УДК 532.542.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО РУЧЕЙКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В КРУГЛЫХ ТРУБАХ В ПРИБЛИЖЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН

П. И. Гешев, А. А. Черепанов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

Проведено теоретическое исследование устойчивости вязкого ламинарного потока жидкости со свободной поверхностью в наклонных трубах. Поскольку зависимость расхода жидкости от высоты свободной поверхности не является монотонной (максимум расхода в трубах кругового сечения наблюдается при $H_* = 1{,}7R$), основное внимание уделено области $H > H_*$. Доказано существование зоны неустойчивости: сколь бы ни было малым число Рейнольдса, для него найдется уровень свободной поверхности, при превышении которого течение становится неустойчивым по отношению к одномерным возмущениям. При толщине слоя жидкости, близкой к вертикальному размеру трубы, одномерные возмущения распространяются главным образом вверх по течению (для не очень больших чисел Рейнольдса), из чего следует вывод о несуществовании стационарного режима истечения жидкости из доверху заполненной трубы с открытым концом.

Введение. В работе теоретически исследуется устойчивость вязкого ламинарного потока жидкости со свободной поверхностью в наклонных трубах. Ранее [1, 2] при расчете параметров такого течения в стационарном режиме обнаружена немонотонность поведения расхода жидкости в зависимости от высоты свободной поверхности (рис. 1). Выяснилось, что в трубах кругового сечения расход жидкости имеет максимум при толщине слоя $H = 1{,}7R$, где R — радиус трубы (кривая *2*; соотношение осей $1:1{,}0$). В трубах, имеющих сечение в форме эллипса, вытянутого в горизонтальном направлении, этот максимум выражен более отчетливо (кривая *1*; соотношение осей $1:1{,}3$). Если же сечение имеет форму эллипса, достаточно сильно растянутого по вертикали, этот максимум может вообще отсутствовать (кривая *3*; соотношение осей $1:0{,}7$). Критическое отношение осей эллипса — примерно $1:0{,}6$. Расчеты проводились различными методами граничных интегральных уравнений, в частности комплексным методом граничных элементов [3].

Такое поведение расхода жидкости качественно легко объяснить влиянием стенок трубы. Ясно, что когда жидкость занимает всю площадь сечения, стенки сильнее тормозят поток, чем при толщине слоя $H = 1{,}7R$ (для круглой трубы). Если в первом случае максимум скорости жидких частиц находится строго в центре сечения, то во втором случае он располагается вблизи свободной поверхности, следовательно, средняя скорость жидкости в этом случае больше.

Различные аспекты устойчивости двухфазных ламинарных течений в трубах исследовались, например, в работах [4–6], но вопрос о специфике течений при толщине слоя жидкости выше уровня, соответствующего максимуму ее расхода, нигде не ставился. Между тем немонотонное поведение расхода жидкости наводит на мысль о том, что течение в этой области может быть неустойчивым даже при малых числах Рейнольдса. Действительно,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00879).

