$\mathcal{AMS}$ subject classification: 49J20, 65N30

Апостериорные оценки ошибки смешанного метода конечных элементов для эллиптических задач оптимального управления с интегральным ограничением*

Т. Хоу

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin 132013, China

E-mail: 270854140@qq.com

Хоу Т. Апостериорные оценки ошибки смешанного метода конечных элементов для эллиптических задач оптимального управления с интегральным ограничением // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 3. — С. 333–343.

В данной статье мы исследуем апостериорные оценки ошибки смешанного метода конечных элементов для эллиптических задач оптимального управления с интегральным ограничением. Градиент нашего метода принадлежит пространству квадратично-интегрируемых функций, а не классическому $H(\mathrm{div};\Omega)$ пространству. Состояние и сопряженное состояние аппроксимируются парой P_0^2-P_1 (скорость–давление), а переменная управления аппроксимируется кусочно-постоянными функциями. С использованием метода двойственного аргумента и энергетического метода мы получим апостериорные оценки остаточной ошибки для всех переменных.

DOI: 10.15372/SJNM20180307

Ключевые слова: *эллиптические уравнения, задачи оптимального управления, апостериорные оценки ошибки, смешанные методы конечных элементов.*

Hou T. Mixed methods for optimal control problems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 3. — P. 333–343.

In this paper, we investigate a posteriori error estimates of a mixed finite element method for elliptic optimal control problems with an integral constraint. The gradient for our method belongs to the square integrable space instead of the classical $H(\mathrm{div};\Omega)$ space. The state and co-state are approximated by the P_0^2-P_1 (velocity–pressure) pair, and the control variable is approximated by piecewise constant functions. Using a duality argument method and an energy method, we derive residual a posteriori error estimates for all variables.

Keywords: *elliptic equations, optimal control problems, a posteriori error estimates, a mixed finite element method.*

1. Введение

Задачи оптимального управления с дифференциальными уравнениями в частных производных широко исследуются и применяются в науке и технике для численного

*Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (проекты № 11601014, № 11626037, № 11526036), Научного постдокторского фонда Китая (проект № 2016M601359), Программы научно-технического развития провинции Цзилинь (проекты № 20160520108JH, № 20170101037JC), Отдела образования провинции Цзилинь (проект научно-технических исследований № 201646) и специального финансирования для молодых преподавателей университета Бэйхуа.

моделирования. Было разработано много численных методов для решения таких задач оптимального управления. Среди этих методов стандартная конечно-элементная аппроксимация задач оптимального управления широко изучена в литературе. Здесь невозможно дать даже очень краткий обзор. Проведены исследования по сходимости и сверхсходимости конечно-элементных аппроксимаций задач оптимального управления (см. [1, 6, 9, 15, 16, 25–29] по стандартному методу конечных элементов, [4, 5, 7] по смешанному методу конечных элементов Равьяра–Тома и [11] по положительно определенному смешанному методу конечных элементов с расщеплением). Систематическое использование методов конечных элементов для дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) и задач оптимального управления рассматривается, например, в [3, 18].

Адаптивная конечно-элементная аппроксимация — одно из наиболее важных средств увеличения точности и эффективности конечно-элементной дискретизации. Она гарантирует высокую плотность узлов на определенном участке заданной области, где аппроксимация решения затруднена. В основе любого адаптивного метода конечных элементов лежит апостериорная оценка (индикатор) ошибки. В последние годы использование адаптивного метода конечных элементов широко исследовалось в оптимальном управлении [2, 13, 14, 19–24, 32, 33]. Точные апостериорные оценки ошибки метода конечных элементов для класса распределенных эллиптических задач оптимального управления получены в [19]. Апостериорные оценки ошибки восстановления для конечно-элементной аппроксимации были получены для эллиптических задач оптимального управления [20]. В [22] Ли и Ян изучали апостериорные оценки ошибки метода конечных элементов для эллиптической граничной задачи управления. Они рассматривали апостериорные оценки ошибки для задач оптимального управления с уравнениями Стокса [23] и обсуждали апостериорные оценки ошибки полностью дискретного метода конечных элементов для параболических задач оптимального управления. Обратный метод Эйлера и разрывный метод Галеркина использовались для временной дискретизации в [24] и [21] соответственно. В [2] авторы проанализировали конечно-элементную дискретизацию Галеркина для класса ограниченных задач оптимального управления с интегральными или интегро-дифференциальными уравнениями Фредгольма. Анализ, проведенный в этой статье, был связан с получением априорных и апостериорных оценок ошибки для схем аппроксимации. В [32] авторы получили эквивалентные апостериорные оценки ошибки с нижними и верхними границами конечно-элементной аппроксимации задачи оптимального управления с ограничением с параболическим интегро-дифференциальным уравнением. В [14] автором разработан смешанный непрерывный метод конечных элементов для линейных параболических задач оптимального управления и получены априорные и апостериорные оценки ошибки.

Недавно Чен с соавторами [8] разработали новую смешанную конечно-элементную схему и использовали конечно-элементную пару P_0^2-P_1 для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Градиент первичной переменной этого метода принадлежит пространству квадратично-интегрируемых функций, а не классическому $H(\mathrm{div};\Omega)$ пространству. С использованием этого метода мы можем получить две аппроксимации для градиента первичной переменной y: численную аппроксимацию решения $\boldsymbol{p}_h$ и производную аппроксимации решения y_h.

