. **Налимов В. И.** Метод узких полос в краевой задаче с разрывными граничными условиями // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1989.— Вып. 90.

Поступила 18/VIII 1988 г.

УДК 532.62

ДИНАМИКА СВОБОДНЫХ ПЛЕНОК ЖИДКОСТИ

Л. К. Антановский

(Новосибирск)

1. Назовем слой вязкой несжимаемой жидкости, движущийся в другой кидкости или газе, свободной пленкой, если его толщина h, отсчитываемая доль нормали $\mathbf{n}$ к срединной поверхности Г, мала по сравнению с харак-ерным масштабом движения, причем градиенты скорости $\mathbf{v}$ и температуры в слое ограничены при $h \to 0$. Последнее будет выполнено, если коэффи-циенты вязкости и теплопроводности внешней жидкости не превосходят оответствующие характеристики материала пленки. Тогда в пер-ом приближении можно задавать положение пленки двумерной поверх-остью Г и описывать ее динамику распределенными на Г параметрами, читая $\mathbf{v}$ и θ всюду непрерывными функциями точки пространства $\mathbf{x}$ и ремени t (принцип локального термодинамического равновесия). В част-ости, определены совместные лагранжевы координаты пленки и объем-ющей фазы, что позволяет использовать феноменологический подход ри выводе уравнений движения Г [1]. Основные принципы термодина-ики и реологические соотношения приводят к замкнутой задаче динамики онких пленок жидкости, содержащей в себе при $h = 0$ задачу о термока-иллярной конвекции [2], причем термодинамические соотношения пре-ращаются в классические условия Гиббса — Дюгема на межфазной гра-ице. Уравнения движения изотермических свободных пленок вязких и пруговязких жидкостей выведены в [3].

Введем обозначение G для метрического (единичного) тензора прост-анства, тогда $G_\Gamma = G - \mathbf{nn}$ (умножение векторов — тензорное) является етрическим тензором поверхности Г, при помощи которого осуществляет-я операция проектирования на Г тензоров и дифференциальных опера-оров. Например, пространственный градиент ∇ преобразуется в поверх-остный градиент $\nabla_\Gamma = G_\Gamma \cdot \nabla$ (точкой обозначается внутреннее произве-ение), а тензор скоростей деформаций объема $D = (\nabla \mathbf{v})_{\mathrm{sym}}$ порождает ензор скоростей деформаций поверхности $D_\Gamma = G_\Gamma \cdot D \cdot G_\Gamma = (\nabla_\Gamma \mathbf{v} \cdot G_\Gamma)_{\mathrm{sym}}$. 'ак как след D_Γ равен поверхностной дивергенции полного вектора ско-ости, то для материального элемента площади J_Γ поверхности Г имеем ормулу $\dot{J}_\Gamma = J_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}$ (для материального элемента объема J справедли-о равенство $\dot{J} = J \operatorname{div} \mathbf{v}$). Здесь и ниже точка сверху обозначает полную роизводную по времени в частице. Заметим, что $\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} = \operatorname{div}_\Gamma (G_\Gamma \cdot \mathbf{v}) + k \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ ($k = \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{n}$ — сумма главных кривизн Г). Справедлива также ажная формула $\operatorname{div}_\Gamma G_\Gamma = -k\mathbf{n}$. В самом деле, в евклидовом пространст-е тензор G постоянен, а тензор кривизн $\nabla_\Gamma \mathbf{n}$ не имеет нормальных компо-ент, поэтому $\operatorname{div}_\Gamma (G - \mathbf{nn}) = -\operatorname{div}_\Gamma (\mathbf{nn}) = -k\mathbf{n}$.

Пусть ρ, e, T, $\mathbf{q}$ — плотность массы, удельная внутренняя энергия, энзор напряжений и вектор потока тепла объемной фазы; ρ_Γ, e_Γ, T_Γ, г — аналогичные характеристики поверхностной фазы пленки. Тогда ифференциальные законы сохранения массы, импульса и энергии прини-ают вид [1]

