

НЕКОТОРЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА ИЗЛУЧЕНИЕМ

И. В. Немчинов

(Москва)

Рассматриваются уравнения нестационарного нагрева или охлаждения вещества излучением совместно с уравнениями движения среды. Показывается, что система уравнений лучистого переноса тепла и газовой динамики является не вполне гиперболической, но обладающей полной системой характеристик. Определяется число и вид граничных условий на движущихся и неподвижных границах (наличие или отсутствие разрывов температуры).

Находится функция источника линеаризованных уравнений переноса тепла излучением и приводятся аналитические решения линейных уравнений в ряде задач. Рассматриваются линеаризованные уравнения с добавлением переноса тепла путем обычной теплопроводности.

Рассматриваются автомодельные задачи, когда пробег излучения степенным образом зависит от температуры, а поток излучения с горячей поверхности — от времени.

Приводятся некоторые результаты численного решения нелинейных уравнений в квазистационарных задачах типа бегущих волн. Исследуются предельные случаи, приводящие к аналитическим выражениям для искомых распределений температуры и потока тепла.

1. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

§ 1. Основное уравнение переноса тепла излучением в плоскопараллельном случае, записанное для направления, составляющего угол θ с осью x имеет вид [1-3]:

$$\cos \theta \frac{\partial I_v}{\partial x} = -\kappa_v \rho I_v + \rho j_v \quad (1.1)$$

где I_v — интенсивность излучения частоты в указанном направлении; j_v — интенсивность испускания в том же направлении единицы массы газа; κ_v — коэффициент поглощения на единицу массы; ρ — плотность вещества.

В этом уравнении предполагается, что плотность излучения в данной точке U_v может соответствовать равновесной плотности излучения, сильно или слабо отклоняться от нее, распределение интенсивности по углам может быть изотропным или не изотропным. Вместе с тем будем считать, что вещество среды, в которой происходит перенос излучения, достаточно плотно, ему можно приписать определенную температуру T , определяющую интенсивность испускания излучения j_v (вынужденное излучение и изотропное рассеивание учитывается в коэффициенте поглощения). Используем эту обычную астрофизическую гипотезу [2, 3] о локальном термодинамическом равновесии и примем, что интенсивность испускания определяется выражением

$$j_v = \kappa_v B_v(T) \quad (B_v — \text{функция Планка}) \quad (1.2)$$

Проведем осреднение по углам, при определенных предположениях о распределении излучения по направлению. Таким образом, получим:

$$\pm \frac{\alpha}{\kappa_v \rho} \frac{\partial F_v^\pm}{\partial x} = -F_v^\pm + B_v(T) \quad (1.3)$$

где F_v^+ и F_v^- — потоки излучения в положительном и отрицательном направлении оси x , численный коэффициент α возникает при осреднении (считая излучение изотропным или предполагая, что кванты света движутся лишь «вперед» или «назад», находим, что α близко к значению для диффузионного приближения $\alpha = 2/3$).

Перейдем от бесконечной системы уравнений (1.3) к системе двух уравнений для полных потоков F^+ и F^- , проведя осреднение по частотам

$$\pm l \frac{\partial F^\pm}{\partial x} = -F^\pm + B(T), \quad B = \sigma T^4, \quad l = \frac{\alpha}{\kappa \rho} \quad (1.4)$$

Здесь σ — константа в законе Стефана-Больцмана, а $l(T, \rho)$ — усредненный пробег излучения по Росселанду [2] в случае малых отклонений излучения от равновесного, по спектру излучателя в случае объемного высвечивания, по ведущей частоте излучателя, когда поток излучения много больше равновесного. Заметим, что коэффициент α введен для удобства в пробег излучения. Введенные функции F^+ и F^- могут быть только положительными. Полный поток тепла в данной точке

$$q = F^+ - F^- \quad (1.5)$$

Система уравнений (1.4) в несколько ином виде использовалась при анализе структуры и яркости ударных волн [4-7], в задаче об охлаждении воздуха в волне высвечивания [8], при определении теплоотдачи плотной высокотемпературной плазмы постоянной температуры [9] и во многих астрофизических задачах [1-3, 10, 11]. В этих работах подробно исследована физическая сторона рассматриваемых явлений и вопрос о величине и способе вычисления коэффициента поглощения κ . Поэтому функцию $l(T, \rho)$ будем считать заданной, так же как зависимость энергии единицы массы газа от температуры T и удельного объема V

$$E(T, V) = \frac{pV}{k(T, V) - 1} \quad (1.6)$$

где k — эффективный показатель адиабаты [4, 12, 13]; p — давление. Уравнение состояния газа будем считать заданным в виде

$$pV = \frac{RT}{\mu(T, V)} \quad (1.7)$$

где μ — «кажущийся» молекулярный вес, R — универсальная газовая постоянная. Таким образом, вещество будем считать достаточно плотным, с тем чтобы энергией излучения и давлением излучения можно было пренебречь, но температуру вещества, точнее плотность излучения, столь большой, что перенос энергии осуществлялся бы в основном излучением.

В дальнейшем, поскольку мы интересуемся лишь гидродинамической стороной переноса тепла излучением, для простоты ограничимся системой уравнений (1.4).

§ 2. Запишем уравнения газовой динамики в форме Лагранжа:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} + p \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial F^+}{\partial m} - \frac{\partial F^-}{\partial m} = 0 \quad (2.1)$$

Уравнения (1.4) в лагранжевых (массовых) координатах имеют вид:

$$\pm l \rho \frac{\partial F^\pm}{\partial m} = -F^\pm + B(T) \quad (2.2)$$

Система уравнений (2.1) и (2.2) является замкнутой относительно T, V, u, F^+ и F^- . Интересно отметить, что эта система имеет пять действительных характеристических направлений, число которых равно числу

уравнений. Пусть $\varphi(m, t)$ определяет характеристику. Матрица для их определения имеет вид [14, 15] (см. таблицу).

	T	V	u	F^+	F^-	
1	0	$\frac{\partial \varphi}{\partial t}$	$-\frac{\partial \varphi}{\partial m}$	0	0	описывают распространение возмущений и перенос вместе с веществом, а два направления $t = \text{const}$ соответствуют уравнениям (2.2) (кратность характеристики $t = t_0$ делает систему не вполне гиперболической).
2	$\frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial \varphi}{\partial m}$	$\frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial \varphi}{\partial m}$	$\frac{\partial \varphi}{\partial t}$	0	0	
3	$\frac{\partial E}{\partial T} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$	$(\frac{\partial E}{\partial V} + p) \frac{\partial \varphi}{\partial t}$	0	$\frac{\partial \varphi}{\partial m}$	$-\frac{\partial \varphi}{\partial m}$	
4	0	0	0	$\frac{\partial \varphi}{\partial m}$	0	
5	0	0	0	0	$-\frac{\partial \varphi}{\partial m}$	

Соотношения (2.2) записаны вдоль характеристических направлений $t = \text{const}$ (они отражают тот факт, что излучение практически мгновенно «подстраивается» под распределение температуры, вследствие большой скорости света, а температура в свою очередь изменяется под влиянием потока тепла). Заметим, что введение конечной скорости света сделает систему уравнений вполне гиперболической (световые «конуса»).

Третье уравнение (2.1) можно записать вдоль характеристического направления $m = \text{const}$:

$$\frac{l}{V} \left(\frac{\partial E}{\partial t} + p \frac{\partial V}{\partial t} \right) - (F^+ + F^-) + 2B(T) = 0 \quad (2.3)$$

Используем термодинамическое тождество

$$dE + p dV = dH - V dp = c_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p} - V \right) dp$$

Здесь $c_p(T, p)$ — теплоемкость при постоянном давлении, энтальпия $H(T, p) = E + pV$. Получим уравнение

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} \left(1 - \frac{\partial H}{\partial p} \right) = \frac{F^+ + F^- - 2B(T)}{lp} \quad (2.4)$$

Рассмотрим два предельных случая, в которых полная система (2.1) — (2.3) допускает существенные упрощения, и уравнения (2.2) и (2.3) будут независимы от других.

1. Быстрое распространение тепла, такое, что плотность не успевает измениться ($\rho = \text{const}$) и газ неподвижен ($u = 0$), а давление определяется по температуре

$$\rho_0 c_v(T, \rho_0) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad p = \frac{1}{V_0} \mu(T, V_0) \quad (2.5)$$

2. Медленное движение газа такое, что давление успевает¹ выровняться и равняться заданной величине ($p = p(t)$). Полагая $p = p_0 = \text{const}$, т. е. пренебрегая адиабатическим охлаждением, получаем уравнение

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial m} = 0, \quad \rho = \frac{p_0}{RT} \mu(T, p_0) \quad (2.6)$$

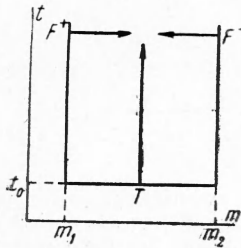
В обоих случаях системы (1.4) и (2.5) или (2.2) и (2.6) остаются, естественно, не вполне гиперболическими и имеют три действительные характеристики.

На фиг. 1, 2 и 3 представлены «области зависимости» этих уравнений, т. е. показано, как можно задавать начальные и граничные данные в трех типичных случаях: 1) все данные заданы на характеристиках (задача об охлаждении (нагревании) при заданной массе газа) и 2), 3) часть данных задана на характеристиках, а часть — на линии L , не являющейся характеристикой, причем на ней задается температура или нет.