Цель данной статьи — получить апостериорные оценки ошибки новой смешанной конечно-элементной аппроксимации для эллиптических задач управления. Нас интересуют следующие линейные задачи оптимального управления для переменных состояния $\boldsymbol{p}$, y и управления u с интегральным ограничением:

$$\min_{u\in U_{\mathrm{ad}}}\left\{\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_d\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|y-y_d\right\|^2+\frac{\nu}{2}\left\|u\right\|^2\right\}, \tag{1.1}$$

с уравнением состояния

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla y)=f+u,\quad x\in\Omega, \tag{1.2}$$

которое может быть записано как система первого порядка:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{p}=f+u,\quad \boldsymbol{p}=-A\nabla y,\quad x\in\Omega, \tag{1.3}$$

и граничное условие имеет вид

$$y=0,\quad x\in\partial\Omega, \tag{1.4}$$

где Ω — многоугольная область. Обозначим через U_{ad} допустимое множество для переменной управления, которое определяется как

$$U_{\mathrm{ad}}=\left\{u\in L^2(\Omega):\int_\Omega u\,dx\geq 0\right\}.$$

Предположим, что $y_d\in H^1(\Omega)$, $\boldsymbol{p}_d\in\left(H^1(\Omega)\right)^2$ и ν — фиксированное положительное число. Коэффициент $A(x)=(a_{ij}(x))$ является симметрической матричной функцией с $a_{ij}(x)\in W^{1,\infty}(\Omega)$, удовлетворяющей условию эллиптичности

$$a_*|\xi|^2\leq\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq a^*|\xi|^2\quad\forall\,(\xi,x)\in\mathbb{R}^2\times\bar{\Omega},\quad 0<a_*<a^*.$$

Статья построена следующим образом. В пункте 2 будет построена смешанная конечно-элементная аппроксимация для задачи оптимального управления (1.1)–(1.4) и представлены эквивалентные условия оптимальности. Основные результаты данной статьи содержатся в п. 3, где с использованием метода двойственного аргумента и энергетического метода будут получены апостериорные оценки остаточной ошибки для всех переменных. В п. 4 дается краткий обзор полученных результатов и приводятся некоторые возможные будущие их обобщения.

В данной статье мы используем стандартное обозначение $W^{m,p}(\Omega)$ для пространств Соболева на Ω с нормой $\|\cdot\|_{m,p}$, задаваемой путем

$$\|v\|_{m,p}^p=\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

и полунормой $|\cdot|_{m,p}$, задаваемой как

$$|v|_{m,p}^p=\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Положим $W_0^{m,p}(\Omega)=\left\{v\in W^{m,p}(\Omega):v\,|_{\partial\Omega}=0\right\}$. Для $p=2$ обозначим $H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)=W_0^{m,2}(\Omega)$ и $\|\cdot\|_m=\|\cdot\|_{m,2}$, $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{0,2}$. Кроме того, C обозначает общую положительную постоянную, не зависящую от h, где h — пространственный размер сетки для дискретизации управления и состояния.

2. Смешанные методы для задач оптимального управления

В этом пункте мы построим схему смешанной конечно-элементной аппроксимации задачи управления (1.1)–(1.4).

Пусть

$$\boldsymbol{V} = \left(L^2(\Omega)\right)^2 \quad \text{и} \quad W = H_0^1(\Omega).$$

Как в [8], для (1.3) получим следующую вариационную формулировку:

$$-\,(\boldsymbol{p}, \nabla w) = (f + u, w) \quad \forall\, w \in W,$$
$$(A^{-1}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) + (\nabla y, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Теперь приведем (1.1)–(1.4) к следующей слабой форме: найти $(\boldsymbol{p}, y, u) \in \boldsymbol{V} \times W \times U_{\rm ad}$ так, что

$$\min_{u \in U_{\rm ad}} \left\{ \frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_d\|^2 + \frac{1}{2}\,\|y - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2}\,\|u\|^2 \right\}, \tag{2.1}$$

$$-\,(\boldsymbol{p}, \nabla w) = (f + u, w) \quad \forall\, w \in W, \tag{2.2}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) + (\nabla y, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}. \tag{2.3}$$

Поскольку целевой функционал выпуклый, из [18] следует, что задача оптимального управления (2.1)–(2.3) имеет единственное решение $(\boldsymbol{p}, y, u)$, и что триплет $(\boldsymbol{p}, y, u)$ является решением (2.1)–(2.3), если и только если имеется сопряженное состояние $(\boldsymbol{q}, z) \in \boldsymbol{V} \times W$ такое, что $(\boldsymbol{p}, y, \boldsymbol{q}, z, u)$ удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$-(\boldsymbol{p}, \nabla w) = (f + u, w) \quad \forall\, w \in W, \tag{2.4}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) + (\nabla y, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \tag{2.5}$$

$$(\boldsymbol{q}, \nabla w) = (y - y_d, w) \quad \forall\, w \in W, \tag{2.6}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) - (\nabla z, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_d, \boldsymbol{v}) \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \tag{2.7}$$

$$(\nu u + z, \tilde{u} - u) \ge 0 \quad \forall\, \tilde{u} \in U_{\rm ad}\,. \tag{2.8}$$

В [10] приведено выражение для переменной управления. Здесь мы используем этот же метод для получения следующего оператора:

$$u = \frac{\max\{0, \bar{z}\} - z}{\nu}\,, \tag{2.9}$$

где $\bar{z} = \int_\Omega z \big/ \int_\Omega 1$ обозначает интегральное усреднение функции z на Ω.