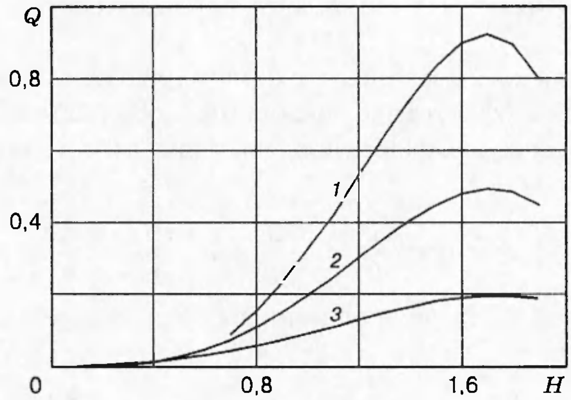

Рис. 1

предположим, что на каком-то участке трубы в результате флуктуации свободная поверхность поднимется с уровня $H = 1{,}8R$ до уровня $H = 1{,}9R$. Локальное значение расхода уменьшится по сравнению с первоначальным, что неизбежно приведет к возникновению волны сжатия, «утрамбовке» жидкости и, наконец, полной закупорке трубы, если течение останется при этом ламинарным. Таким образом, в области, где толщина слоя жидкости выше уровня, соответствующего максимуму ее расхода, любое повышение уровня свободной поверхности влечет его дальнейший рост. Любое уменьшение толщины слоя (в этой же области) ведет к локальному увеличению расхода, «отсосу» текущей выше жидкости и, следовательно, к дальнейшему понижению уровня свободной поверхности до высоты $H = 1{,}7R$.

Работа посвящена проверке этого предположения. В связи с достаточной сложностью проблемы анализ проведен в простейшем приближении длинных одномерных волн. При решении проблемы замыкания системы осредненных динамических уравнений использовался подход, уточняющий описанный в [7] метод применительно к исследованию устойчивости течений жидкости по внешней части гладкого наклонного цилиндра.

1. Вывод основных уравнений. Рассмотрим течение жидкости со свободной поверхностью в трубе кругового сечения. Используем следующие обозначения: α — угол наклона трубы к горизонту; H — максимальная высота свободной поверхности; $S(x,t)$ — площадь поперечного сечения трубы, занятая жидкостью; L — ширина свободной поверхности. Ось x направлена по течению вдоль оси трубы, y — по вертикали, z — в поперечном направлении, этим координатам соответствуют компоненты вектора скорости $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$.

Для исследования устойчивости в первом приближении применяется следующая модель:

1) волны считаются длинными ($kH \ll 1$, k — волновое число);

2) эффект смачивания не учитывается;

3) волны считаются одномерными: $H(x,y,z,t) \equiv H(x,t)$, $dS\,(x,t) \equiv L(H)\,dH$;

4) поскольку основное внимание уделяется области $H > 1{,}6R$, все параметры подбираются наиболее соответствующими именно этому участку.

Для получения системы динамических уравнений исходными служат уравнение Навье — Стокса для продольной компоненты скорости и уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u + g\sin\alpha, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{1.1}$$

Здесь ν — кинематическая вязкость; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения.

Граничными условиями для компонент скорости являются условия прилипания и непротекания на стенке трубы, отсутствие трения на свободной поверхности ($\partial u/\partial n = 0$), а также кинематическое условие на свободной поверхности для вертикальной компоненты скорости

$$v_H \equiv \frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} + u_H \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Осреднением уравнений (1.1) по площади поперечного сечения с учетом граничных условий получаем систему

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\int\!\!\int \frac{\partial p}{\partial x} dS = \oint \nu \frac{\partial u}{\partial n} dl + Sg\sin\alpha, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} + L\frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь через Q и Q_2 обозначены удельные потоки массы и импульса:

$$Q = \int\!\!\int u\,dy\,dz, \qquad Q_2 = \int\!\!\int u^2\,dy\,dz.$$

Возникает проблема замыкания: необходимо выразить силу трения, осредненный градиент давления и поток импульса через S и Q. Согласно [7] для замыкания будем использовать гидростатическое приближение (для давления) и квазистационарное (для трения и потока импульса), применимые для достаточно длинных волн:

$$Q_2 = \gamma \frac{Q^2}{S}; \tag{1.3}$$

$$\oint \nu \frac{\partial u}{\partial n}\,dl = -\beta_1 \nu \frac{Q}{S}; \tag{1.4}$$

$$p = p_0 + \rho g \cos\alpha\,(H - R - y) - \sigma \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \tag{1.5}$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения; γ и β_1 считаются безразмерными константами. Выражение (1.5) получено в гидростатическом приближении из уравнения Навье — Стокса для вертикальной компоненты скорости. Слагаемое, описывающее поверхностное натяжение вдоль оси x, в данной модели имеет 2-й порядок малости, но оставлено в формуле для возможности прогнозировать характер изменения решения при увеличении kH до величин 1-го порядка.