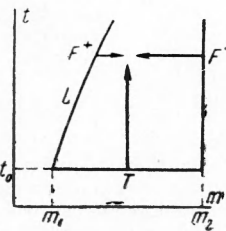
В задаче о сублимации поверхности (относится к типу 3) линия L_s может определяться уравнением:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{F^+ - F^-}{Q_s(T_s, p_0)} \quad (2.7)$$

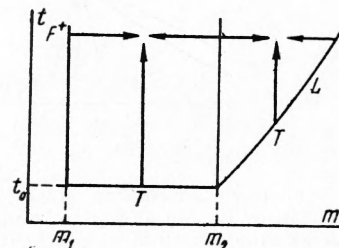
В уравнении (2.7) предполагается, что фазовый переход происходит в узкой зоне (разрыве) при известной температуре сублимации T_s , соответствующей заданному давлению p_0 и известной теплоте сублимации Q_s . Вопрос о структуре зоны сублимации и величине F^- на линии L_s не будет рассматриваться в настоящей работе.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

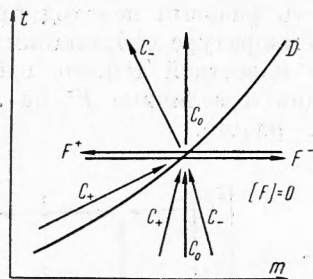
Таким образом, должно быть задано начальное распределение температуры (в том числе возможно распределение, имеющее разрывы) и потоки F^+ на границе области $m = \varphi_1(t)$ и F^- на границе $m = \varphi_2(t)$. Во всей области между границами потоки F^+ и F^- непрерывны. Разрывы температуры сохраняются в точках, где они были заданы (как в обычной газовой динамике), причем такие разрывы неподвижны в лагранжевой системе координат, а относительно неподвижной системы координат они могут передвигаться вместе с газом, но величина разрыва постепенно замыкается (а не мгновенно, как в приближении лучистой или при наличии обычной теплопроводности). В первом случае (граница неподвижна и, следовательно, является характеристикой, фиг. 1) и во втором случае (когда она как бы выдвигается в газ по заданному закону и хотя не является характеристикой, но подобна оси времени в смысле задания на температуру условий, фиг. 2) температура газа на границе области не может быть задана. В третьем случае на заданной границе (когда она как бы выдвигается в новую область массы газа и, хотя не является характеристикой, но подобна в смысле задания числа условий оси «пространства» — массы, фиг. 3) должен быть задан не только входящий поток F , но и температура поступающего газа, причем она может не соответствовать «температуре» θ потока $F = c\theta^4$.

Наличие полной системы характеристик, системы уравнений газовой динамики и переноса тепла излучением позволяет проанализировать, какие граничные и начальные задачи можно ставить в рамках этой системы уравнений, и ответить на вопрос о наличии температурных скачков на движущихся и неподвижных границах области (на контактных разрывах и поршнях — в лагранжевых координатах неподвижных и на фронтах движущихся — сублимации, пламени и ударной волне и в волне охлаждения).

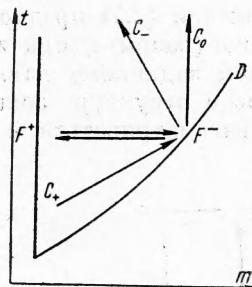
Физически скачки температуры соответствуют тому факту, что в рамках уравнений, учитывающих интегральный характер переноса излучения, особенно важных, когда пробег излучения больше характерных размеров задачи или его порядка, влияние на газ с помощью внесения излучающих поверхностей не позволяет при конечных потоках тепла мгновенно замыть разрыв температуры.

Вопрос о разрывах в ударных волнах, т. е. на линиях $dm/dt = \rho_0 D$, где D — скорость фронта ударной волны, изучался в [4-6] в рамках вопроса о структуре ударной волны, т. е. движущейся с постоянной скоростью в безграничном пространстве, или когда зона резкого изменения параметров узка по сравнению с размерами всей задачи (скажем, расстояния до поршня). В [4] было сделано замечание, что при пробегах много больших размеров задачи структура всей области течения будет отличной от рассмотренной в [5, 6]. Действительно, поскольку область прозрачна, структура будет аналогична структуре волны без излучения (т. е. почти адиабатические изменения газа за фронтом, а сам фронт ударной волны в рамках уравнений газовой динамики — разрыв, где происходит подогрев газа). Отметим, что в рамках полной системы уравнений с учетом переноса излучения разрыв параметров на фронте всегда будет происходить по адиабате Гюгонио (т. е. по обычным законам сохранения), так как на фронте F^+ и F^- не терпят разрыва, причем из-за подогрева впереди фронта и из-за высвечивания сзади фронта условия, приносимые звуковыми характеристиками сзади и начальные пара-

метры перед фронтом отличаются от обычных условий без учета высвечивания и получаются из решения системы уравнений (фиг. 4). Правда, можно иногда предположить, что фронт является сильным, но непрозрачным для излучения выходящего вперед — холодный газ перед фронтом сильно поглощает, но не прогреет достаточно, чтобы много излучать; тогда на фронте входящий поток F равен нулю, а выходящий «застревает», что учитывается условиями на фронте (фиг. 5).



Фиг. 4



Фиг. 5

Увеличение точности может быть достигнуто применением вместо осреднения по частотам от $\nu = 0$ до $\nu = \infty$ многогруппового приближения, широко-используемого в задачах кинетической теории нейтронов и заключающегося в разбиении полных потоков F на n групп, каждая из которых соответствует определенному интервалу частот $\Delta\nu$, причем пробег l_ν и интенсивность испускания j_ν будут средними в этих интервалах. Таким образом, вместо двух уравнений (1.4) получим $2n$ уравнений для потоков F_ν^+ и F_ν^- . Отметим, что при применении многогруппового приближения характер системы уравнений не изменяется, а лишь увеличивается кратность характеристики $t = \text{const}$ и число уравнений вдоль нее.

Дифференцируя (1.4) по x , легко найти для q одно уравнение 2-го порядка:

$$l \frac{\partial}{\partial x} \left(l \frac{\partial q}{\partial x} \right) = q + 2l \frac{\partial B}{\partial x} \quad (2.8)$$

Из уравнений (2.8) предельным переходом можно получить обычное уравнение лучистой теплопроводности:

$$q = -2l \frac{\partial B}{\partial x} = -8l\sigma T^3 \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.9)$$

Используя (1.4) и (1.5), получим

$$2F^\pm = -l \frac{\partial q}{\partial x} \pm q + 2B(T) \quad (2.10)$$

Соотношения (2.10) могут служить граничными условиями для уравнения (2.8), если задать значение F (например, $F = \sigma T_0^4$ или $F = 0$, когда газ граничит соответственно с абсолютно черным телом или вакуумом). Заметим, что часто рассматривают уравнение (2.9), а не полное уравнение (2.8), оставляя граничные условия $\pm q = 2B(T) - 2F^\pm$.

Сложением уравнений (2.10) получим

$$F^+ + F^- = -l \frac{\partial q}{\partial x} + 2B(T) \quad (2.11)$$

Режимы, когда потоки излучения почти равны между собой $F^+ \approx F^-$ и $F^+ + F^- \approx 2B(T)$, т. е. плотность излучения в данной точке почти равна плотности излучения, соответствующей данной температуре, находящегося с веществом в равновесии, будем называть существенно равновесными режимами. При этом будем пользоваться уравнениями (2.9). Режимы, когда излучение в данной точке не соответствует температуре вещества, т. е. потоки излучения $F^+ \neq F^-$, например $F^+ \gg 2B(T)$, будем называть существенно неравновесными режимами.

В лагранжевых координатах уравнение (2.8) примет вид

$$l\rho \frac{\partial}{\partial m} \left(l\rho \frac{\partial q}{\partial m} \right) = q + 2l\rho \frac{\partial B(T)}{\partial m} \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) может использоваться вместо системы (2.2). Когда один из односторонних потоков F^+ или F^- много больше другого, — одно из уравнений (2.2) можно опустить. Система становится вполне гиперболической и для случая объемного высвечивания (когда $F^+ + F^- \ll 2B(T)$, т. е. из (2.11) получим

$$\frac{\partial q}{\partial m} = \frac{2B(T)}{l(T, \rho) \rho} \quad (2.13)$$

В случае объемного высвечивания, следовательно, нет необходимости решать уравнения газовой динамики совместно с уравнениями переноса, а можно оставить высвечивание в качестве правой части уравнения энергии, учтя, таким образом, влияние неадиабатичности на распределение температуры. Потоки же излучения можно вычислить после решения газодинамической задачи. Заметим, что получающиеся результаты в нестационарных задачах можно обобщить или просто перенести и на случай стационарных течений с учетом излучения.

Приступим к изучению характера поведения решения системы уравнений переноса тепла излучением и энергии (при ρ или p постоянных) на основе линейных уравнений. Укажем, что численные методы решения нелинейной системы уравнений разработаны А. А. Милутиным и Г. Г. Виленской.

II. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 3. Рассмотрим задачи, в которых температура T слабо отклоняется от некоторого постоянного значения T_0 . При этом можно приближенно положить

$$B(T) = \sigma T^4 = \sigma T_0^4 (1 + \theta), \quad \theta = \frac{4(T - T_0)}{T_0} \quad (3.1)$$

Введем обозначения

$$q_0 q^\circ = q, \quad x_0 x^\circ = x, \quad t_0 t^\circ = t, \quad q_0 = 2\sigma T_0^4, \quad x_0 = l(T_0), \quad 4q_0 t_0 = \rho_0 c_0 T_0 x_0 \quad (3.2)$$

Уравнения (2.5) и (2.8) примут вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = q + \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3.3)$$

где индексы безразмерных переменных опущены.