Пусть $\mathcal{T}_h$ обозначает регулярную триангуляцию области Ω, h_τ — диаметр τ и $h = \max h_\tau$. Пусть $\boldsymbol{V}_h \times W_h \subset \boldsymbol{V} \times W$ определяется конечно-элементной парой P_0^2-P_1 [8, 31]:

$$\boldsymbol{V}_h = \left\{\boldsymbol{v}_h = (\boldsymbol{v}_{1h}, \boldsymbol{v}_{2h}) \in \boldsymbol{V} \mid \boldsymbol{v}_{1h}, \boldsymbol{v}_{2h} \in P_0(\tau) \quad \forall\, \tau \in \mathcal{T}_h\right\},$$
$$W_h = \left\{w_h \in C^0(\Omega) \cap W \mid w_h \in P_1(\tau) \quad \forall\, \tau \in \mathcal{T}_h\right\}.$$

Аппроксимированное пространство управления задается следующим образом:

$$U_h := \left\{\tilde{u}_h \in U_{\rm ad} \;:\; \forall\, \tau \in \mathcal{T}_h,\ \tilde{u}_h\,|_\tau = \text{const}\right\}.$$

Прежде чем задать новую смешанную конечно-элементную схему, введем три проекционных оператора. Сначала определим стандартную эллиптическую проекцию [3] $P_h : W \to W_h$, удовлетворяющую для любого $\phi \in W$

$$\big(A\nabla(\phi - P_h\phi), \nabla w_h\big) = 0 \quad \forall\, w_h \in W_h, \tag{2.10}$$

$$\|\phi - P_h\phi\|_s \le Ch^{2-s}\|\phi\|_2 \quad \forall\, \phi \in H^s(\Omega),\ s = 0, 1. \tag{2.11}$$

Теперь определим стандартную L^2-проекцию $\Pi_h : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}_h$, удовлетворяющую для любого $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{V}$

$$(\boldsymbol{q} - \Pi_h\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}_h) = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h, \tag{2.12}$$

$$\|\Pi_h\boldsymbol{q}\| \le C\|\boldsymbol{q}\|, \tag{2.13}$$

$$\|\boldsymbol{q} - \Pi_h\boldsymbol{q}\| \le Ch\|\boldsymbol{q}\|_1 \quad \forall\, \boldsymbol{q} \in (H^1(\Omega))^2. \tag{2.14}$$

Наконец, определим стандартную ортогональную L^2-проекцию $Q_h : U_{\mathrm{ad}} \to U_h$, удовлетворяющую для любого $u \in U_{\mathrm{ad}}$

$$(u - Q_h u, \tilde{u}_h) = 0 \quad \forall\, \tilde{u}_h \in U_h. \tag{2.15}$$

Мы имеем следующее свойство аппроксимации:

$$\|u - Q_h u\|_{-s,r} \le Ch^{1+s}|u|_{1,r} \quad \forall\, u \in W^{1,r}(\Omega),\ s = 0, 1. \tag{2.16}$$

Тогда новая смешанная конечно-элементная дискретизация (2.1)–(2.3) имеет следующий вид: найти $(\boldsymbol{p}_h, y_h, u_h) \in \boldsymbol{V}_h \times W_h \times U_h$ такие, что

$$\min_{u_h \in U_h} \left\{ \frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{p}_h - \boldsymbol{p}_d\|^2 + \frac{1}{2}\,\|y_h - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2}\,\|u_h\|^2 \right\}, \tag{2.17}$$

$$-\,(\boldsymbol{p}_h, \nabla w_h) = (f + u_h, w_h) \quad \forall\, w_h \in W_h, \tag{2.18}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{v}_h) + (\nabla y_h, \boldsymbol{v}_h) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h. \tag{2.19}$$

Как и в “непрерывном” случае, приведенная выше задача оптимального управления имеет единственное решение $(\boldsymbol{p}_h, y_h, u_h)$, и триплет $(\boldsymbol{p}_h, y_h, u_h)$ является решением (2.17)–(2.19), если и только если имеется сопряженное состояние $(\boldsymbol{q}_h, z_h) \in \boldsymbol{V}_h \times W_h$ такое, что $(\boldsymbol{p}_h, y_h, \boldsymbol{q}_h, z_h, u_h)$ удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$-(\boldsymbol{p}_h, \nabla w_h) = (f + u_h, w_h) \quad \forall\, w_h \in W_h, \tag{2.20}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{v}_h) + (\nabla y_h, \boldsymbol{v}_h) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h, \tag{2.21}$$

$$(\boldsymbol{q}_h, \nabla w_h) = (y_h - y_d, w_h) \quad \forall\, w_h \in W_h, \tag{2.22}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{v}_h) - (\nabla z_h, \boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{p}_h - \boldsymbol{p}_d, \boldsymbol{v}_h) \quad \forall\, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h, \tag{2.23}$$

$$(\nu u_h + z_h, \tilde{u}_h - u_h) \ge 0 \quad \forall\, \tilde{u}_h \in U_h. \tag{2.24}$$

Для вариационного неравенства (2.24) мы получаем следующий вывод.

