаем $dw_0/dn = idw_0/ds$, $dw_1/dn = idw_1/ds$, поэтому $dw/dn = idw/ds + 2\bar n\partial w/\partial\bar z$.

Выпишем вначале решение смешанной задачи для аналитической функции $\Phi(\tau)$ в канонической области

$$G_\alpha = \{0 < \mathrm{Im}\tau < \alpha\}/2\pi Z$$

(по определению аналитическими в «кольце» G_α функциями являются 2π-периодические аналитические в полосе $\{0 < \mathrm{Im}\tau < \alpha\}$ функции). А именно, задача $\mathrm{Re}\,\Phi(\lambda) = F_1(\lambda)$, $\mathrm{Im}\,\Phi(\lambda+i\alpha) = F_2(\lambda)$ имеет единственное решение ($\tau_0 \in G_\alpha$)

$$\Phi(\tau_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G_\alpha} M(\tau-\tau_0)F(\tau)\,d\tau\equiv\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} M(\lambda-\tau_0)F_1(\lambda)\,d\lambda-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} M(\lambda+i\alpha-\tau_0)F_2(\lambda)\,d\lambda,$$

где $F(\lambda) = F_1(\lambda)$, $F(\lambda+i\alpha) = iF_2(\lambda\ )$ и $M(\tau)=\mathrm{ctg}\,\frac{\tau}{2}-2\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-k\alpha}\frac{\sin k\tau}{\mathrm{ch}\,k\alpha}$.

Тем самым определен оператор

$\mathbf{S}$: $\{\mathrm{Re}\,\Phi(\lambda),\ \mathrm{Im}\,\Phi(\lambda+i\alpha)\} \mapsto \{\mathrm{Im}\,\Phi(\lambda),\ -\mathrm{Re}\,\Phi(\lambda+i\alpha)\}$

сингулярным интегралом

$$(3.3)\quad \mathbf{S}(\mathbf{f}\,|\,\lambda_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S(\lambda_0-\lambda)\cdot\mathbf{f}(\lambda)\,d\lambda,\quad \mathbf{f}=\{f_1,f_2\},$$

$$S(\lambda)=\begin{pmatrix} M(\lambda) & M_*(\lambda)\\ -M_*(\lambda) & -M(\lambda)\end{pmatrix},\quad M_*(\lambda)=iM(\lambda+i\alpha)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos k\lambda}{\mathrm{ch}\,k\alpha}.$$

Пусть аналитическая 2π-периодическая функция $z = z(\tau)$ осуществляет конформное отображение G_α на Ω с нормировкой $z(i\alpha) = R_0e^{i\beta}$. Известно, что конформный инвариант α однозначно определяется по области Ω [2]. После замены переменных $z = z(\tau)$ задача (3.2) принимает вид

$$(3.4)\qquad \varphi(\lambda)\equiv\mathrm{Re}\{w_0(\lambda)+\overline{z(\lambda)}w_1(\lambda)\}=f_1(\lambda),$$

$$\Psi(\lambda+i\alpha)\equiv\mathrm{Im}\,\{w_0(\lambda+i\alpha)+\overline{z(\lambda+i\alpha)}w_1(\lambda+i\alpha)\}=f_2(\lambda);$$

$$(3.5)\qquad 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{w_1(\lambda)}{iz'(\lambda)}\right\}=\frac{g_1'(\lambda)+\Psi'(\lambda)}{|z'(\lambda)|^2},$$

$$2\,\mathrm{Im}\left\{\frac{w_1(\lambda+i\alpha)}{iz'(\lambda+i\alpha)}\right\}=\frac{g_2'(\lambda)-\varphi'(\lambda+i\alpha)}{|z'(\lambda+i\alpha)|^2}$$

(обозначения функций остались прежние, штрих соответствует дифференцированию по λ).