Дифференцированием из системы (3.3) получим уравнение, по форме совпадающее с уравнением Милна [10]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial t} \quad (3.4)$$

Основным решением этого уравнения является

$$\theta = \exp \left(-\frac{k^2}{k^2 + 1} t + ikx \right) \quad (3.5)$$

Функция источника имеет вид

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp \left(-\frac{k^2}{k^2 + 1} t \right) \cos kx dk = \\ &= \frac{1}{\pi} \exp(-t) \int_0^\infty \left[\exp \frac{t}{k^2 + 1} - 1 \right] \cos kx dk + \delta(x) \exp(-t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака.

При малых временах t , разлагая экспоненту в подынтегральном выражении в ряд, получаем:

$$G \approx e^{-t} \left[\frac{1}{2} t e^{-|x|} + \delta(x) \right] \quad (3.7)$$

При больших временах под интегралом (3.6) существенны лишь значения $k \ll 1$, поэтому:

$$G \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-k^2 t) \cos kx dk = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad (3.8)$$

т. е. совпадает с функцией источника обычного уравнения теплопроводности.

§ 4. Рассмотрим задачу о соприкосновении двух равномерно нагретых полупространств с малой разностью температур. Граничными условиями на плоскости $x = 0$ является непрерывность потока излучения F^+ и F^- , т. е. согласно (2.10):

$$[q] = 0, \quad \left[l \frac{\partial q}{\partial x}\right] = 2[B] \quad (4.1)$$

Проведя линеаризацию и в граничных условиях (4.1), получим граничное условие:

$$q|_+ = q|_-, \quad \frac{\partial q}{\partial x}|_+ - \frac{\partial q}{\partial x}|_- = \theta_+ - \theta_- \quad (4.2)$$

и найдем решение уравнения (3.4) при условии (4.2):

$$\begin{aligned} q &= -2 \frac{\Delta T}{T_0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{1+k^2} \exp\left(-\frac{k^2}{k^2+1} t\right) dk \\ \theta &= 2 \frac{\Delta T}{T_0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \exp\left(-\frac{k^2}{k^2+1} t\right) dk \end{aligned} \quad (4.3)$$

В начальный момент времени $t = 0$ соответствующее (4.3) распределение температуры и потока тепла имеет вид:

$$q = -2 \frac{\Delta T}{T_0} e^{-|x|}, \quad \theta = 2 \frac{\Delta T}{T_0} \operatorname{sign} x \quad (4.4)$$

Поток тепла в точке $x = 0$ изменяется со временем по закону

$$q(0, t) = 2 \frac{\Delta T}{T_0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{k^2+1} t\right) \frac{dk}{k^2+1} = 2 \frac{\Delta T}{T_0} \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \exp(-t \sin^2 \varphi) d\varphi \quad (4.5)$$

При малых значениях t разложение экспоненты в подынтегральном выражении приводит к выражению:

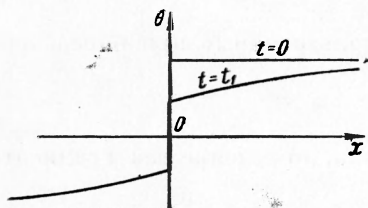
$$q \approx 2 \frac{\Delta T}{T_0} \left(1 - \frac{t}{2}\right) \quad (4.6)$$

При больших значениях t основную роль в подынтегральном выражении играют значения φ , близкие к нулю. Поэтому можно положить $\sin^2 \varphi = \varphi^2$ вплоть до $\varphi = 1$, а затем $\sin^2 \varphi = 1$ до $\varphi = 1/2\pi$. Следовательно,

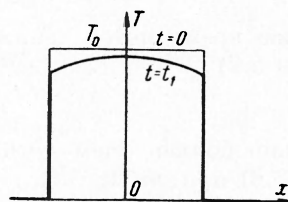
$$q = 2 \frac{\Delta T}{T_0} \left[\frac{\operatorname{erf}(\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}} + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) e^{-t} \right] \quad (4.7)$$

Легко видеть, что при больших t можно пренебречь вторым членом (4.7) и положить $\operatorname{erf}(\sqrt{t}) = \operatorname{erf}(\infty) = 1$, т. е. получить зависимость потока тепла от времени, такую же, как и в приближении лучистой теплопроводности. При малых временах поток тепла меньше, чем рассчитанный по приближению лучистой теплопроводности и при $t = 0$ конечен. Распределение температуры в последовательные моменты времени показано на фиг. 6.

§ 5. Рассмотрим в тех же предположениях и обозначениях задачу об охлаждении в вакуум конечного объема, нагретого до температуры T_0 .



Фиг. 6



Фиг. 7

Выпишем граничные условия в безразмерном виде

$$x = L, \quad q = -\frac{\partial q}{\partial x} + 1 + \theta, \quad x = 0, \quad q = 0 \quad (5.1)$$

Решением уравнений (3.3), удовлетворяющим условиям (5.1), является:

$$\begin{aligned} \theta &= -1 + \sum A_n \cos k_n x \exp\left(-\frac{k_n^2}{k_n^2 + 1} t\right) \\ q &= \sum A_n \frac{k_n}{k_n^2 + 1} \sin k_n x \exp\left(-\frac{k_n^2}{k_n^2 + 1} t\right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

где k_n находится из трансцендентного уравнения

$$k_n \operatorname{tg} k_n L = 1 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.3)$$

Ясно, что при $L \gg 1$ значения корней этого уравнения с малым индексом n определяются выражением $k_n L \approx \frac{1}{2}\pi(2n - 1)$, а с большим — выражением $k_n L \approx \pi(n - 1)$, в то время как при $L \ll 1$ близки к $(n - 1)\pi$ все значения корней $k_n L$. Из начального условия $\theta = 0$ при $t = 0$ определяем

$$A_n = \frac{4 \sin k_n L}{2k_n L + \sin 2k_n L} \quad (5.4)$$

Приближенно при малых временах решение имеет вид:

$$q \approx \frac{1}{2} [e^{(x-L)} - e^{(x+L)}] \quad (5.5)$$

Распределение температуры в последовательные моменты времени представлено на фиг. 7.

При $L \ll 1$ поток тепла $q \approx x$ и температура $T = 1 - \frac{1}{4}t$, т. е. температура равномерно опускается во всем объеме. При таком условии ($L \ll 1$) можно рассматривать и нелинейное уравнение, когда, например, теплоемкость и пробег излучения степенным образом зависят от температуры [7, 16] $c_v \sim T^\gamma$ и $l \sim T^n$; при этом изменение температуры описывается выражением

$$T^{n+\gamma-3} = T_0^{n+\gamma-3}(x) - \frac{1}{4}(n + \gamma - 3)t \quad (5.6)$$

При $n + \gamma - 3 > 0$ получаем конечное время высвечивания, но решение справедливо лишь до тех пор, пока $l \gg x$, а показатель $n > 0$ соответствует уменьшающимся пробегам. Закон понижения температуры равномерно нагретого полупространства, граничащего с вакуумом, в начальные моменты времени дается выражением

$$T = 1 - \frac{1}{8}te^{-x} \quad (5.7)$$

Дифференцированием этого уравнения находим

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{2} t e^{-x} \quad (5.8)$$

В то же время поток тепла, использованный при определении температуры (в 5.7)

$$q = -\frac{1}{2} e^{-x} \quad (5.9)$$

значительно больше, чем поток тепла, определяемый градиентом температуры (5.8) при $t \ll 1$.

Интересно отметить, что охлаждение конечного объема не в вакуум, а в холодную среду, которая нагревается, приведет к тому, что объем в начальные моменты времени будет охлаждаться так же, как это показано на фиг. 7, а в окружающей среде появится «язык» температуры такой же, как показано на фиг. 6.

§ 6. Рассмотрим установление стационарного режима передачи тепла излучением у холодного проницаемого поршня, начинающего двигаться с постоянной скоростью W_0 в горячей среде температуры T_∞ . Пусть температура поршня — «решетки» много ниже T_∞ и ограничимся временами, когда изменения температуры ΔT малы. Уравнение энергии, когда давление среды $p = \text{const}$, имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - W \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (6.1)$$

Здесь x — безразмерное расстояние, отсчитанное от поверхности поршня ($x > 0$), параметр W определяется ниже:

$$W = W_0 \frac{t_0}{x_0} = W_0 \frac{\rho_\infty c_p T_\infty}{8\sigma T_\infty^4} = \frac{W_0 p_0}{8\sigma T_\infty^4} \frac{k}{k-1} \quad (6.2)$$

остальные обозначения те же, что и в (3.2). Подставляя (5.9) в (6.1), получаем

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - W \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{2} e^{-x} = 0 \quad (6.3)$$

Решением уравнения (6.3) с начальными данными $\theta = 1$ при $t = 0$ служит выражение

$$T = 1 + \frac{\theta - 1}{4} = 1 + \frac{1}{8W} [e^{-x-tW} - e^{-x}] \quad (6.4)$$

При $t \rightarrow \infty$ распределение температуры имеет вид

$$T = 1 - \frac{1}{8W} e^{-x} \quad (6.5)$$

Ясно, что полученное решение (6.5), как и само уравнение (6.3) и (6.4) при больших временах справедливы лишь при $W \gg 1$. Из (6.4) легко видеть, что установление стационарного режима происходит за времена $Wt \approx 1$, а изменения температуры существенны в зоне $x \approx 1$.

§ 7. Рассмотрим задачу о прогреве полупространства холодного газа температуры T_∞ излучением от горячей поверхности с температурой, изменяющейся по закону $T_w = T_0 f(t)$.