Лемма 2.1 [10]. *Предположим, что z_h в вариационном неравенстве* (2.24) *известно. Тогда вариационное неравенство* (2.24) *имеет следующее решение*:

$$u_h = Q_h\left(-\frac{z_h}{\nu} + \max\left\{0, \frac{\overline{z}_h}{\nu}\right\}\right), \quad \overline{z}_h = \frac{\int_\Omega z_h}{\int_\Omega 1}\,.$$

Далее в этой статье используем некоторые промежуточные переменные, определим решение состояния $\big(\boldsymbol{p}(u_h), y(u_h), \boldsymbol{q}(u_h), z(u_h)\big) \in \big(\boldsymbol{V} \times W\big)^2$, удовлетворяющее

$$-\big(\boldsymbol{p}(u_h), \nabla w\big) = (f + u_h, w) \quad \forall\, w \in W, \tag{2.25}$$

$$\big(A^{-1}\boldsymbol{p}(u_h), \boldsymbol{v}\big) + \big(\nabla y(u_h), \boldsymbol{v}\big) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \tag{2.26}$$

$$\big(\boldsymbol{q}(u_h), \nabla w\big) = \big(y(u_h) - y_d, w\big) \quad \forall\, w \in W, \tag{2.27}$$

$$\big(A^{-1}\boldsymbol{q}(u_h), \boldsymbol{v}\big) - \big(\nabla z(u_h), \boldsymbol{v}\big) = \big(\boldsymbol{p}(u_h) - \boldsymbol{p}_d, \boldsymbol{v}\big) \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}. \tag{2.28}$$

3. Апостериорные оценки ошибки

В этом пункте мы обсудим апостериорные оценки остаточной ошибки для задач оптимального управления. Для получения оценок нам необходимы следующие три важные леммы.

Лемма 3.1 [3]. *Пусть π_h — стандартный оператор интерполяции Лагранжа. Для $m = 0$ или 1 и $q > \frac{1}{2}$*

$$|v - \pi_h v|_{W^{m,q}(\Omega)} \le C h^{2-m} |v|_{W^{2,q}(\Omega)}. \tag{3.1}$$

Лемма 3.2. *Пусть $\hat{\pi}_h$ — усредняющий оператор интерполяции, определенный в* [30]. *Для $m = 0$ или 1 и $1 \le q \le \infty$*

$$|v - \hat{\pi}_h v|_{W^{m,q}(\tau)} \le \sum_{\bar{\tau}' \cap \bar{\tau} \ne \emptyset} C h_\tau^{l-m} |v|_{W^{1,q}(\tau')} \quad \forall\, v \in W^{1,q}(\Omega). \tag{3.2}$$

Лемма 3.3 [17]. *Для $v \in W^{1,q}(\Omega)$ и $1 \le q < \infty$*

$$\|v\|_{W^{m,q}(\partial\tau)} \le C\Big(h_\tau^{-\frac{1}{q}} \|v\|_{W^{0,q}(\tau)} + h_\tau^{l-\frac{1}{q}} |v|_{W^{1,q}(\tau)}\Big). \tag{3.3}$$

Используя оценки устойчивости, мы получим следующую лемму.

Лемма 3.4. *Пусть $(\boldsymbol{p}, y, \boldsymbol{q}, z)$ и $\big(\boldsymbol{p}(u_h), y(u_h), \boldsymbol{q}(u_h), z(u_h)\big)$ — решения (2.4)–(2.7) и (2.25)–(2.28) соответственно. Тогда мы имеем*

$$\|y - y(u_h)\| + \|\nabla\big(y - y(u_h)\big)\| + \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}(u_h)\| \le C\|u - u_h\|, \tag{3.4}$$

$$\|z - z(u_h)\| + \|\nabla\big(z - z(u_h)\big)\| + \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}(u_h)\| \le C\|u - u_h\|. \tag{3.5}$$

Как в [10, лемма 3.2], мы можем доказать, что

Лемма 3.5. *Пусть u и u_h — решения (2.4)–(2.8) и (2.20)–(2.24) соответственно. Тогда мы имеем*

$$\|u - u_h\|^2 \le C\eta_0^2 + C\|z(u_h) - z_h\|^2, \tag{3.6}$$

где

$$\eta_0^2 = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \|z_h - Q_h z_h\|^2_{L^2(\tau)}.$$

Теперь получим основные результаты.