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{g}) = \operatorname{div} T, \qquad \rho\dot{e} = T : \nabla \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q} \ \text{вне Г}; \tag{1.1}$$

$$\dot{\rho}_\Gamma + \rho_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} = 0, \quad \rho_\Gamma(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{g}) = \operatorname{div}_\Gamma T_\Gamma + \mathbf{n} \cdot [T], \qquad \rho_\Gamma \dot{e}_\Gamma = T_\Gamma : \nabla_\Gamma \mathbf{v} - \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{q}_\Gamma - \mathbf{n} \cdot [\mathbf{q}] \ \text{на Г}, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{g}$ — плотность внешних массовых сил; двоеточием обозначается скалярное произведение (свертка) тензоров второго ранга; квадратные скобки соответствуют операции вычисления скачка функции при прохождении поверхности Γ в положительном направлении нормали $\mathbf{n}$, т. е.

$$[f](\mathbf{x}) = \lim_{\eta\to 0} \operatorname{sgn}\eta\,\{f(\mathbf{x}+\eta\mathbf{n}) - f(\mathbf{x}-\eta\mathbf{n})\},\quad \mathbf{x}\in\Gamma.$$

Уравнения (1.1), (1.2)— следствие интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии для произвольного материального объема ω_t (фазовые переходы отсутствуют, т. е. поверхностная и объемная фазы могут обмениваться импульсом и энергией, но не массой):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t}\rho d^3x = 0,\quad \frac{d}{dt}\int\limits_{\gamma_t}\rho_\Gamma d^2x = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_{\omega_t}\rho\mathbf{v}d^3x + \int\limits_{\gamma_t}\rho_\Gamma\mathbf{v}d^2x\right\} = \int\limits_{\partial\omega_t}\mathbf{v}\cdot Td^2x + \int\limits_{\partial\gamma_t}\mathbf{v}_\Gamma\cdot T_\Gamma d^1x + \int\limits_{\omega_t}\rho\mathbf{g}d^3x + \int\limits_{\gamma_t}\rho_\Gamma\mathbf{g}d^2x$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_{\omega_t}\rho\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}+e\right)d^3x + \int\limits_{\gamma_t}\rho_\Gamma\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}+e_\Gamma\right)d^2x\right\} = \int\limits_{\partial\omega_t}\mathbf{v}\cdot(T\cdot\mathbf{v}-\mathbf{q})\,d^2x +$$

$$+\int\limits_{\partial\gamma_t}\mathbf{v}_\Gamma\cdot(T_\Gamma\cdot\mathbf{v}-\mathbf{q}_\Gamma)\,d^1x + \int\limits_{\omega_t}\rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{v}d^3x + \int\limits_{\gamma_t}\rho_\Gamma\mathbf{g}\cdot\mathbf{v}d^2x.$$

Здесь $\gamma_t = \Gamma\cap\omega_t$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_\Gamma$ — единичные внешние нормали к границам $\partial\omega_t$ и $\partial\gamma_t$ соответственно, причем $\mathbf{v}_\Gamma$ касательна поверхности Γ.

Закон сохранения момента импульса обеспечивается требованием симметричности тензоров T и T_Γ. Кроме того, условие материальности Γ и принцип локального термодинамического равновесия приводят к дополнительным равенствам

(1.3) $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v},\ [\mathbf{v}] = 0,\ [\theta] = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Для замыкания уравнений (1.1)—(1.3) необходимо обратиться к термодинамике и реологии пленки.

2. Вначале напомним определяющие соотношения объемной фазы, которую будем считать вязким теплопроводным сжимаемым газом. Как известно, основное термодинамическое тождество для параметров ρ, e, p (давление), θ (абсолютная температура) эквивалентно тому, что форма $(1/\theta)\{de + pd(1/\rho)\}$ является полным дифференциалом энтропии единицы массы. Последнее сводится к условию совместности $de\wedge d(1/\theta) = d(p/\theta)\wedge d(1/\rho)$, которое для зависимостей $e(\rho,\theta)$, $p(\rho,\theta)$ можно еще записать в виде

(2.1) $$\rho^2\partial e/\partial\rho = -\theta^2\partial(p/\theta)/\partial\theta.$$

Из (2.1), в частности, вытекает, что энергия идеального газа ($p = R\rho\theta$) зависит только от температуры. Классические законы Стокса и Фурье задают реологию среды

(2.2) $$T = (-p + \lambda\operatorname{div}\mathbf{v})G + 2\mu D,\quad \mathbf{q} = -\varkappa\nabla\theta,$$

где λ, μ, ϰ — коэффициенты вязкости и теплопроводности объемной фазы.