Пусть $T_w \gg T_\infty$, поэтому собственным равновесным излучением газа, имеющего температуру, близкую к T_∞ , можно пренебречь. Если пробег излучения $l = l_0 = \text{const}$, то

$$F^- = 0, \quad F^+ = q = \sigma T_0^4 f^4(t) \exp\left(-\frac{x}{l_0}\right) \quad (7.1)$$

Подстановкой (7.1) в уравнение (2.5) получаем

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{l_0} \sigma T_0^4 f^4(t) \exp\left(-\frac{x}{l_0}\right) \quad (7.2)$$

Решением этого уравнения при $T = T_\infty$ в момент $t = 0$ является

$$T = T_\infty \left[1 + \frac{\sigma T_0^4}{l_0 \rho_0 c_v T_\infty} \exp\left(-\frac{x}{l_0}\right) \int_0^t f^4(t) dt \right] \quad (7.3)$$

Если $f(t) = \text{const} = 1$ и $T \gg T_\infty$, но все еще $T^4 \ll T_W^4$, то

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\sigma T_0^4}{l_0 \rho_0 c_v T_0} \exp\left(-\frac{x}{l_0}\right) = \frac{1}{2} \frac{t}{t_0} \exp\left(-\frac{x}{l_0}\right) \quad (7.4)$$

где t_0 вводится так же, как и в (3.2).

§ 8. Рассмотрим задачу об испарении поверхности с температурой сублимации T_s плотностью ρ_0 и теплотой сублимации потоком излучения от горячей «черной» поверхности с температурой T_W . Обе поверхности соприкасаются в начальный момент. Изменение температуры определяется уравнением, аналогичным (7.3), и решением при $T^4 \ll T_W^4$ является

$$T = T_s \left[\frac{q_0}{\rho_s c_p l_s T_s} (t - t_*) \exp\left(-\frac{m}{\rho_s l_s}\right) + 1 \right] \quad (8.1)$$

где t_* — время прихода разрыва сублимации в данную точку. При этом, как и выше, $q_0 = \sigma T_W^4$, но считаем, что давление успевает выровняться и равняться заданному давлению p_0 . Отсчет расстояния, точнее, массы m ведется от горячей поверхности (ρ_s — плотность паров при давлении p_0 и температуре T_s , считаем, что $l_s \rho_s = l_p = \text{const}$). Скорость движения разрыва сублимации $\rho_0 D$ получим подстановкой закона затухания потока в (2.7)

$$\frac{dm}{dt} = \rho_0 D = \frac{q_W}{Q_s} = \frac{q_0}{Q_s} \exp\left(-\frac{m}{\rho_s l_s}\right) \quad (8.2)$$

Интегрируя это уравнение получим закон движения волны сублимации

$$\frac{m}{l_s \rho_s} = \ln \left(1 + \frac{q_0 t_*}{\rho_s l_s Q_s} \right) = \ln \left(1 + \frac{t}{t_0} \right) \quad (8.3)$$

где введены параметр β и константа t_0 по следующим соотношениям

$$\beta = \frac{Q_s}{c_p T_s}, \quad t_0 = \beta \frac{l_s \rho_s c_p T_s}{\sigma T_0^4} \quad (8.4)$$

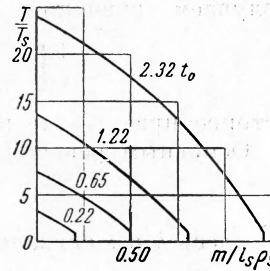
Изменения температуры считаем такими, что при этом еще не приходится учитывать излучение газа (паров). Используя закон движения границы (8.3), получим следующее распределение температуры по лагранжевой координате m в момент, когда фронт сублимации достигнет точки m_*

$$T = T_s \left\{ \beta \left[\exp\left(\frac{m_*}{l_s \rho_s}\right) - \exp\left(\frac{m}{l_s \rho_s}\right) \right] + 1 \right\} \quad (8.5)$$

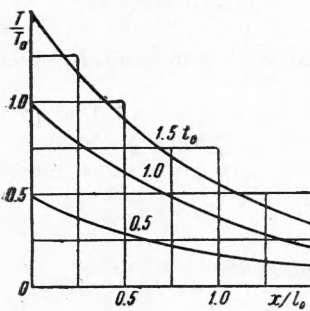
Распределение температуры по (8.5) показано на фиг. 8 (при $\beta = 10$). Для сравнения на фиг. 9 приведено распределение температуры по (7.4).

§ 9. Рассмотрим систему линейных уравнений теплопроводности с учетом лучистого переноса тепла и обычного (молекулярного, электронного и т. д.), причем пробег частиц мал и поток тепла, определяемый их взаимодействиями, пропорционален градиенту температуры

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q = q_r + \varepsilon q_m, \quad q_m = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 q_r}{\partial x^2} = q_r + \frac{\partial T}{\partial x} \quad (9.1)$$



Фиг. 8



Фиг. 9

В системе (9.1) введены безразмерные переменные и следующие параметры

$$\varepsilon = \frac{K_0 T_0}{8x_0 \sigma T_0^4}, \quad t_0 = \frac{8\sigma T_0^4 x_0}{\rho_0 c_p T_0}, \quad x_0 = l_0 \quad (9.2)$$

где $K(T_0, p_0) = K_0$ — коэффициент теплопроводности.

Уравнения (9.1) можно свести к одному линейному дифференциальному уравнению для температуры

$$\varepsilon \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x^2} = -\frac{\partial T}{\partial t} + (\varepsilon + 1) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (9.3)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение переходит в линеаризованное уравнение для переноса тепла излучением. Вводя преобразование координаты $x = \varepsilon^{1/2} \xi$, получаем уравнение

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial^4 T}{\partial \xi^4} - \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \xi^2} \right] = -\frac{\partial T}{\partial t} + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \quad (9.4)$$

которое при $\varepsilon \rightarrow \infty$ переходит в обычное уравнение теплопроводности.

Основным решением уравнения (9.3) является

$$T = \exp(ikx - st) \quad (9.5)$$

Здесь k и s связаны соотношением

$$\varepsilon k^4 - k^2 s = s - (\varepsilon + 1)k^2, \quad \text{или} \quad s = \varepsilon k^2 + \frac{k^2}{k^2 + 1} \quad (9.6)$$

при этом

$$s \rightarrow (\varepsilon + 1)k^2 \quad \text{при} \quad k \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \varepsilon k^2 + 1 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \varepsilon k^2 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow \infty \quad (9.7)$$

Функция источника уравнения (9.3) имеет вид

$$G = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos kx \exp \left[\left(-\frac{k^2}{k^2 + 1} + \varepsilon k^2 \right) t \right] dk \quad (9.8)$$

При больших временах t в экспоненте существенны только значения k , близкие к нулю и

$$G \approx \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos kx \exp \left[-(1 + \varepsilon)k^2 t \right] dk = \frac{1}{2\sqrt{\pi(1 + \varepsilon)t}} \exp \left[-\frac{x^2}{4(1 + \varepsilon)t} \right] \quad (9.9)$$

и легко видеть, что при малых значениях ε влияние обычной теплопроводности мало.

При малых временах t можно разложить $\exp[-k^2 t/(k^2 + 1)]$ в ряд, ограничиваясь членом первого порядка $1 - k^2 t/(k^2 + 1)$. Такое разложение нельзя выполнить для $\exp(-\varepsilon k^2 t)$, так как при $k \rightarrow \infty$ аргумент велик даже при малом εt . Таким образом, получим

$$\begin{aligned} G &\approx \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos kx \left(1 - \frac{k^2}{k^2 + 1} t \right) \exp(-\varepsilon k^2 t) dk = \\ &= (1 - t) \frac{2}{\sqrt{\pi \varepsilon t}} \exp \left(-\frac{x^2}{4\varepsilon t} \right) + t \int_0^\infty \exp(-\varepsilon k^2 t) \frac{\cos kx}{1 + k^2} dk \end{aligned} \quad (9.10)$$

При малом значении εt можно положить $\exp(-\varepsilon k^2 t) \approx 1$, так как быстро уменьшающийся член $1/(1 + k^2)$ приводит к тому, что в интеграле существенны лишь сравнительно небольшие значения k . Поэтому можно положить

$$G \approx (1 - t) \frac{2}{\sqrt{\pi \varepsilon t}} \exp \left(-\frac{x^2}{4\varepsilon t} \right) + \frac{1}{2} t \exp(-|x|) \quad (9.11)$$

Таким образом, существенное влияние обычной теплопроводности при малом ε заключено в узкой области порядка $\sqrt{\varepsilon t}$.

В задаче о малом разрыве температур в безграничном пространстве решение имеет вид

$$T = \frac{\Delta T}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \exp\left(-\frac{k^2}{k^2+1} + \varepsilon k^2\right) t dk \quad (9.12)$$

Вычислим молекулярный поток тепла

$$\varepsilon q_m = -\varepsilon \frac{\partial T}{\partial x} = -\varepsilon \frac{\Delta T}{\pi} \int_0^{\infty} \cos kx \exp\left[-\left(\frac{k^2}{k^2+1} + \varepsilon k^2\right) t\right] dk \quad (9.13)$$

т. е. получили выражение, исследованное выше. Вычислим радиационный поток тепла,

$$q_r = -\frac{\Delta T}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{k^2+1} \exp\left[-\left(\frac{k^2}{k^2+1} + \varepsilon k^2\right) t\right] \cos kx dk \quad (9.14)$$

Проводя рассуждения, аналогичные изложенным выше, получим, что при больших значениях t

$$q_r = -\frac{\Delta T}{2\sqrt{\pi(1+\varepsilon)t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(1+\varepsilon)t}\right) \quad (9.15)$$

а при малых значениях t

$$q_r = -\frac{1}{2} \Delta T e^{-|x|} \quad (9.16)$$

Легко видеть, что при больших временах лучистая теплопроводность складывается с молекулярной.