Теорема 3.1. *Пусть* $(u, y, \boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{q})$ *и* $(u_h, y_h, \boldsymbol{p}_h, z_h, \boldsymbol{q}_h)$ *— решения* (2.4)–(2.8) *и* (2.20)–(2.24) *соответственно. Тогда имеет место*

$$\|u - u_h\|^2 + \|\nabla(y - y_h)\|^2 + \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_h\|^2 + \|\nabla(z - z_h)\|^2 + \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_h\|^2 \le C \sum_{i=0}^{2} \eta_i^2, \tag{3.7}$$

где η_0 *определяется леммой 3.5, и*

$$\eta_1^2 = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_\tau^2 \|f + u_h\|_{L^2(\tau)}^2 + \sum_{l \in \partial \mathcal{T}_h} \int_l h_l [\boldsymbol{p}_h \cdot \mathbf{n}]^2 + \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \|A^{-1}\boldsymbol{p}_h + \nabla y_h\|_{L^2(\tau)}^2,$$
$$\eta_2^2 = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_\tau^2 \|y_h - y_d\|_{L^2(\tau)}^2 + \sum_{l \in \partial \mathcal{T}_h} \int_l h_l [\boldsymbol{q}_h \cdot \mathbf{n}]^2 + \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \|\boldsymbol{p}_h - \boldsymbol{p}_d - A^{-1}\boldsymbol{q}_h + \nabla z_h\|_{L^2(\tau)}^2,$$

где l *— ребро элемента* τ*. Скачки нормальной производной* $[\boldsymbol{v}_h \cdot \mathbf{n}]_l$ *на внутреннем ребре* l *определяются как*

$$[\boldsymbol{v}_h \cdot \mathbf{n}]_l = \big[\boldsymbol{v}_h|_{\tau_l^1} - \boldsymbol{v}_h|_{\tau_l^2}\big] \cdot \mathbf{n}\,,$$

$\mathbf{n}$ *— единичный вектор нормали на* $l = \tau_l^1 \cap \tau_l^2$*, направленный вовне* τ_l^1*, а* h_l *— максимальный диаметр ребра* l*.*

Доказательство. Пусть для простоты

$$e_y = y(u_h) - y_h, \qquad e_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}(u_h) - \boldsymbol{p}_h,$$
$$e_z = z(u_h) - z_h, \qquad e_{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}(u_h) - \boldsymbol{q}_h.$$

Из уравнений (2.25)–(2.28) и (2.20)–(2.23) легко получить следующие уравнения ошибки:

$$-(e_{\boldsymbol{p}}, \nabla w_h) = 0 \qquad \forall\, w_h \in W_h, \tag{3.8}$$
$$(A^{-1}e_{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{v}_h) + (\nabla e_y, \boldsymbol{v}_h) = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h, \tag{3.9}$$
$$(e_{\boldsymbol{q}}, \nabla w_h) = (e_y, w_h) \qquad \forall\, w_h \in W_h, \tag{3.10}$$
$$(A^{-1}e_{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{v}_h) - (\nabla e_z, \boldsymbol{v}_h) = (e_{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{v}_h) \qquad \forall\, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h. \tag{3.11}$$

Из предположения об A, а также (3.8), (3.9), (2.20), (2.21), (2.25), (2.26), (3.2), (3.3) и неравенства Коши следует, что

$$\begin{aligned}
C\|e_{\boldsymbol{p}}\|^2 &\le \big(A^{-1}\big(\boldsymbol{p}(u_h) - \boldsymbol{p}_h\big), \boldsymbol{p}(u_h) - \boldsymbol{p}_h\big) \\
&= \big(A^{-1}\big(\boldsymbol{p}(u_h) - \boldsymbol{p}_h\big), \boldsymbol{p}(u_h)\big) - \big(A^{-1}\boldsymbol{p}(u_h), \boldsymbol{p}_h\big) + \big(A^{-1}\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{p}_h\big) \\
&= \big(\nabla y(u_h), \boldsymbol{p}(u_h)\big) - \big(A^{-1}\boldsymbol{p}(u_h), \boldsymbol{p}_h\big) + \big(\nabla y(u_h), \boldsymbol{p}_h\big) - \big(\nabla y_h, \boldsymbol{p}(u_h)\big) \\
&= -\big(f + u_h, e_y\big) - \big(A^{-1}\boldsymbol{p}_h + \nabla y_h, e_{\boldsymbol{p}}\big) - \big(\boldsymbol{p}_h, \nabla e_y\big) \\
&= -\big(f + u_h, e_y - \hat{\pi}_h e_y\big) - \big(A^{-1}\boldsymbol{p}_h + \nabla y_h, e_{\boldsymbol{p}}\big) - \big(\boldsymbol{p}_h, \nabla(e_y - \hat{\pi}_h e_y)\big) \\
&= -\sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \int_\tau \big(f + u_h\big)\big(e_y - \hat{\pi}_h e_y\big) - \big(A^{-1}\boldsymbol{p}_h + \nabla y_h, e_{\boldsymbol{p}}\big) - \sum_{l \in \partial\mathcal{T}_h} \int_l [\boldsymbol{p}_h \cdot \mathbf{n}](e_y - \hat{\pi}_h e_y) \\
&\le C\|\eta_1\|^2 + \epsilon\|e_y\|_1^2 + \frac{C}{2}\|e_{\boldsymbol{p}}\|^2.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Кроме того, используя неравенство Пуанкаре и (2.26), легко увидеть, что

$$\begin{aligned}\|e_y\|_1^2 &\le C\|\nabla e_y\|^2 = C\| - A^{-1}e_{\boldsymbol p} - (A^{-1}\boldsymbol p_h + \nabla y_h)\|^2\\ &\le C\|A^{-1}\|_{0,\infty}\,\|e_{\boldsymbol p}\,\|^2 + C\|A^{-1}\boldsymbol p_h + \nabla y_h\|^2.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Для достаточно малого ϵ, используя (3.12) и (3.13), получим