Аналогичные определяющие соотношения можно написать для пленки, принимая во внимание некоторые ее отличия (как сплошной среды) от объемной фазы. Фактически по отношению к внешней среде пленка — не только область неоднородности, но она еще и анизотропна, т. е. тензор напряжений не будет шаровым даже в равновесной ситуации (сама пленка растянута, а внешняя среда сжата). На самом деле нарушение закона Паскаля происходит вблизи лицевых межфазных поверхностей пленки. Однако с феноменологической точки зрения предпочтительнее приписывать самой пленке анизотропию межфазных границ, а энергию взаимодействия фаз относить к единице массы материала пленки.

Пусть τ — термодинамическое натяжение пленки, p_* — гидродинамическое давление, ρ_* — плотность материала пленки, тогда основное термодинамическое тождество приводит к точности формы $(1/\theta)\{de_\Gamma + p_* d(1/\rho_*) - \tau d(1/\rho_\Gamma)\}$. Ограничиваясь случаем несжимаемого материала пленки ($\rho_* = \mathrm{const}$) и полагая $\varepsilon = \rho_\Gamma e_\Gamma$, получим выражение дифференциала энтропии $(1/\theta)\{d(\varepsilon/h) - \tau d(1/h)\}$, из которого вытекает условие совместности $d(1/\theta) \wedge d(\varepsilon/h) = d(\tau/\theta) \wedge d(1/h)$ (справедливо асимптотически точное при $h \to 0$ равенство $\rho_\Gamma = \rho_* h$). Таким образом, зависимости $\varepsilon(h, \theta)$, $\tau(h, \theta)$, связанные соотношением

$$h^2 \partial(\varepsilon/h)/\partial h = \theta^2 \partial(\tau/\theta)/\partial\theta, \tag{2.3}$$

полностью определяют термодинамику пленки.

Очевидно, что в равновесии $T_\Gamma = \tau G_\Gamma - p_* h G$, где давление p_* при $\rho_* = \mathrm{const}$ уже не является термодинамической величиной и должно определяться из условия несжимаемости материала пленки. Для устойчивости пленки как термодинамической системы необходимо неравенство $\partial\tau(h, \theta)/\partial h < 0$, которое вытекает из принципа минимума свободной энергии. Последнее приводит к тому, что предел τ при $h \to 0$ положителен и в первом приближении $T_\Gamma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$.

Постулируем на неравновесные процессы условие касания к поверхности Γ внутренних потоков импульса и тепла

$$T_\Gamma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}_\Gamma \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{2.4}$$

Тогда аксиома изотропной линейной зависимости T_Γ от D_Γ и $\mathbf{q}_\Gamma$ от $\nabla_\Gamma\theta$ приводит к аналогам законов Стокса и Фурье (2.2)

$$T_\Gamma = (\tau + \lambda_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}) G_\Gamma + 2\mu_\Gamma D_\Gamma, \quad \mathbf{q}_\Gamma = -\varkappa_\Gamma \nabla_\Gamma \theta, \tag{2.5}$$

где λ_Γ, μ_Γ, $\varkappa_\Gamma$ — коэффициенты вязкости и теплопроводности поверхностной фазы.

Теперь уравнения (1.2) после введения теплоемкости единицы площади пленки $\alpha(h, \theta) = \partial\varepsilon(h, \theta)/\partial\theta$ и диссипативиой функции $\Phi_\Gamma = \lambda_\Gamma(\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v})^2 + 2\mu_\Gamma D_\Gamma : D_\Gamma$ превращаются в замкнутую систему уравнений для h, $\mathbf{v}$, θ:

$$\dot h + h \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} = 0, \quad \rho_* h (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{g}) = \operatorname{div}_\Gamma T_\Gamma + \mathbf{n} \cdot [T], \tag{2.6}$$

$$\alpha\dot\theta = \theta \frac{\partial\tau}{\partial\theta} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} + \Phi_\Gamma - \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{q}_\Gamma - \mathbf{n} \cdot [\mathbf{q}] \text{ на } \Gamma.$$

Здесь использовано термодинамическое условие (2.3).