Хотя вывод ряда формул возможно недостаточно строг математически, однако полученные результаты очевидны с физической точки зрения. Характерным для рассмотренных задач, в которых учитывается «интегральный» характер переноса излучения, является наличие разрывов температуры (из-за разрывов в начальных данных) и «выбрызгивание» «языков» на ширину порядка пробега излучения, причем разрывы в лагранжевых координатах неподвижны (контактные разрывы) или движутся (ударные волны). С течением времени неподвижные разрывы «замываются» и поток тепла стремится к значению, вычисляемому по уравнению лучистой теплопроводности. Лишь в случае охлаждения конечного объема объемный характер высвечивания сохранится до конца высвечивания. В нелинейной постановке задачи, если при понижении температуры пробег излучения падает, то прозрачность может прекратиться и, наоборот, если при уменьшении температуры пробег увеличивается, область может стать «прозрачной». Кроме того, могут иметь место эффекты типа «волн высвечивания» [8].

При добавлении обычной теплопроводности разрывы несколько замываются, но если коэффициент теплопроводности сравнительно мал, то на небольшую ширину и потоки тепла быстро становятся меньше радиационных.

§ 10. Для иллюстрации свойств решения нелинейной системы уравнений переноса тепла излучением рассмотрим стационарную в системе координат $\xi = x - Dt$ задачу о прогреве холодного газа температуры T_{∞} плоскостью, движущейся со скоростью D , с которой выходит поток излучения F^+ . При этом уравнение энергии (2.5) интегрируется

$$q - \rho_0 c_v D T = C \quad (10.1)$$

где константа интегрирования $C = -\rho_0 c_v D T_{\infty}$, а уравнение (2.8) можно записать в виде

$$\frac{d^2 q}{d\tau} = q + 8\sigma T^3 \frac{dT}{d\tau} \quad \left(\tau = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{l(T)}\right) \quad (10.2)$$

где τ — оптическая толщина.

Используя (10.1), получим из (10.2)

$$\frac{d^2 T}{d\tau^2} = T - T_\infty + \alpha \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 \frac{dT}{d\tau}, \quad \alpha = \frac{8\sigma T_0^4}{\rho_0 c_v D T_0} \quad (10.3)$$

В равновесном и в существенно неравновесном режимах можно рассматривать уравнения

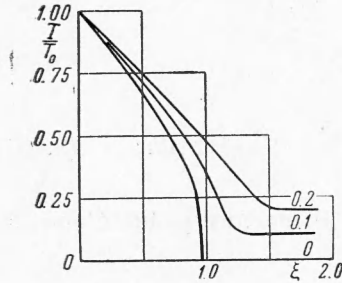
$$\alpha \frac{dT}{d\tau} = -(T - T_\infty) \left(\frac{T_0}{T} \right)^3 \quad (10.4)$$

$$\frac{d^2 T}{d\tau^2} = T - T_\infty, \quad \text{или} \quad \frac{dT}{d\tau} = -(T - T_\infty) \quad (10.5)$$

Переходя к координате ξ , получим из (10.4) и (10.5), предполагая степенную зависимость пробега от температуры [16],

$$\alpha \frac{dT}{d\xi} l_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^k = -(T - T_\infty) \left(\frac{T_0}{T} \right)^3 \quad (10.6)$$

$$\frac{dT}{d\xi} l_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^k = -(T - T_\infty), \quad l = l_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^k$$



Фиг. 10

Ясно, что если $T_0 \gg T_\infty$, то уравнения (10.6) можно упростить, положив $T_\infty = 0$, и проинтегрировать, при этом получим в координатах ξ ограниченную область влияния горячей поверхности [17, 18], а не бесконечную, как при интегрировании уравнения (10.6)

$$\left(\frac{T}{T_0} \right)^{k+3} = 1 - \frac{\xi(k+3)}{l_0}, \quad \left(\frac{T}{T_0} \right)^k = 1 - \frac{\xi k}{l_0} \quad (10.7)$$

На фиг. 10 представлено в зависимости от $\xi k/l_0$ распределение температуры T/T_0 по второму уравнению (10.6) (в неравновесном режиме) при $T_\infty = 0.2T_0$ и $T_\infty = 0.1T_0$ и по второму уравнению (10.7) (в предположении $T_\infty = 0$) при $k = 2$.

Чем больше отношение T_0/T_∞ и значение показателя степени k , тем лучше совпадает приближенное решение с «точным». Введение такого «теплового фронта» существенно облегчает решение нелинейных уравнений теплопроводности и лучистого переноса тепла.

На существование квазистационарного «языка» температуры в существенно неравновесном режиме на краю тепловой волны и впереди излучающей ударной волны было указано в [7]. Заметим, что такой тепловой фронт не излучает в вакуум, так как пробег излучения $l = 0$ при $T = 0$ и оптическая толщина $\tau = \infty$.

III. НЕКОТОРЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

§ 11. Будем отыскивать автомодельные решения системы уравнений (2.5), (2.8) при граничных условиях (2.10), предполагая степенные зависимости для пробега излучения и теплоемкости от температуры

$$l = l_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^k, \quad c_v = c_{v0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^\gamma \quad (k \geq 0; \quad \gamma \geq 0) \quad (11.1)$$

и для потока излучения, заданного на границе $x = 0$, от времени

$$F^+ = F_0^+ \left(\frac{t}{t_0} \right)^s \quad (11.2)$$

в то время как температура холодного газа $T_\infty = 0$ и $F_\infty^- = 0$.

Введем новые переменные, связанные масштабными множителями со старыми:

$$T = \theta T', \quad x = \xi x', \quad t = \tau t', \quad q = \chi q', \quad F' = \varphi F' \quad (11.3)$$

Система уравнений (2.5) — (2.8) и граничных условий (2.10) будет инвариантной относительно введенного преобразования подобия [19]

в предположении (11.1) и (11.2), если соблюдаются следующие соотношения между масштабными множителями

$$\frac{\theta^{2k}}{\xi^2} \chi = \chi = \frac{\theta^{4+k}}{\xi}, \quad \frac{\theta^{\gamma+1}}{\tau} = \frac{\chi}{\xi}, \quad \chi = \varphi = \tau^s \quad (11.4)$$

Отсюда получаем

$$\theta^k = \xi, \quad \chi = \theta^4, \quad \chi = \tau^s \quad (11.5)$$

Если ввести

$$\theta = \tau^m, \quad \xi = \tau^a \quad (11.6)$$

где m определяет закон изменения температуры газа, а показатель a — закон «движения», то, следовательно:

$$m = \frac{1}{4} s, \quad a = mk = \frac{1}{4} sk \quad (11.7)$$

Но в то же время

$$m(k + \gamma - 3) = 1 \quad (11.8)$$

и автомодельность имеет место лишь, если соблюдается соотношение (11.8) между показателями степени в законах (11.1) и (11.2)

$$s(k + \gamma - 3) = 4 \quad (11.9)$$

Условия (11.7) и (11.8) противоречат таким значениям m и s , как $m = 0$, $s = 0$ и $m = -a$ (т. е. постоянной температуре излучающей поверхности и постоянной полной энергии в «языке»).

Выпишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой сводится система (2.5) — (2.8)

$$\lambda^2 T^k \frac{d}{d\eta} \left(T^k \frac{dq}{d\eta} \right) = q + \lambda T^{k+s} \frac{dT}{d\eta}, \quad m T^{\gamma+1} - a \eta T^{\gamma} \frac{dT}{d\eta} + \frac{dq}{d\eta} = 0 \quad (11.10)$$

Граничные условия (2.10) переходят в

$$q - \lambda T^k \frac{dq}{d\eta} = 1 - T^4 \quad \text{при } \eta = 0; \quad q = T = 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \quad (11.11)$$

Безразмерный скачок температуры (разность между значением температуры газа и горячей поверхности), определяемый по (11.11), постоянен. В (11.10) и (11.11) опущен индекс над безразмерными переменными:

$$x_0 x^0 = x; \quad t_0 t^0 = t; \quad T^0 (t^0)^m T_0 = T, \quad q^0 (t^0)^s q_0 = q \quad (11.12)$$

и введены обозначения

$$\eta = x^0 (t^0)^{-a}, \quad q_0 t_0 = \rho_0 c_v T_0 x_0, \quad q_0 = 2F_0 = 2\sigma T_0^4, \quad x_0 = \lambda l(T_0) \quad (11.13)$$

В дальнейшем для простоты положим $\gamma = 0$. В существенно неравновесном режиме система уравнений (11.10) примет вид

$$\lambda^2 T^k \frac{d}{d\eta} \left(T^k \frac{dq}{d\eta} \right) = q, \quad m T - a \eta \frac{dT}{d\eta} + \frac{dq}{d\eta} = 0 \quad (11.14)$$

и может легко быть проинтегрирована в виде

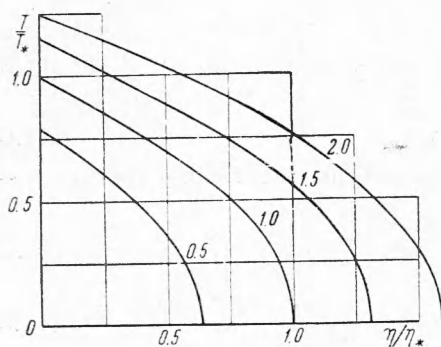
$$T = T_* \left(1 - \frac{\eta}{\eta_*} \right)^{\frac{1}{k}} = \frac{q}{m} \quad (\lambda T_*^k = \eta_* k) \quad (11.15)$$

Граничное условие (11.11), в котором членом T^4 в силу существенной неравновесности можно пренебречь, определяет:

$$m T_* = \frac{1}{2}, \quad \eta_* = \frac{\lambda}{k} \left(\frac{4}{2m} \right)^{\frac{1}{k}} \quad (11.16)$$

Таким образом, область повышенной температуры оказалась ограниченной и 2-е условие (11.11) выполняется в $\eta = \eta_*$.