$$\|e_y\|_1^2\,\|e_{\boldsymbol p}\,\|^2 \le C\|\eta_1\|^2. \tag{3.14}$$

Подобно (3.12) и (3.13) получим

$$\begin{aligned}C\|e_{\boldsymbol q}\|^2 &\le \big(A^{-1}\big(\boldsymbol q(u_h) - \boldsymbol q_h\big), \boldsymbol q(u_h) - \boldsymbol q_h\big)\\ &= \big(A^{-1}\boldsymbol q(u_h), \boldsymbol q(u_h)\big) - \big(A^{-1}\boldsymbol q_h, \boldsymbol q(u_h)\big) - (\nabla e_z, \boldsymbol q_h) - (e_{\boldsymbol p}, \boldsymbol q_h)\\ &= (y_h - y_d, e_z) - (\boldsymbol q_h, \nabla e_z) + (e_{\boldsymbol p}, e_{\boldsymbol q}) + (e_y, e_z) + \big(\boldsymbol p_h - \boldsymbol p_d + \nabla z_h - A^{-1}\boldsymbol q_h, e_{\boldsymbol q}\big)\\ &= (y_h - y_d, e_z - \hat\pi_h e_z) - \big(\boldsymbol q_h, \nabla(e_z - \hat\pi_h e_z)\big) + (e_{\boldsymbol p}, e_{\boldsymbol q}) + (e_y, e_z) +\\ &\quad\ \big(\boldsymbol p_h - \boldsymbol p_d + \nabla z_h - A^{-1}\boldsymbol q_h, e_{\boldsymbol q}\big)\\ &= \sum_{\tau\in\mathcal T_h}\int_\tau (y_h - y_d)(e_z - \hat\pi_h e_z) - \sum_{l\in\partial\mathcal T_h}\int_l [\boldsymbol q_h\cdot\mathbf n](e_z - \hat\pi_h e_z) +\\ &\quad\ \big(\boldsymbol p_h - \boldsymbol p_d + \nabla z_h - A^{-1}\boldsymbol q_h, e_{\boldsymbol q}\big) + (e_{\boldsymbol p}, e_{\boldsymbol q}) + (e_y, e_z)\\ &\le C\|\eta_2\|^2 + \epsilon\|e_z\|_1^2 + \frac{C}{2}\|e_{\boldsymbol q}\|^2 + C\|e_{\boldsymbol p}\|^2 + C\|e_y\|^2\end{aligned} \tag{3.15}$$

и

$$\begin{aligned}\|e_z\|_1^2 \le C\|\nabla e_z\|^2 &= C\|A^{-1}\boldsymbol q(u_h) - \boldsymbol p(u_h) + \boldsymbol p_d - \nabla z_h\|^2\\ &\le C\|A^{-1}\|_{0,\infty}\,\|e_{\boldsymbol q}\|^2 + C\|\boldsymbol p_h - \boldsymbol p_d + \nabla z_h - A^{-1}\boldsymbol q_h\|^2 + C\|e_{\boldsymbol p}\|^2.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Для достаточно малого ϵ, используя (3.15) и (3.16), имеем

$$\|e_z\|_1^2 + \|e_{\boldsymbol q}\|^2 \le C\big(\|\eta_1\|^2 + \|e_y\|^2 + \|e_{\boldsymbol p}\|^2\big). \tag{3.17}$$

Объединив (3.14), (3.17) и леммы 3.4 и 3.5, завершаем доказательство. □

Теперь напомним результат, полученный в работе Грисварда [12].

Лемма 3.6 [12]. *Для любой функции $F \in L^2(\Omega)$ решение ϕ уравнения*

$$-\mathrm{div}(A\nabla\phi) = F \quad \text{в } \Omega,\ \ \phi\,|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.18}$$

принадлежит $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. Кроме того, существует положительная постоянная C такая, что

$$\|\phi\|_2 \le C\|F\|. \tag{3.19}$$

Теорема 3.2. *Пусть $(u, y, \boldsymbol p, z, \boldsymbol q)$ и $(u_h, y_h, \boldsymbol p_h, z_h, \boldsymbol q_h)$ — решения (2.4)–(2.8) и (2.20)–(2.24) соответственно. Тогда мы имеем*

$$\|u - u_h\|^2 + \|y - y_h\|^2 + \|z - z_h\|^2 \le C\left(\eta_0^2 + \sum_{i=1}^{2}\hat\eta_i^2\right), \tag{3.20}$$

где η_0 определяется в лемме 3.5, и

$$\hat{\eta}_1^2 = \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} h_\tau^4 \|f+u_h\|^2_{L^2(\tau)} + \sum_{l\in\partial\mathcal{T}_h}\int_l h_l^3[\boldsymbol{p}_h\cdot\mathbf{n}]^2 + \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} h_\tau^2\|A^{-1}\boldsymbol{p}_h + \nabla y_h\|^2_{L^2(\tau)},$$

$$\hat{\eta}_2^2 = \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} h_\tau^4 \|y_h - y_d\|^2_{L^2(\tau)} + \sum_{l\in\partial\mathcal{T}_h}\int_l h_l^3[\boldsymbol{q}_h\cdot\mathbf{n}]^2 + \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} h_\tau^2\|\boldsymbol{p}_h - \boldsymbol{p}_d - A^{-1}\boldsymbol{q}_h + \nabla z_h\|^2_{L^2(\tau)}.$$