Как следует из таблицы, гипотеза (1.4) является не вполне удовлетворительной, так как β_1 можно считать постоянной лишь в диапазоне $0{,}4R < H < 1{,}6R$, а вне его β_1 изменяется на $7 \div 15\,\%$ при изменении высоты на $0{,}1R$. Можно ли исправить соответствующую гипотезу замыкания так, чтобы этот параметр, характеризующий отношение силы трения к расходу жидкости, вел себя более консервативно?

Вывести соотношение, применимое во всем диапазоне высот от 0 до $2R$, сложно из-за того, что с повышением высоты свободной поверхности ключевые параметры ведут себя существенно по-разному. Так, площадь сечения монотонно возрастает, а L и Q на определенной высоте принимают максимальные значения, после чего начинают спадать, причем L меняется от 0 (при $H = 0$ и $H = 2R$) до $2R$ (при $H = R$).

Однако можно предложить метод «консервации» константы β на том участке, который представляет наибольший интерес. Введем параметр $\beta' = \beta_1 A^\mu$ ($A = S/LH$, μ — некоторое действительное число). Выбором μ можно добиться того, чтобы на интересующем нас интервале высот заполнения линейная комбинация β' и β_1 была близка к константе. Так, на участке $1{,}6R < H < 2R$ величины β_1 и $\beta_2 = \beta_1/A$ ведут себя противоположным

H_0	Q_0	γ	β_1	β_2	β_3	f_1	ζ
0,10	0,0001	2,322	25,10	37,26	32,67	0,995	−2,96
0,20	0,0014	1,384	19,66	28,86	25,39	0,989	−0,17
0,30	0,0052	1,348	16,86	24,45	21,58	0,981	−0,07
0,40	0,0132	1,341	15,23	21,80	19,32	0,973	−0,06
0,50	0,0266	1,338	14,20	20,02	17,82	0,962	−0,06
0,60	0,0465	1,336	13,50	18,73	16,76	0,949	−0,07
0,70	0,0736	1,335	13,05	17,78	16,00	0,933	−0,09
0,80	0,1079	1,336	12,76	17,05	15,43	0,913	−0,12
0,90	0,1491	1,337	12,61	16,46	15,01	0,887	−0,15
1,00	0,1963	1,339	12,57	16,00	14,70	0,855	−0,19
1,10	0,2480	1,341	12,64	15,62	14,50	0,811	−0,24
1,20	0,3021	1,344	12,83	15,32	14,39	0,753	−0,29
1,30	0,3558	1,346	13,13	15,07	14,34	0,672	−0,36
1,40	0,4060	1,348	13,59	14,85	14,37	0,553	−0,43
1,50	0,4485	1,349	14,24	14,63	14,49	0,371	−0,47
1,60	0,4792	1,348	15,16	14,40	14,69	0,068	−0,39
1,70	0,4929	1,344	16,43	14,02	14,93	−0,498	0,24
1,80	0,4843	1,335	18,28	13,26	15,15	−1,798	4,10
1,90	0,4493	1,325	21,16	11,37	15,06	−6,467	45,70
1,98	0,4018	1,337	23,19	9,05	14,38	−55,281	3092,96

образом, но линейная комбинация $\beta_3 = (\beta_1 + \chi\beta_2)/(1 + \chi)$ при соответствующем выборе χ будет вести себя в этом месте более консервативно. Для трубы кругового сечения $\chi = 1{,}65$ (см. таблицу).