Заметим, что полученное решение в режиме существенной неравновесности может быть использовано не только при специальном законе изменения температуры, определяемом соотношениями (11.8) и (11.9),



Фиг. 11

так как если в уравнении (2.8) опускается член $2l \frac{2B(T)}{\partial x}$ и в граничных условиях (2.10) член $2B(T)$ характеризующие собственное излучение в «языке», то следует опустить второе из условий на масштабные множители (11.5), а это естественно приводит к дополнительному произволу в выборе показателей степени s и k . При этом по-прежнему соблюдается соотношение:

$$a = mk, m(k + \gamma + 1) = s + 1 \quad (11.17)$$

но нет ограничивающего условия (11.9) и, таким образом, показатели в

законе зависимости пробега l от температуры T и потока излучения F от времени t (k и s) произвольны.

На фиг. 11 приведено распределение температуры, найденное по формуле (11.15), в последовательные моменты времени при следующих значениях показателей: $s = 0$, $\gamma = 0$, $k = 2$, $m = 1/3$. Видно, что не только продвигается вперед «язык», но и температура в нем постепенно растет.

Скачок температуры в точке $\eta = 0$ не постоянен. Тогда, когда температура верхнего края приблизится к температуре излучающей поверхности, станет необходимым учитывать собственное излучение в «языке». В дальнейшем для описания процесса распространения волны прогрева излучением станет возможным использовать атомодельные решения нелинейных уравнений лучистой теплопроводности, найденные и хорошо изученные в [1, 18]. При этом в уравнении можно опустить член $l\partial(l\partial q/\partial x)/\partial x$ и, следовательно, первое из соотношений (11.5). Показатели m , k , s и a связаны алгебраическими уравнениями:

$$m(5 + k + \gamma) = 2s + 1, \quad 2a = m(k + 3 - \gamma) + 1 \quad (11.18)$$

Переходный процесс от одной атомодельности к другой можно описать приближенным методом типа использованного [20, 21].

Следовательно, атомодельные решения приближения лучистой теплопроводности [17] справедливы лишь на достаточном удалении от точки выделения энергии или от излучающей поверхности. Заметим, что нижний край равновесной тепловой волны [17] неравновесен и этим можно пренебречь, лишь если зона неравновесности достаточно мала по сравнению с размерами всей области и может быть заменена на квазистационарный скачок.

Для полноты укажем еще на два случая предельных к атомодельным [22], в которых системы (2.5) и (2.8) также приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. При $k + \gamma - 3 = 0$ можно использовать замену переменных

$$T = e^{mt} T^\circ(\eta), \quad q = e^{st} q^\circ(\eta) \quad (\eta = xe^{-at}, a = mk, s = 4m) \quad (11.19)$$

а при $k = 0$

$$T = e^{-ax} T^\circ(\eta), \quad q = e^{-4ax} q^\circ(\eta) \quad (\eta = te^{-\beta ax}, \beta = \gamma - 3) \quad (11.20)$$

Заметим, что при сильной неравновесности излучения пробег излучения зависит не только от температуры газа, поглощающего излучение, но и от температуры излучающей поверхности T_W (ведущая частота), однако это не меняет атомодельного решения, если T_W постоянно.

Вообще, введение среднего пробега при использовании полного уравнения (2.8) или (2.12) оправдано лишь в предельных случаях (объемное излучение, интенсивное прогревающее излучение или приближение лучистой теплопроводности), а в промежуточных случаях носит характер интерполяции. Для получения точных количественных результатов следует применять многогрупповое приближение, т. е. систему (1.3).

Кроме того, следует отметить, что при интенсивных потоках излучения и больших временах релаксации (например, вследствие малой плотности) может иметь место термодинамическая неравновесность вещества и тогда к уравнениям переноса (с учетом конечности скорости света) и энергии следует добавлять уравнения химической кинетики для реакций ионизации (с учетом ионизации излучением), от степени которой зависит прозрачность вещества и теплоемкость. Эти уравнения, описывающие изменение степени ионизации единицы массы, приводят к кратности характеристики $m = \text{const}$, но не изменяют гиперболического характера системы.

IV. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ

§ 12. Рассмотрим квазистационарные решения типа бегущей волны, т. е. такие, в которых все функции зависят только от одной переменной $\xi = m - \rho_0 D t$, где $\rho_0 D = dm/dt$ — постоянная скорость движения границы. Введем оптическую толщину

$$\tau = \int_0^{\xi} \frac{1}{l\rho} d\xi$$

и система уравнений (2.6) и (2.12) примет вид (10.1) и (10.2), только вместо теплоемкости c_v следует подставлять теплоемкость c_p , так как давление p считаем постоянным. Выделим основные типы бегущих волн: безграничная область $\tau \geq 0$ (тип 1) или $\tau \leq 0$ (тип 2) и ограниченная область оптических толщин $-\tau_0 \leq \tau \leq 0$ (тип 3). Бегущие волны первых двух типов изучались раньше в задаче о структуре ударных волн [5-7] и о волне охлаждения [8]. Ниже задача типа 3 изучается применительно к сублимации поверхности потоком излучения.

Введем безразмерные величины потока тепла q^0 и температуры T^0 , отнеся их к q_0 и T_0

$$q_0 q^0 = q, \quad T_0 T^0 = T, \quad q_0 = \rho_0 c_p D T_0 \quad (12.1)$$

и получим из уравнений (10.1) и (10.2), опуская индексы над безразмерными величинами

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} = q + \alpha T^3 \frac{dT}{d\tau}, \quad q - T = \beta - 1 \quad (12.2)$$

$$\alpha = \frac{8\sigma T_0^4}{q_0} = \frac{8\sigma T_0^4}{\rho_0 c_p D T_0}, \quad \beta - 1 = \frac{C}{q_0}, \quad q_0 = \rho_0 c_p D T_0 \quad (12.3)$$

Подставляя второе из уравнений (12.2) в первое, получим одно уравнение 2-го порядка для T

$$\frac{d^2 T}{d\tau^2} = \beta + T - 1 + \alpha T^3 \frac{dT}{d\tau} \quad (12.4)$$

Порядок записанного выше уравнения можно понизить, введя $\varphi = \alpha dT/d\tau$. Тогда получим

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{d\varphi}{dT} = \frac{\beta + T - 1}{\varphi} + T^3 = f(\varphi, T) \quad (12.5)$$

При $\alpha \gg 1$ это уравнение представляет собой элементарный пример уравнения с малым параметром при производной. Рассмотрим вопрос о том, стремится ли при $\alpha \rightarrow \infty$ решение уравнения (12.5) к решению вырожденного уравнения

$$\varphi_0 = -\frac{\beta + T - 1}{T^3} \quad (12.6)$$

Согласно (12.5)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_T = -\frac{\beta + T - 1}{\varphi^2} \quad (12.7)$$

Легко видеть, что всюду, где $T + \beta - 1 > 0$, производная $\partial f/\partial \varphi$ отрицательна, т. е. корень φ_0 вырожденного уравнения устойчив [23].

Проведем замену независимой переменной в граничных условиях (2.10)

$$2F^{\pm} = -\frac{dq}{d\tau} \pm q + 2\sigma T^4 \quad (12.8)$$

При введении безразмерных потоков $q^{\pm}$ и температур $T^{\pm}$ согласно (12.1) (индекс над безразмерными величинами опустим) и безразмерных параметров α и β по соотношениям (12.3) и нового параметра $\theta_{\pm}$ уравнения (12.8) примут вид

$$\frac{\alpha}{4}(\theta_{\pm}^4 - T^4) = -\frac{dq}{d\tau} \pm q, \quad \theta_{\pm}^4 = \frac{F^{\pm}}{\sigma T_0^4} \quad (12.9)$$

Интересно отметить, что ни в уравнения (12.2), ни в параметры (12.3), ни в граничные условия (12.9) не вошел пробег излучения. Наконец, используя 2-е из уравнений системы (12.2), перепишем (12.9) в следующем виде:

$$\frac{1}{4}\alpha^2(\theta_{\pm}^4 - T^4) = -\varphi \pm (\beta + T - 1)\alpha \quad (12.10)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнения (12.5) при заданных условиях (12.10), связывающих φ и T на границе $\xi = \xi_0$. Кроме того, должны быть заданы дополнительные условия в задаче каждого типа.

Режим, когда решение (12.5) близко к (12.6), будем называть равновесным, так как при этом поток тепла определяется по уравнению лучистой теплопроводности

$$q = -\alpha T^3 \frac{dT}{d\tau} = -\alpha T^3 \frac{dq}{d\tau} \quad (12.11)$$

В существенно неравновесном режиме справедливо уравнение

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} = q \quad (12.12)$$

решением которого является

$$q = C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} = \beta + T - 1 \quad (12.13)$$

Рассмотрим линейное уравнение, возникающее из (12.2), если предположить, что температура мало меняется вблизи значения $T_* = 1$

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} = q + \alpha \frac{dq}{d\tau} \quad (12.14)$$

Решением (12.14) также является сумма экспонент

$$q = C_1 e^{k_1 \tau} + C_2 e^{k_2 \tau} \quad (12.15)$$

где k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения

$$k_{1,2} = \frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 + 1} \quad (12.16)$$

$$\alpha \rightarrow 0, \quad k_1 \rightarrow 1 + \frac{1}{2}\alpha, \quad k_2 \rightarrow -1 + \frac{1}{2}\alpha \quad (12.17)$$

$$\alpha \rightarrow \infty, \quad k_1 \rightarrow \alpha, \quad k_2 \rightarrow -\frac{1}{\alpha} \quad (12.18)$$

Если рассматривается полубесконечная область $\tau \geq 0$ (задача типа 1) или $\tau \leq 0$ (задача типа 2), то с тем, чтобы потоки тепла на бесконечности были ограниченными, следует положить соответственно $k_1 = 0$ или $k_2 = 0$. В задаче типа 3 присутствуют обе экспоненты, так как рассматривается ограниченная область изменения τ .