Доказательство. Сначала пусть $\phi \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ — решение (3.18) при $F = y(u_h) - y_h$. Мы видим, что

$$\begin{aligned}
\|e_y\|^2 &= (A\nabla\phi, \nabla e_y)\\
&= (A\nabla\phi, \nabla y(u_h)) - (A\nabla\phi, \nabla y_h + A^{-1}\boldsymbol{p}_h) + (\boldsymbol{p}_h, \nabla\phi)\\
&= \big(\nabla y_h + A^{-1}\boldsymbol{p}_h, \Pi_h(A\nabla\phi) - A\nabla\phi\big) + (\boldsymbol{p}_h, \nabla\phi) + (f+u_h, \phi)\\
&= \big(\nabla y_h + A^{-1}\boldsymbol{p}_h, \Pi_h(A\nabla\phi) - A\nabla\phi\big) + \big(\boldsymbol{p}_h, \nabla(\phi - \pi_h\phi)\big) + (f+u_h, \phi - \pi_h\phi)\\
&\le C\|\phi\|_2\,\hat{\eta}_1,
\end{aligned}\tag{3.21}$$

где мы использовали (3.8), (3.9), (2.20), (2.21), (2.25), (2.26), (3.1), (3.3), (2.14) и неравенство Коши.

Теперь пусть $\phi \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ — решение (3.18) при $F = z(u_h) - z_h$. Подобно (3.21) имеем

$$\begin{aligned}
\|e_z\|^2 &= (A\nabla\phi, \nabla e_z)\\
&= \big(\boldsymbol{p}_h - \boldsymbol{p}_d - A^{-1}\boldsymbol{q}_h + \nabla z_h, \Pi_h(A\nabla\phi) - A\nabla\phi\big) - (\boldsymbol{q}_h, \nabla\phi) +\\
&\quad (y_h - y_d, \phi) + (e_y, \phi) - (e_{\boldsymbol{p}}, A\nabla\phi)\\
&= (y_h - y_d, \phi - \pi_h\phi) - \big(\boldsymbol{q}_h, \nabla(\phi - \pi_h\phi)\big) - \big(\nabla y_h + A^{-1}\boldsymbol{p}_h, \Pi_h(A^2\nabla\phi) - A^2\nabla\phi\big) +\\
&\quad (e_y, \phi) + \big(e_y, \mathrm{div}(A^2\nabla\phi)\big) + \big(\boldsymbol{p}_h - \boldsymbol{p}_d - A^{-1}\boldsymbol{q}_h + \nabla z_h, \Pi_h(A\nabla\phi) - A\nabla\phi\big)\\
&\le C\|\phi\|_2\,(\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 + \|e_y\|).
\end{aligned}\tag{3.22}$$

Используя (3.19), (3.21), (3.22) и леммы 3.4 и 3.5, мы завершаем доказательство теоремы. □

4. Выводы

В данной статье мы обсуждали апостериорные оценки ошибки нового смешанного метода конечных элементов для линейной эллиптической задачи оптимального управления (1.1)–(1.4). Отметим, что градиент первичной переменной этого метода принадлежит пространству квадратично-интегрируемых функций, а не классическому пространству $H(\mathrm{div};\Omega)$. С использованием этого метода мы можем получить две аппроксимации градиента первичной переменной y: одна — численная аппроксимация решения $\boldsymbol{p}_h$, а другая — производная аппроксимации решения y_h. Представляется, что наши апостериорные оценки ошибки линейных эллиптических задач оптимального управления с использованием смешанного метода конечных элементов являются новыми. В нашей дальнейшей работе мы будем исследовать априорные и апостериорные оценки ошибки для параболических задач оптимального управления.