Введем вектор $\boldsymbol{\gamma}(\lambda) = \{\Psi(\lambda), -\varphi(\lambda+i\alpha)\}$ и получим для него интегральное уравнение. Для этого из (3.5) по заданным правым частям представим $w_1(\tau)$ через $\boldsymbol{\gamma}(\lambda)$ и подставим в уравнения (3.4). Из (3.4) найдем $w_0(\tau)$, после чего вычислим вектор $\boldsymbol{\gamma}$ в терминах w_0, w_1 и получим

$$(3.6)\qquad \boldsymbol{\gamma}=\mathbf{S}(\mathbf{f})+\mathbf{T}(\mathbf{g})+\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma}).$$

Здесь $\mathbf{T}(\gamma\,|\,\lambda_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} T(\lambda_0, \lambda)\cdot d\gamma(\lambda);$

$$T(\lambda_0, \lambda) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} K(\lambda_0, \lambda) & \operatorname{Im} K(\lambda_0, \lambda + i\alpha) \\ \operatorname{Im} K(\lambda_0 + i\alpha, \lambda) & -\operatorname{Re} K(\lambda_0 + i\alpha, \lambda + i\alpha) \end{pmatrix};$$

$$K(\tau_0, \tau) = \frac{1}{4\pi\,|\,z'(\tau)\,|^2}\int\limits_{\partial G_\alpha} \{[\overline{z(\tau_0)} - \overline{z(\xi)}]\,M(\tau_0 - \xi) -$$

$$- [\overline{z(\tau_0)} - \overline{z(\tau)}]\,M(\tau_0 - \tau)\}\,M(\xi - \tau)\,dz(\xi).$$

При вычислении оператора $\mathbf{T}$ необходимо воспользоваться тождеством

$$w_1(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G_\alpha} M(\tau - \tau_0)\,w_1(\tau)\,d\tau, \quad \tau_0 \in \partial G_\alpha.$$

Можно показать, что ядро $dT(\lambda_0, \lambda)/d\lambda_0$ имеет слабую особенность, если Γ и Σ — кривые Ляпунова, т. е. $z'(\tau)$ принадлежит классу Гельдера. Тем самым уравнение (3.6) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, поэтому оно всегда разрешимо ввиду единственности нулевого решения однородной вспомогательной задачи (1.1)—(1.3). На функции $z = e^{i\tau}$, осуществляющей отображение G_α на кольцо $\{e^{-\alpha} < |z| < 1\}$, ядро $T(\lambda_0, \lambda)$ вычисляется в явном виде

$$T(\lambda_0, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\alpha} \\ e^{-\alpha} & 0 \end{pmatrix} \operatorname{sh} \alpha M_*(\lambda_0 - \lambda). \tag{3.7}$$

Очевидно, что ядра K и T не меняются при замене $z(\tau)$ на $az(\tau) + b$.

4. Параметризация свободной границы. Преобразуем задачу (1.7) к интегродифференциальному уравнению относительно некоторой параметризации кривой Γ. В нашей конкретной ситуации удобно представить конформное отображение $z(\tau)$ через вещественную 2π-периодическую функцию $\eta(\lambda) = \ln(|z(\lambda)|/R)$. Для этого надо решить задачу Шварца

$$\operatorname{Re}\ln\left\{\frac{z(\lambda)}{Re^{i\lambda}}\right\} = \eta(\lambda), \quad \operatorname{Re}\ln\left\{\frac{z(\lambda + i\alpha)}{Re^{\,i(\lambda + i\alpha)}}\right\} = \alpha - a, \tag{4.1}$$

условие разрешимости которой приводит к выражению конформного инварианта

$$\alpha = a + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \eta(\lambda)\,d\lambda. \tag{4.2}$$

Из (4.1) функция $z(\lambda)$ по $\eta(\lambda)$ восстанавливается при помощи преобразования Гильберта $\mathbf{H}$ в виде

$$z(\lambda) = R\exp\{i\lambda + \eta(\lambda) + i\mathbf{H}(\eta|\lambda)\}, \tag{4.3}$$

$$\mathbf{H}(\eta\,|\,\lambda_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} H(\lambda_0 - \lambda)\,\eta(\lambda)\,d\lambda, \quad H(\lambda) = \operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\alpha}\frac{\sin k\lambda}{\operatorname{sh} k\alpha}.$$

Чисто мнимая постоянная отброшена ввиду нормировки $z(i\alpha) = R_0e^{i\beta}$ (угол β несуществен).

После несложных вычислений с использованием (4.3) уравнение (1.7) или

$$\operatorname{Im}\{\bar{z}'\partial z/\partial t\} = \Psi'$$

в терминах η принимает вид

$$\{1 + \mathbf{H}(\eta')\}\frac{\partial\eta}{\partial t} - \eta'\frac{\partial\mathbf{H}(\eta)}{\partial t} = -\frac{\Psi'}{R^2e^{2\eta}}. \tag{4.4}$$

Заметим, что ядро Гильберта $H(\lambda)$ зависит от времени t через число α, связанное с η формулой (4.2) (очевидно, что ядро $\partial H/\partial\alpha$ несингулярное). Функция $\Psi(\lambda)$ в каждый момент времени определяется конформным отображением $z(\tau)$ как первая компонента решения $\gamma(\lambda)$ уравнения (3.6).