Таким образом, вместо выражения (1.4) запишем новую гипотезу замыкания

$$\beta_3 = \beta_1 \frac{1 + \chi/A}{1 + \chi} = \frac{1 + \chi/A}{1 + \chi}\Big(- \frac{S}{\nu Q} \oint \nu \frac{\partial u}{\partial n}\, dl\Big), \qquad \chi = 1{,}65. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.3), (1.5) и (1.6) в (1.2), получаем систему динамических уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial Q}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{Q^2}{S}\Big) = Sg\Big(\sin\alpha - \frac{\partial H}{\partial x}\cos\alpha\Big) + \frac{\sigma}{\rho} S \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} - \beta_3 \nu \frac{Q(1+\chi)}{S + \chi L H}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + L\frac{\partial H}{\partial t} = 0. \end{gathered} \tag{1.7}$$

2. Дисперсионное соотношение. Линеаризация системы (1.7) и подстановка в нее решения в виде $H = H_0 + H' \exp(ikx - i\omega t)$ ведут к дисперсионному соотношению

$$C^2 - \Big(2\gamma + \frac{\beta_1}{iK\mathrm{Re}}\Big)C + \gamma + \frac{\beta_1}{\mathrm{Re}}\Big(\frac{a}{iK} - A\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \frac{\mathrm{We}}{\sin\alpha}K^2\Big) = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $A = S_0/(L_0H_0)$; $C = cS_0/Q_0 = \omega S_0/(kQ_0)$, $K = kH_0$ — безразмерные фазовая скорость и волновое число; $\mathrm{Re} = Q_0/(\nu H_0)$, $\mathrm{We} = \sigma S_0/(\rho g L_0 H_0^3)$ — числа Рейнольдса и Вебера; индексом 0 обозначены параметры стационарного течения. Функция $a(H)$ равна $1 + f_1$, где

$$f_1 = \frac{1 + \chi + 4\chi H_0(R - H_0)/L_0^2}{1 + \chi L_0 H_0/S_0}. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) имеет два корня, которые при малых K принимают следующие приближенные значения:

$$C_1^{(+)} = 2\gamma - a + \frac{\beta_1}{iK\mathrm{Re}} + \frac{K}{i}\Big[\frac{\gamma - 2a\gamma + a^2}{(\beta_1/\mathrm{Re})} - A\operatorname{ctg}\alpha\Big],$$

$$C_2^{(-)} = a - \frac{K}{i}\Big[\frac{\gamma - 2a\gamma + a^2}{(\beta_1/\mathrm{Re})} - A\operatorname{ctg}\alpha\Big].$$

Поскольку амплитуда возмущения пропорциональна $\exp(ikx - i\omega t)$, первое решение при малых K всегда будет затухать, так как в показателе экспоненты возникает отрицательное слагаемое, в знаменателе которого стоит волновое число:

$$\exp(-i(2\gamma - a) - \beta_1/(K\mathrm{Re}) - K[(\gamma - 2a\gamma + a^2)/(\beta_1/\mathrm{Re}) - A\operatorname{ctg}\alpha])t.$$

Второй корень дает множитель $\exp(-ai + K[(\gamma - 2a\gamma + a^2)/(\beta_1/\mathrm{Re}) - A\operatorname{ctg}\alpha])t$.

Следовательно, второе решение может быть неустойчивым, если значение выражения в квадратных скобках положительно. Какой знак имеет это выражение в действительности?

Понятно, что при малых числах Рейнольдса перевесит второе слагаемое и общий знак выражения будет отрицательным. Напротив, при больших числах Рейнольдса все будет определяться знаком первого слагаемого, а точнее, знаком функции $\zeta(H) = \gamma - 2a\gamma + a^2$.

В таблице даны значения $f_1(H)$ и $\zeta(H)$. При $H > 1{,}6R$ $\zeta(H) > 0$, причем при $H \to 2R$ $\zeta(H) \to +\infty$. Такое поведение $\zeta(H)$ объясняется тем, что в числителе выражения (2.2) стоит отрицательное (при $H > R$) слагаемое, абсолютное значение которого неограниченно возрастает при приближении H к $2R$.