В задаче типа 1 на границе $\tau = 0$ задается только входящий поток F^+ или эффективная температура излучающей поверхности θ_+ , т. е. соотношения (12.8), записанные в виде (12.9) или (12.10). Температура газа, выходящего через эту границу, не задается и поэтому между T и θ имеется разность ΔT или так называемый температурный скачок, определяемый после решения уравнений (12.2) или (12.5).

Температурный скачок хорошо известен в задачах аэродинамики разреженных газов и переноса нейтронов, с которыми задача переноса тепла излучением имеет то общее, что рассматриваемые уравнения являются различными вариантами кинетического уравнения, а распределение величин таково, что нельзя пренебречь изменением величин на длине свободного пробега частиц.

В задаче типа 2 на границе $\tau = 0$ задается как входящий поток F^- или температура θ_- , так и температура подаваемого через границу газа T_W . Между ними также имеется скачок, если θ_- не соответствует T_W (т. е. поверхность излучает не как абсолютно черное тело, имеющее температуру T_W). Но скачок отсутствует, если $\theta_- = T_W$.

В задачах типа 3 на правой границе $\tau = 0$ скачок температуры излучателя и истинной температуры газа задается (может отсутствовать), а на левой границе $\tau = -\tau_0$ его величина зависит от решения. Если газ неподвижен, то скачок имеет место как на левой границе $\tau = -\tau_0$, так и на правой $\tau = 0$, так как обе являются характеристиками $m = \text{const}$.

§ 13. Рассмотрим задачу типа 1 о профиле температуры у проникаемого поршня — «решетки» с эффективной температурой излучения θ_+ , вдвигаемого с постоянной скоростью D в газ с температурой T_∞ и плотностью ρ_∞ . За «решеткой» натекающий газ мгновенно убирается в перпендикулярном направлении» (в слое малой оптической толщины) или становится настолько прозрачным, что не излучает. Положим размерные константы, входящие в (12.1), равными

$$T_0 = T_\infty, \quad q_0 = \rho_\infty c_p D T_\infty, \quad \alpha = \frac{8\sigma T_\infty^4}{\rho_\infty c_p D T_\infty} \quad (13.1)$$

Так как $T \rightarrow T_\infty$, $F^- \rightarrow \sigma T_\infty^4$ при $\tau \rightarrow \infty$ и так как при этом согласно (12.8) $q = -dq/d\tau$, то $dT/d\tau = dq/d\tau = 0$ и $q = 0$, т. е.

$$\tau = \infty, \quad \varphi = 0, \quad T = 1; \quad \beta = 0 \quad (13.2)$$

Из рассмотрения (12.5) видно, что эта точка (φ, T) является особой. Решая вблизи нее линейное уравнение (12.14), находим, что

$$q = C_2 \exp(k_2 \tau) = T - 1 \quad (13.3)$$

$$\varphi = \alpha \frac{dT}{d\tau} = k_2 \alpha C_2 \exp(k_2 \tau) = k_2 \alpha (T - 1) \quad (13.4)$$

где k_2 находится из (12.16). Примем, что изменения температуры малы вплоть до границы, определяемой соотношением (12.10), где следует выбирать знак плюс и положить $\beta = 0$. Подставляя (13.4) в (12.10), получим, что граничное значение температуры T_e может быть найдено из следующего соотношения

$$\frac{1}{4} \alpha (\theta_+^4 - T_e^4) = (T_e - 1)(1 - k_2) \quad (13.5)$$

Учитывая (12.17) и полагая $T_e^4 \approx 1 + 4(T_e - 1)$, получим

$$(1 + \frac{1}{4} \alpha) (1 - T_e) = \frac{1}{8} \alpha (1 - \theta_+^4) \quad (13.6)$$

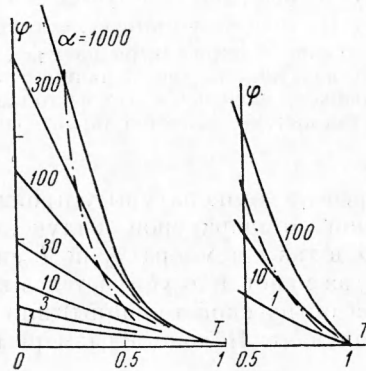
Таким образом, при $\alpha \ll 1$ отклонение граничной температуры от 1 невелико и ширина зоны, в которой оно имеет место $\Delta\tau \approx 1$. Если $\alpha \gg 1$, то равновесное уравнение (12.6) справедливо вплоть до границы. Подставляя (12.6) в (12.10), получим

$$\frac{1}{4} \alpha (\theta_+^4 - T_e^4) = (T_e - 1) \left(\frac{1}{\alpha T_e^3} + 1 \right) \quad (13.7)$$

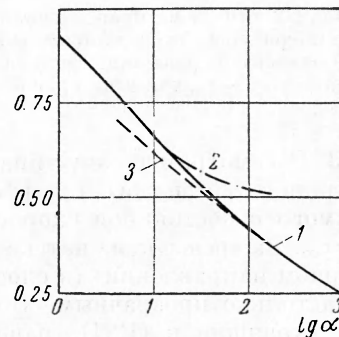
или

$$T_e^4 = \frac{4}{\alpha} (1 - T_e) \quad \text{при } \theta_+ = 0, \quad \alpha T_e^3 \ll 1 \quad (13.8)$$

На фиг. 12 построена зависимость φ от T для различных значений α , полученная в результате численного решения уравнения (12.5), и отмечены граничные значения φ_e и T_e при $\theta_+ = 0$. На фиг. 13 нанесены значения безразмерной температуры на границе T_e в зависимости от параметра α по результатам численного решения (кривая 1) и по приближенным формулам (13.6) (кривая 2) и (13.8) (кривая 3) при $\theta_+ = 0$.



Фиг. 12



Фиг. 13

Из фиг. 13 следует, что размерный поток тепла $q_e = q_e^0 \rho_\infty c_p D T_\infty$ всегда меньше, чем $\rho_\infty c_p D T_\infty$, но при $\sigma T_\infty^4 \gg \rho_\infty c_p D T_\infty$ безразмерный поток q_e^0 близок к единице. Таким образом, в этом случае скачка температуры почти нет. В случае, когда $\sigma T_\infty^4 \ll \rho_\infty c_p D T_\infty$, поток близок к σT_∞^4 , граничное значение T_e мало отличается от T_∞ и $q_e = 1 - T_e \ll 1$.

Выше скорость D считалась произвольной. Заметим, что ряд дополнительных соображений о резкой нелинейной зависимости пробега излучения от температуры (экспоненциальный рост при $T < T_s^*$) и отношении его величины к размерам охлаждаемой области привел авторов [8] к возможности задать граничную температуру T_e и, следовательно, скорость движения границы «волны охлаждения» D (отобрать значение параметра α) в приближенной постановке задачи об охлаждении конечного объема.

§ 14. Рассмотрим задачу типа 2. Ее можно применить к упрощенной схеме горения твердого топлива при передаче тепла только излучением. Пусть скорость реакции в газовой фазе бесконечна, т. е. в результате мгновенного выделения тепла газ нагревается до температуры $T_0 = T_s + Q_s/c_p$. Здесь T_s — температура сублимации; Q_s — теплота сублимации, т. е. затраты тепла на испарение, а Q_r — суммарная теплота химических реакций. Если скорость реакции настолько велика, что зона реакции мала по сравнению с пробегом излучения, т. е. ее оптическая толщина $\Delta\tau \ll 1$, то эта зона практически не светит и не поглощает. Пусть граница (твердая поверхность) пары движется в результате сублимации потоком излучения (реакциями в твердой фазе пренебрегаем) согласно (2.7). Следовательно, β является вполне определенным параметром

$$\beta = \frac{Q_s}{c_p T_0} = \frac{Q_s}{c_p T_s} \frac{1}{1 + Q_r/c_p T_s}$$

что позволяет найти скорость горения.

Выше был введен целый ряд упрощающих предположений, в частности, отсутствие обычной молекулярной теплопроводности, диффузии, бесконечная скорость реакции в газовой фазе и нулевая в твердой. Если ввести конечную скорость горения в газовой фазе, то получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, но они выходят за рамки уравнения (10.1). Заметим, что при одномерном горении в сравнительно тонкой трубе может быть существенной двумерность высвечивания.

§ 15. Рассмотрим задачу типа 3. Пусть твердая поверхность с температурой сублимации T_s и теплотой сублимации Q_s , плотностью ρ_0 испаряется под действием излучения с горячей поверхности, поток излучения с которой соответствует температуре θ_+ и у которой газ, движущийся от сублимирующей поверхности, мгновенно (в слое $\tau \ll 1$) убирается «в перпендикулярном направлении». Выберем указанные параметры за характерные в (12.1) и (12.3). Тогда

$$q_W = \beta = \frac{Q_s}{c_p T_s}, \quad T_W = T_s, \quad \alpha = \frac{8\sigma T_W^4}{\rho_W c_p D T_\infty} = \frac{8\sigma T_W^4}{\rho_W D Q_s} \beta \quad (15.1)$$

Считая, что поверхность разрыва сублимации излучает как абсолютно черное тело с температурой T_s , получим граничное условие для уравнения (12.6)

$$q_W = -\frac{dq}{d\tau}\bigg|_W, \quad T_W = 1, \quad \tau = 0 \quad (15.2)$$

$$\varphi_W = -\beta\alpha, \quad T_W = 1, \quad \tau = 0 \quad (15.3)$$

Поскольку интегрировать уравнения будем при фиксированных α и β , то второе граничное условие (12.10) будет служить для отыскания соответствующего θ_+ и $\tau = -\tau_0$.