5. Линеаризация задачи. С использованием конформного отображения $z(\tau)$ и ядра $M(\tau)$ смешанной задачи уравнения (1.6) для температуры можно свести к одномерному интегральному уравнению. Ограничимся здесь лишь записью выражения линейной части решения относительно возмущения $\eta(\lambda)$

$$(5.1)\qquad \sigma(\theta) = \sigma(\theta_*)\{1 - C\mathbf{A}(\eta\,|\,\lambda)\} \quad \text{при } z = z(\lambda).$$

Здесь оператор $\mathbf{A}$ имеет символ

$$\widehat{A}_k = \frac{1 + \operatorname{th} ka/k}{1 + B \operatorname{th} ka/k}, \quad \widehat{A}_0 = \frac{1 + a}{1 + Ba},$$

т. е. он действует на функцию $\eta(\lambda)$ по следующей формуле:

$$\mathbf{A}(\eta\,|\,\lambda) = \sum_k \widehat{A}_k \widehat{\eta}_k e^{ik\lambda}, \quad \eta(\lambda) = \sum_k \widehat{\eta}_k e^{ik\lambda}.$$

Для линеаризации задачи (3.6) удобно вначале к функции напряжений $\varphi(z)$ добавить функцию $\sigma(\theta_*)(|z|^2 - R^2)/(4\mu R)$ вида (2.1), тогда $\varphi = \Psi = 0$ на основном решении $\eta = 0$, и с точностью до квадратичных членов получаем выражения

$$2\mu \mathbf{f}(\lambda) = \sigma(\theta_*)\, R\{\eta(\lambda), 0\},$$
$$2\mu \mathbf{g}'(\lambda) = -\sigma(\theta_*)\, R\{\eta(\lambda) + C\mathbf{A}(\eta\,|\,\lambda), 0\}.$$

Теперь с использованием (3.3), (3.7), (4.2) и (5.1) линейная по $\eta(\lambda)$ задача (3.6) решается, и после подстановки первой компоненты $\boldsymbol{\gamma}(\lambda)$ в линеаризованное уравнение (4.4) возникает задача

$$(5.2)\qquad \partial\eta/\partial t = -[\sigma(\theta_*)/(2\mu R)]\, \mathbf{L}(\eta),$$

где $\mathbf{L}(\eta)$— псевдодифференциальный оператор с вещественным символом

$$(5.3)\qquad \widehat{L}_k = k \operatorname{th} ka \frac{1 + (C\widehat{A}_k \operatorname{th} a - 1)\, k \operatorname{sh} 2a/\operatorname{sh} 2ka}{1 + (k \operatorname{sh} a/\operatorname{ch} ka)^2}.$$

Для асимптотической устойчивости нулевого решения по отношению к возмущению η при $t = 0$ необходимо выполнение неравенств $\widehat{L}_k > 0$ при $k \geqslant 1$, что эквивалентно условию $C > 0$. С другой стороны, при $C < 0$ заведомо $\widehat{L}_1 < 0$. Таким образом, знак термокапиллярного числа полностью определяет устойчивость состояния.

Из (5.3) видно, что $\widehat{L}_k \sim |k|$ при $k \to \infty$, т. е. псевдодифференциальный оператор $\mathbf{L}$ имеет первый порядок. Рассмотрим асимптотику символа (5.3) при $a \to 0$, ограниченном k и $C = C_0 a$ ($C_0 = \text{const}$), что соответствует длинноволновому приближению тонкого слоя. В данном случае разложение

$$\widehat{L}_k = \{2(k^2 - 1)/3 + C_0\} k^2 a^3 + O(a^4)$$

можно сопоставить с укороченным дифференциальным уравнением (5.2) четвертого порядка

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\sigma(\theta_*)\, a^3}{\mu R}\left\{\frac{1}{3}(\eta'' + \eta) - \frac{1}{2} C_0 \eta\right\}'' = 0.$$