3. Найдем связь λ_Γ, μ_Γ, $\varkappa_\Gamma$ с коэффициентами вязкости μ_* и теплопроводности $\varkappa_*$ материала пленки. Пусть $T_* = -p_* G + 2\mu_* D_*$ — тензор напряжений, D_* — тензор скоростей деформаций, вычисленный по полю скорости $\mathbf{v}_*$ материала пленки. Из условия несжимаемости имеем асимптотическое при $h \to 0$ представление

$$\mathbf{v}_* = \mathbf{v} - z \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}\mathbf{n}, \quad |z| < h/2,$$

где $\mathbf{v}$ — скорость срединной поверхности Γ; z — отсчитываемая вдоль $\mathbf{n}$ координата. Очевидно, что

$$\mathbf{v} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{v}_* dz, \quad T_\Gamma = \tau G_\Gamma + \int_{-h/2}^{h/2} T_* dz =$$
$$= \tau G_\Gamma - p_* h G + 2\mu_* h (D_\Gamma - \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}\mathbf{n}\mathbf{n}).$$

Причем (2.4) приводит к равенству $p_* = -2\mu_* \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}$. Таким образом, имеем выражения [3]

$$\lambda_\Gamma = 2\mu_* h, \quad \mu_\Gamma = \mu_* h, \quad \varkappa_\Gamma = \varkappa_* h. \tag{3.1}$$

Отметим, что учет λ_Γ, μ_Γ, $\varkappa_\Gamma$ в определяющих соотношениях (2.5) необходим в тех случаях, когда $\mu_* \gg \mu$, $\varkappa_* \gg \varkappa$ (например, для аморфных материалов типа стекла вязкость μ_* сильно возрастает с уменьшением θ).

*

Покажем, что уравнения (2.6) при $h = 0$ дают условия на межфазной границе. В самом деле, если $\tau(h, \theta) \to \sigma(\theta)$ при $h \to 0$, то из (2.3) сразу следует, что (штрих соответствует дифференцированию) $\varepsilon(h, \theta) \to \sigma(\theta) - \theta\sigma'(\theta)$, $\alpha(h, \theta) \to -\theta\sigma''(\theta)$. Так как μ_* и $\varkappa_*$ в тонком слое смешения фаз имеют порядок вязкости и теплопроводности самих фаз, то в пределе λ_Γ, μ_Γ и $\varkappa_\Gamma$ исчезают согласно (3.1), что приводит к условиям

$$[(p - \lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{v})\mathbf{n} - 2\mu D\cdot\mathbf{n}] = \mathrm{div}_\Gamma\{\sigma(\theta)G_\Gamma\},$$

$$-\theta\sigma''(\theta)\dot{\theta} = \theta\sigma'(\theta)\,\mathrm{div}_\Gamma\mathbf{v} + [\varkappa\partial\theta/\partial n],$$

определяющим модель термокапиллярной конвекции [2]. В данной работе энергетическое условие выведено для покоящейся поверхности Г, что позволяет вычислять $\dot{\theta}$ в виде $\partial\theta/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla_\Gamma\theta$. На движущейся поверхности Г имеем $\dot{\theta} = \delta\theta/\delta t + \mathbf{v}\cdot\nabla_\Gamma\theta$, где $\delta\theta/\delta t = \partial\tilde{\theta}/\partial t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\partial\tilde{\theta}/\partial n$, $\tilde{\theta}$ — произвольное гладкое продолжение θ в окрестность Г. На самом деле производная $\delta\theta/\delta t$ равна производной θ вдоль векторного поля $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{nn}, 1)$, касательного к траектории поверхности Г в пространстве $(\mathbf{x}, t)$, и не зависит от продолжения $\tilde{\theta}$.

Отметим, что в силу равенства $\mathrm{div}_\Gamma(\sigma G_\Gamma) = \nabla_\Gamma\sigma - \sigma k\mathbf{n}$ из динамического условия, в частности, вытекает формула Лапласа для скачка давления. Таким образом, $\sigma(\theta)$ является коэффициентом поверхностного натяжения межфазной границы и совпадает с ее свободной энергией. Соответственно энтропия единицы площади Г равна $-\sigma'(\theta)$, поэтому для чистой границы раздела фаз верно неравенство $\sigma'(\theta) < 0$.