Таким образом, можно утверждать, что *в выбранной модели для любого числа Рейнольдса найдется такое значение $H_* > 1{,}6R$, что при толщине слоя жидкости $H > H_*$ течение станет неустойчивым по отношению к одномерным возмущениям.*

3. Дисперсионные кривые. Как следует из изложенного выше, число Рейнольдса само по себе не может служить критерием устойчивости описанных течений в модели одномерных волн. Устойчивость по отношению к длинноволновым одномерным возмущениям зависит от двух взаимосвязанных параметров: числа Рейнольдса и безразмерной толщины слоя жидкости $\bar{H} = H/R$. Неустойчивость наступает при $\zeta(\bar{H})\,\mathrm{Re}\,(\bar{H}; R, g, \nu, \alpha) > \beta_1 A\operatorname{ctg}\alpha$.

Число Рейнольдса можно представить в виде произведения двух множителей Re_1 и Re_2, где Re_1 состоит из набора безразмерных параметров, зависящих только от H, а Re_2 — из набора параметров, имеющих размерность и характеризующих физические свойства жидкости (плотность, вязкость), размеры и расположение трубы (R, α), а также внешние физические условия (наличие силы тяжести):

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_1(H)\,\mathrm{Re}_2(R, g, \nu, \alpha) = \frac{\bar{Q}_0}{\bar{H}_0}\,\frac{R^3 g\sin\alpha}{\nu^2}. \qquad (3.1)$$

Аналогично можно представить число Вебера:

$$\mathrm{We} = \mathrm{We}_1(\bar{H})\,\mathrm{We}_2(R, g, \sigma, \rho) = \frac{\bar{S}_0}{\bar{L}_0\bar{H}_0^3}\,\frac{\sigma}{\rho g R^2}.$$

Здесь $\bar{Q}_0 = Q_0/(v_* R^2)$, $v_* = R^2 g\sin\alpha/\nu$; $\bar{H}_0 = H_0/R$; $\bar{L}_0 = L_0/R$; $\bar{S}_0 = S_0/R^2$.

Первый множитель в (3.1) назовем *уровневой* частью числа Рейнольдса, второй — *метрической.* Для данного набора параметров g, ν, R, α *характерным* числом Рейнольдса Re_C назовем его значение для случая, когда труба заполнена жидкостью наполовину ($H = R$, $\bar{H} = 1$). То же относится и к числу Вебера.