Обращаясь к решению (12.15) линейного уравнения (12.14), получим, что соотношение между C_1 и C_2 находится из граничного условия (15.2)

$$C_1(1 + k_1) + C_2(1 + k_2) = 0 \quad (15.4)$$

Легко видеть, что $C_1(2 + \frac{1}{2}\alpha) + \frac{1}{2}C_2\alpha = 0$, согласно (12.17) при $\alpha \ll 1$, т. е. $C_1 \rightarrow 0$.

Значение $\alpha \ll 1$ соответствует случаям, когда собственным излучением сублимирующей поверхности можно пренебречь. Если можно пренебречь и собственным излучением газа, т. е. $\alpha T^3 \ll 1$, то уравнение (12.5) примет вид

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{d\varphi}{dT} = \frac{\beta + T - 1}{\varphi} \quad (15.5)$$

и его решением при условии (15.3) является

$$\varphi = -\alpha(\beta + T - 1) \quad (15.6)$$

Откуда находим распределение потока тепла и температуры

$$q = \beta + T - 1 = \exp(-\tau) \quad (15.7)$$

Подставляя граничные условия (15.3) в уравнение (12.5), получим, что

$$\frac{d\varphi}{dT}\bigg|_W = \alpha^2 \left(-\frac{1}{\alpha} + 1\right) = \alpha^2 - \alpha \quad (15.8)$$

в то время как по (12.6)

$$\frac{d\varphi}{dT} = \frac{3(\beta - 1) + 2T}{T^4}, \quad \frac{d\varphi}{dT}\bigg|_W = 3\beta - 1 \quad (15.9)$$

т. е. вблизи сублимирующей поверхности нельзя пренебречь членом $d\varphi/dT$ и решение будет сильно отличаться от решения вырожденного уравнения (12.6). Но при $\alpha \ll 1$ зона отличия невелика и при определении профиля температуры и потока тепла можно использовать (12.6).

Подставляя (15.6) и (12.6) в граничное условие (12.10), найдем связь θ_+ , α и граничной температуры газа у горячей поверхности T_e в существенно равновесном

$$\theta_+ - T_e^4 = \frac{4}{\alpha} (\beta + T_e - 1), \quad T_e \approx \theta_+ \quad (15.10)$$

и существенно неравновесном режимах

$$\theta_+^4 - T_e^4 = \frac{4}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha T_e^2} + 1\right) (\beta + T_e - 1), \quad T_e \ll \theta_+, \quad (15.11)$$

Если изучение с поверхности сублимирующего тела близко к нулю ($\theta_- = 0$), то вместо граничного условия (15.3) получим условие

$$\varphi_W = -\alpha\beta + \frac{1}{4}\alpha^2 \quad (15.12)$$

При $\alpha \ll 1$ условие (15.3) и (15.12) различаются слабо.

На фиг. 14 построено распределение температуры T по оптической толщине τ при температуре излучающей поверхности $\theta_+ = 15$ и $\beta = 10$. Отметим, что по (15.3) вблизи поверхности

$$dT/d\tau = \alpha^{-1}\varphi_W = \beta$$

т. е. всегда вблизи сублимирующей поверхности имеет место сравнительно холодная зона. На фиг. 14 отмечены эффективные температуры излучения на сублимирующей поверхности θ_W определяемой по потоку тепла на поверхности

$$q_W = \sigma T_0^4 \theta_W^4$$

(с «температурой» θ_W излучение «просвечивает» сквозь слой паров).

На фиг. 15 представлена зависимость эффективной температуры по потоку тепла на поверхности θ_W от оптической толщины экранирующего слоя паров τ_0 при различных температурах излучателя θ_+ и параметре $\beta = 10$.

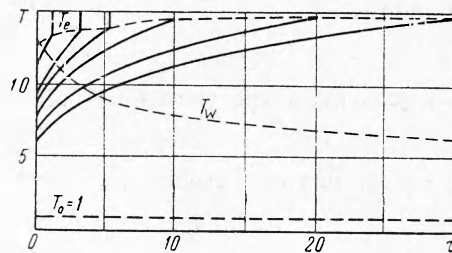
Сравним получающееся распределение температуры в рассматриваемой задаче с учетом оттекания газа от сублимирующей поверхности с распределением температуры в



Фиг. 14



Фиг. 15



Фиг. 16

задаче о стационарном профиле температуры в массе газа, заключенной между двумя абсолютно черными пластинами с температурами θ_+ (горячая поверхность) и θ_- . Поскольку распределение стационарно, то поток тепла постоянен и уравнение (10.2) переходит в

$$q_0 = -2\sigma T_0^4 \frac{d(T^4)}{d\tau} \quad (15.13)$$

а граничное условие (12.9) в

$$2\theta_{\pm}^4 = \pm \frac{q_0}{2\sigma T_0^4} + 2T^4 \quad (15.14)$$

Отсюда находим связь потока тепла с температурами пластин и оптической толщиной газа между ними и температуру газа у горячей пластины T_e (T_W — температура у холодной)

$$q_0 = \frac{-\sigma T_0^4 (\theta_-^4 - \theta_+^4)}{1 + 1/2\tau_0}, \quad \theta_-^4 = T_e^4 + \frac{\theta_-^4 - \theta_+^4}{2 + \tau_0} \quad (15.15)$$

$$q_0 \tau_0 = 2\sigma T_0^4 (T_e^4 - T_W^4), \quad q_0 = -2\sigma T_0^4 (\theta_-^4 - T_e^4) = -2\sigma T_0^4 (\theta_+^4 - T_W^4)$$

На фиг. 16 представлено распределение температуры при $\theta_+ = 15$, $\theta_- = 1$ согласно (15.13). Легко видеть, что вблизи холодной поверхности имеется скачок температуры: $T_w \neq \theta_-$ и профиль температуры сильно отличается от профиля, изображенного на фиг. 14, где температура непрерывно возрастает от значения $T = T_w = T_s$. При больших температурах также имеется отличие, так как в случае движущегося газа поток тепла при удалении от сублимирующей поверхности возрастает, а не постоянен.

На простое приведенное выше решение о стационарном профиле температур нам указали А. С. Компанеец и Б. В. Новожилов.

Приношу глубокую благодарность С. А. Христиановичу за предоставление темы и интерес к работе; А. А. Милютину за большую помощь на всех этапах работы; Г. Г. Виленской, К. Е. Губкину, А. Т. Онуфриеву, О. С. Рыжову за помощь и стимулирующие дискуссии.

Поступила
3 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии. ИЛ, 1953.
2. Унзольд А. Физика звездных атмосфер. ИЛ, 1949.
3. Амбарцумян В. А., Мустель Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В. Теоретическая астрофизика, Гостехиздат, 1952.
4. Зельдович Я. Б. и Райзер Ю. П. Ударные волны большой амплитуды в газах. УФН, 1957, т. XIII, вып. 3, 613—641.
5. Зельдович Я. Б. Ударные волны большой амплитуды в воздухе, ЖЭТФ, 1957, т. 32, вып. 5, 1126—1135.
6. Райзер Ю. П. О структуре фронта сильных ударных волн, ЖЭТФ, 1957, т. 32, вып. 6, 1528—1535.
7. Райзер Ю. П. О яркости сильных ударных волн. ЖЭТФ, 1957, т. 33, вып. 1 (7), 101—109.
8. Зельдович Я. Б., Компанеец А. С., Райзер Ю. П. Об охлаждении воздуха излучением (I). ЖЭТФ, 1958, т. 34, вып. 5, 1278—1287. (II) ЖЭТФ, 1958, т. 34, вып. 6, 1447—1454.
9. Бабиков В. В., Коган В. И. Лучистая теплоотдача высокотемпературной плазмы. Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т. III, Изд. АН СССР, 1958.
10. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. Гостехиздат, 1956.
11. Франк-Каменецкий Д. А. Физические процессы внутри звезд, Физматгиз, 1959.
12. Немчинов И. В. Учет влияния диссоциации и ионизации воздуха в некоторых задачах газовой динамики. Труды МФТИ, вып. 1, Оборонгиз, 1958.
13. Селиванов В. В. и Шляпникох И. Я. Термодинамические свойства воздуха при термической ионизации и ударная волна. ЖФХ, 1958, т. XXXII, вып. 3, 670—678.
14. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, 1951.
15. Курант Р. и Фридрикс К. Сверхзвуковые течения и ударные волны. ИЛ, 1950.
16. Райзер Ю. П. Простой метод вычисления средних пробегов излучения в ионизованных газах при высоких температурах. ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 4 (10), 1079—1083.
17. Зельдович Я. Б. и Компанеец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сборник, посвященный 70-летию акад. Иоффе. Изд. АН СССР, 1950.
18. Баренблатт Г. И. О неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1, 67—78.
19. Биркгоф Г. Гидродинамика, ИЛ, 1954.
20. Баренблатт Г. И. О приближенном решении задач о нестационарной фильтрации в пористой среде. ПММ, 1954, т. 18, вып. 3, 351—370.
21. Андрианкин Э. И. Распространение неавтономной тепловой волны. ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 2 (8), 428—432.
22. Баренблатт Г. И. О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя. ПММ, 1954, т. XVIII, 409—414.
23. Эльсгольц Л. Э. Качественные методы в математическом анализе. Гостехиздат, 1955.