Литература

1. **Bonnans J.F., Casas E.** An extension of Pontryagin's principle for state-constrained optimal control of semilinear elliptic equations and variational inequalities // SIAM J. Control Optim.— 1995.— Vol. 33.— P. 274–298.
2. **Brunner H., Yan N.** Finite element methods for optimal control problems governed by integral equations and integro-differential equations // Numer. Math.— 2005.— Vol. 101.— P. 1–27.
3. **Ciarlet P.G.** The Finite Element Method for Elliptic Problems.— Amsterdam: North-Holland, 1978.
4. **Chen Y.** Superconvergence of mixed finite element methods for optimal control problems // Math. Comp.— 2008.— Vol. 77.— P. 1269–1291.
5. **Chen Y.** Superconvergence of quadratic optimal control problems by triangular mixed finite element methods // Inter. J. Numer. Meth. Eng.— 2008.— Vol. 75, № 8.— P. 881–898.
6. **Chen Y., Dai Y.** Superconvergence for optimal control problems governed by semi-linear elliptic equations // J. Sci. Comput.— 2009.— Vol. 39.— P. 206–221.
7. **Chen Y., Huang Y., Liu W.B., and Yan N.** Error estimates and superconvergence of mixed finite element methods for convex optimal control problems // J. Sci. Comput.— 2010.— Vol. 42, № 3.— P. 382–403.
8. **Chen S.C., Chen H.R.** New mixed element schemes for a second-order elliptic problem // Mathematica Numerica Sinica.— 2010.— Vol. 32, № 2.— P. 213–218.
9. **Gunzburger M.D., Hou L.S.** Finite-dimensional approximation of a class of constrained nonlinear optimal control problems // SIAM J. Control Optim.— 1996.— Vol. 34.— P. 1001–1043.
10. **Ge L., Liu W.B., and Yang D.P.** Adaptive finite element approximation for a constrained optimal control problem via multi-meshes // J. Sci. Comput.— 2009.— Vol. 41, № 2.— P. 238–255.
11. **Guo H., Fu H., and Zhang J.** A splitting positive definite mixed finite element method for elliptic optimal control problem // Appl. Math. Comp.— 2013.— Vol. 219.— P. 11178–11190.
12. **Grisvard P.** Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.— Boston-London-Melbourne: Pitman, 1985.
13. **Gong W., Yan N.** Adaptive finite element method for elliptic optimal control problems: convergence and optimality // Numer. Math.— 2017.— Vol. 135, № 4.— P. 1121–1170.
14. **Hou T., Chen Y.** Mixed discontinuous Galerkin time-stepping method for linear parabolic optimal control problems // J. Comput. Math.— 2015.— Vol. 33, № 2.— P. 158–178.
15. **Hou L., Turner J.C.** Analysis and finite element approximation of an optimal control problem in electrochemistry with current density controls // Numer. Math.— 1995.— Vol. 71.— P. 289–315.
16. **Knowles G.** Finite element approximation of parabolic time optimal control problems // SIAM J. Control Optim.— 1982.— Vol. 20.— P. 414–427.
17. **Kufner A., John O., and Fucik S.** Function Spaces.— Leiden: Nordhoff, 1977.
18. **Lions J.L.** Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations.— Berlin: Springer-Verlag, 1971.
19. **Li R., Liu W.B., Ma H., and Tang T.** Adaptive finite element approximation of elliptic optimal control problems // SIAM J. Control Optim.— 2002.— Vol. 41.— P. 1321–1349.
20. **Li R., Liu W.B., and Yan N.** A posteriori error estimates of recovery type for distributed convex optimal control problems // J. Sci. Comput.— 2002.— Vol. 41, № 5.— P. 1321–1349.

21. **Liu W., Ma H., Tang T., and Yan N.** A posteriori error estimates for discontinuous Galerkin time-stepping method for optimal control problems governed by parabolic equations // SIAM J. Numer. Anal. — 2004. — Vol. 42. — P. 1032–1061.

22. **Liu W., Yan N.** A posteriori error estimates for convex boundary control problems // SIAM J. Numer. Anal. — 2001. — Vol. 39. — P. 73–99.

23. **Liu W., Yan N.** A posteriori error estimates for control problems governed by Stokes equations // SIAM J. Numer. Anal. — 2003. — Vol. 40. — P. 1850–1869.

24. **Liu W., Yan N.** A posteriori error estimates for optimal control problems governed by parabolic equations // Numer. Math. — 2003. — Vol. 93. — P. 497–521.

25. **Meyer C., Rösch A.** Superconvergence properties of optimal control problems // SIAM J. Control Optim. — 2004. — Vol. 43, № 3. — P. 970–985.

26. **Meyer C., Rösch A.** L^∞-estimates for approximated optimal control problems // SIAM J. Control Optim. — 2005. — Vol. 44, № 5. — P. 1636–1649.

27. **Meidner D., Vexler B.** A priori error estimates for space-time finite element discretization of parabolic optimal control problems. Part I: problems without control constraints // SIAM J. Control Optim. — 2008. — Vol. 47, № 3. — P. 1150–1177.

28. **Meidner D., Vexler B.** A priori error estimates for space-time finite element discretization of parabolic optimal control problems. Part II: problems with control constraints // SIAM J. Control Optim. — 2008. — Vol. 47, № 3. — P. 1301–1329.

29. **McKnight R.S., Bosarge W.E.** The Ritz–Galerkin procedure for parabolic control problems // SIAM J. Control Optim. — 1973. — Vol. 11, № 3. — P. 510–542.

30. **Scott L.R., Zhang S.** Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions // Math. Comput. — 1990. — Vol. 54. — P. 483–493.

31. **Shi F., Yu J.P., and Li K.T.** A new stabilized mixed finite-element method for Poisson equation based on two local Gauss integrations for linear element pair // Inter. J. Comput. Math. — 2011. — Vol. 88. — P. 2293–2305.

32. **Shen W., Ge L., Yang D., and Liu W.** Sharp a posteriori error estimates for optimal control governed by parabolic integro-differential equations // J. Sci. Comput. — 2015. — Vol. 65, № 1. — P. 1–33.

33. **Xiong C., Li Y.** A posteriori error estimates for optimal distributed control governed by the evolution equations // Appl. Numer. Math. — 2011. — Vol. 61, № 2. — P. 181–200.

Поступила в редакцию 13 сентября 2017 г.,
в окончательном варианте 31 января 2018 г.