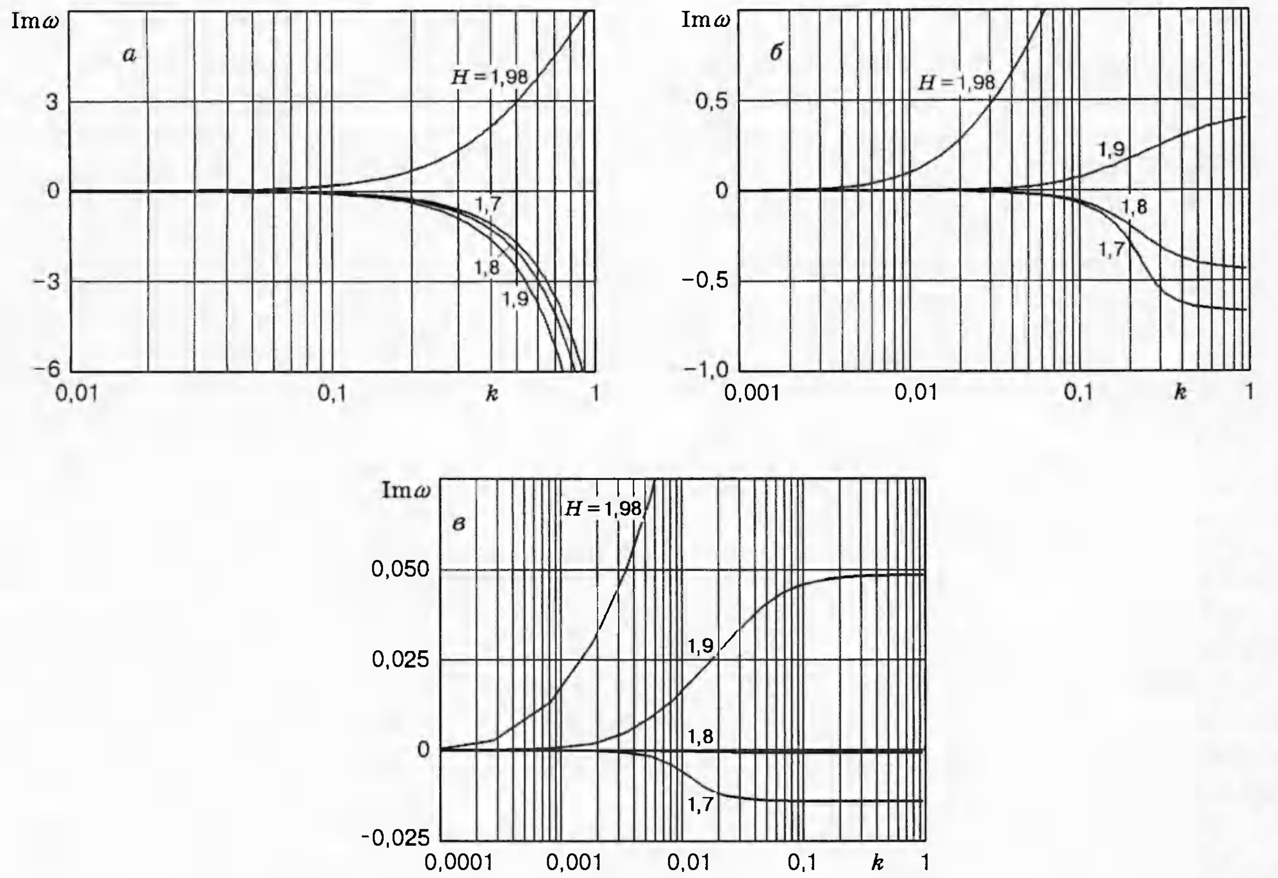

Рис. 2

Характерное число Рейнольдса определяется только значениями физических и геометрических величин g, ν, R, α, т. е. *метрической* частью. При численных расчетах *метрические* части чисел Re и We считались выбранными так, чтобы Re_C и We_C принимали следующие значения:

1) $\mathrm{Re}_C = 0{,}18$, $\mathrm{We}_C = 0{,}05$, $\alpha = 10°$;
2) $\mathrm{Re}_C = 5{,}74$, $\mathrm{We}_C = 0{,}005$, $\alpha = 10°$;
3) $\mathrm{Re}_C = 202{,}6$, $\mathrm{We}_C = 0{,}0001$, $\alpha = 1°$;
4) $\mathrm{Re}_C = 2016$,· $\mathrm{We}_C = 0{,}0001$, $\alpha = 10°$.

Эти значения соответствуют параметрам глицерина ($\nu = 1{,}1 \cdot 10^{-3}$ м^2/с, $\sigma = 59{,}4 \cdot 10^{-3}$ Н/м, $\rho = 1260$ кг/м^3).

На рис. 2 показана зависимость мнимой части частоты $\mathrm{Im}\,\omega$ от волнового числа k при разных уровнях свободной поверхности и различных характерных числах Рейнольдса (*а* — $\mathrm{Re}_C = 0{,}18$; *б* — $\mathrm{Re}_C = 5{,}74$; *в* — $\mathrm{Re}_C = 202{,}6$). Видно, что с увеличением Re_C значение критической толщины слоя, соответствующей нейтральным возмущениям, понижается до уровня $H = 1{,}6R$, т. е. до точки, отвечающей максимальному расходу жидкости. При очень больших Re_C, *уровневая* часть которых соответствует высотам $H < 1{,}6R$, все возмущения близки к нейтральным.

При небольших значениях Re_C и достаточно высоком уровне свободной поверхности действительные части фазовой ($\mathrm{Re}\ C$) (рис. 3) и групповой ($\mathrm{Re}\ (d\omega/dk)$) (рис. 4) скорости распространения возмущений отрицательны. Значит, такие возмущения распространяются вверх по течению, что согласуется с рассуждениями, сформулированными во введении.