Оно, конечно же, совпадает с линеаризацией в безразмерных переменных уравнения Рейнольдса теории смазки в применении к термокапиллярному движению слоя жидкости толщины h на стенке $\Sigma = \{|z| = R_0\}$ [3]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}_\Sigma \left\{\frac{\sigma_*(h)\, h^3}{3\mu} \nabla_\Sigma \left(\Delta_\Sigma h + \frac{h}{R_0^2}\right) + \frac{h^2}{2\mu} \nabla_\Sigma \sigma_*(h)\right\} = 0.$$

Здесь зависимость $\sigma_*(h) = \sigma((1 - \beta h)\theta_0 + \beta h \theta_\infty)$ получается в результате асимптотического интегрирования уравнения теплопроводности при $h/R_0 \to 0$. Линеаризация проводится на постоянной толщине слоя $h = R - R_0$.

В заключение отметим, что критические термокапиллярные числа, зануляющие символ $\widehat{L}_k$, получены в [4]. В [5] установлено ветвление стационарных решений полных уравнений термокапиллярной конвекции в окрестности критических чисел Марангони. Для недеформируемой свободной границы эти числа вычислены в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Антановский Л. К.** Динамика межфазной границы под действием капиллярных сил. Квазистационарное плоскопараллельное движение // ПМТФ.— 1988.— № 3.
2. **Голузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966.
3. **Копбосынов Б. К., Пухначев В. В.** Термокапиллярное движение в тонком слое жидкости // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости.— Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983.
4. **Антановский Л. К.** Краевые задачи со свободными границами для системы Стокса на плоскости // ДАН СССР.— 1986.— Т. 290, № 3.
5. **Антановский Л. К.** Ветвление решений задачи со свободной границей для уравнений термокапиллярной конвекции // Динамика сплошной среды/ ИГ СО АН СССР, 1982.— Вып. 54.
6. **Антимиров М. Я., Лиепиня В. Р.** Возникновение термокапиллярной конвекции в цилиндрическом слое жидкости в условиях невесомости // Изв. АН ЛатвССР. Сер. физ. и техн. наук.— 1978.— № 3.

г. Новосибирск *Поступила 16/II 1989 г.*

УДК 536.25

В. А. Альварес-Суарес, Ю. С. Рязанцев, В. М. Шевцова

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ

Существование тангенциальных сил поверхностного натяжения на границах раздела фаз (жидкость — жидкость, жидкость — газ) может оказывать существенное влияние на тепломассоперенос в жидкости. В случае создания в исследуемом объеме жидкости градиента температур поверхностные термокапиллярные силы ввиду своей малоинерционности могут приводить к появлению быстрых гидродинамических течений [1, 2]. Эти эффекты приобретают особое значение в процессах космической технологии при изучении поведения материалов (расплавов) в условиях пониженной гравитации, при которых роль термогравитационной конвекции становится пренебрежимо мала [3], например при росте кристаллов, процессах сварки, получении пеноматериалов и т. д.

Явление термокапиллярной конвекции (ТКК) (эффект Марангони) вносит определенный вклад в процессы массопереноса в обычных технологических процессах. При лазерной обработке поверхности металлов ТКК может играть существенную роль при легировании и азотировании различных сортов стали [4]. Одно из применений указанного эффекта при учете изменения формы поверхности под действием ТКК — это предложенный способ изготовления дифракционных решеток [5] и новый тип фотографического процесса, получившего название термотензографии [6], основанные на действии эффекта Марангони при лазерном воздействии на различные материалы. В процессах биотехнологии ТКК также может стать основой нового способа при производстве различных типов продукции [7]. В связи с указанными применениями ТКК представляет значительный интерес дополнить результаты [1, 2] и провести детальное сравнение экспериментальных данных с результатами численного счета.

Экспериментальное определение вклада сил поверхностного натяжения в массоперенос в жидкости встречает значительные трудности, так как моделирование термокапиллярной конвекции необходимо проводить в тонких слоях ($H < 0{,}5$ см) с достаточно большой площадью свободной поверхности. В этих условиях использование различных методов визуализации, таких как введение трассеров, краски или частиц, наряду с источником нагрева может вносить достаточно большие возмущения в условия проведения экспериментов и в получение достоверной информации об исследуемом процессе [8]. В связи с этим предложенный для изучения ТКК метод фотохромной визуализации [9, 10], включающий в себя импульсное нагревание среды с помощью лазерного излучения с одновременным появлением окрашенной линии, позволяет избежать многих указанных выше недостатков.