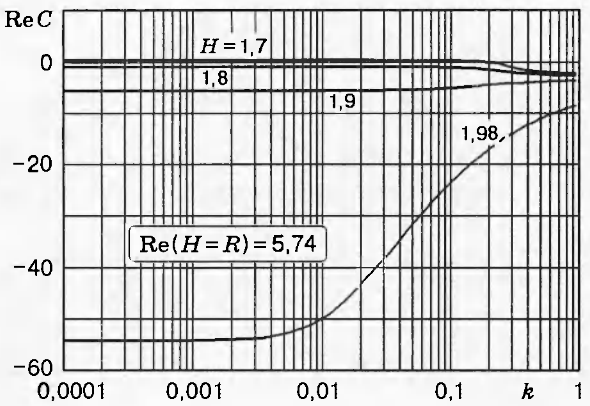

Рис. 3

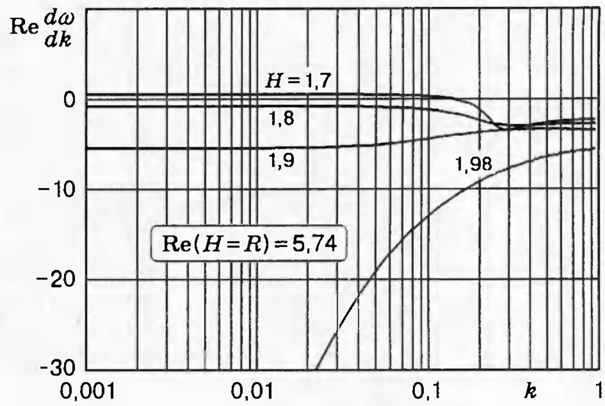

Рис. 4

На основании этого можно предположить, что *при достаточно малых числах Рейнольдса не существует стационарного режима стекания жидкости в доверху заполненной трубе с открытым концом.* Случайное возникновение прослойки воздуха вблизи конца трубы неизбежно вызовет либо понижение уровня жидкости во всей трубе, либо переход к волновым режимам течения. При больших числах Рейнольдса возмущения, естественно, сносятся вниз, вверх могут распространяться лишь самые длинные волны при толщине слоя, близкой к диаметру.

Остается открытым вопрос соответствия полученных выводов реальной ситуации, когда при приближении H к $2R$ допущение о горизонтальности свободной границы становится неверным. Это предмет отдельного исследования в рамках более сложной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Armstrong P. A., Geshev P. I.** Laminar stratified gas-liquid flow in tubes of various shapes // Numer. Methods Laminar Turbulent Flow. 1995. V. 9, pt 2. P. 1306–1316.
2. **Гешев П. И., Черепанов А. А.** Устойчивость ламинарного ручейкового течения в трубах кругового и эллиптического сечения. Новосибирск: Новосиб. гос. академия стр-ва, 1996.
3. **Громадка Т., Лей Ч.** Комплексный метод граничных элементов. М.: Мир, 1990.
4. **Boudlal A., Dyment A.** Weakly nonlinear interfacial waves in a duct of arbitrary cross section // European J. Mech. B Fluids. 1996. V. 15, N 3. P. 331–366.
5. **Brauner M., Moalem Maron D.** Stability analysis of stratified liquid — liquid flow // Intern. J. Multiphase Flow. 1992. V. 18. P. 103–121.
6. **Taitel Y., Duckler A. E.** A model for predicting flow regime transition in horizontal and near horizontal gas–liquid flow // AIChE J. 1976. V. 22. P. 47–55.
7. **Geshev P. I., Kuibin P. A.** Waves on rivulet flow along inclined cylinder // Numer. Methods Laminar Turbulent Flow. 1995. V. 9, pt 2. P. 996–1006.

Поступила в редакцию 23/VI 1997 г.