4. Рассмотрим задачу о малых возмущениях сферической пленки жидкости, внутри которой содержится политропный газ. Точнее, будем искать решение системы (2.6), предполагая $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, $\mathbf{n}\cdot[T] = p\mathbf{n}$, $\mathbf{n}\cdot[\mathbf{q}] = 0$, где $p = p_0(V_0/V)^\gamma$ — осредненное давление, $V = \frac{1}{3}\int\limits_\Gamma \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}d^2x$ — объем газа, γ — показатель политропы, нормаль $\mathbf{n}$ направлена наружу. В данном случае первые два уравнения (2.6) приводят к законам сохранения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Gamma hd^2x = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}\int\limits_\Gamma h\mathbf{x}d^2x = \mathbf{0}. \tag{4.1}$$

Выбором галилеевой системы координат обеспечим равенство

$$\int\limits_\Gamma h\mathbf{x}d^2x = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

и предположим, что Г звездна относительно нуля. Тогда можно осуществить стереографическую проекцию $\mathbf{x} = r(\mathbf{s}, t)\mathbf{s}$ ($\mathbf{s}$ — точка единичной сферы S), и в силу первого условия (1.3)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = r\dot{\mathbf{s}} + (r_t + \dot{\mathbf{s}}\cdot\nabla_S r)\mathbf{s} = \mathbf{u} + (r_t + r^{-1}\mathbf{u}\cdot\nabla_S r)\mathbf{s}.$$

Здесь $\mathbf{u} = r\dot{\mathbf{s}}$ — касательная к S составляющая поля скорости, через которую у функции $f(\mathbf{s}, t)$ вычисляется полная производная по времени $\dot{f} = f_t + r^{-1}\mathbf{u}\cdot\nabla_S f$; нижний индекс t отвечает частной производной по времени. Таким образом, система (2.6) сводится к задаче для функций $r(\mathbf{s}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{s}, t)$, $h(\mathbf{s}, t)$ и $\theta(\mathbf{s}, t)$. Заметим, что ввиду равенства нулю коэффициентов вязкости и теплопроводности идеального газа последние условия (1.3) нельзя обеспечить без выделения пограничных слоев.

Сферически-симметричное решение $r(t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $h(t)$, $\theta(t)$ в силу равенств $\mathbf{v} = r_t\mathbf{s}$, $T_\Gamma = (\tau + 6\mu_* hr_t/r)G_S$ удовлетворяет обыкновенным дифференциальным уравнениям $(hr^2)_t = 0$, $\rho_* hr_{tt} = p - 2(\tau + 6\mu_* hr_t/r)/r$, $\alpha\theta_t = 2\theta(\partial\tau/\partial\theta)r_t/r + 12\mu_* h(r_t/r)^2$ и начальным условиям $r = r_0$, $r_t = r_1$, $h = h_0$, $\theta = \theta_0$ при $t = 0$. Здесь функции $\tau(h, \theta)$, $\alpha(h, \theta)$ заданы и $p = p_0(r_0/r)^{3\gamma}$. Очевидно, что стационарное решение возможно при $p_0 = 2\tau_0/r_0$, $r_1 = 0$ (индексом нуль отмечены характеристики состояния ра новесия). Исследуем его устойчивость по отношению к начальным возмущениям r, h и θ.

Выберем в качестве масштабов длины, времени, скорости и температуры величины r_0, $\mu_* r_0/\tau_0$, τ_0/μ_* и θ_0 соответственно и введем безразмерные числа

$$\delta = \frac{h_0}{r_0},\ W = \frac{\rho_* r_0 \tau_0}{\mu_*^2},\ M = \frac{\alpha_0 r_0 \tau_0}{h_0 \mu_* \varkappa_*},$$

$$L = \frac{\tau_0}{\theta_0 \alpha_0},\ K_h = -\frac{r_0}{\tau_0}\left(\frac{\partial \tau}{\partial h}\right)_0,\ K_\theta = -\frac{r_0 \theta_0}{h_0 \tau_0}\left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta}\right)_0.$$

Положим $r = 1 + R$, $\mathbf{u} = \nabla_S U$, $h = \delta(1 + H)$, $\theta = 1 + \Theta$ и линеаризуем систему (2.6), (4.1), (4.2) на основном решении, считая функции $R(\mathbf{s}, t)$, $U(\mathbf{s}, t)$, $H(\mathbf{s}, t)$, $\Theta(\mathbf{s}, t)$ малыми одного порядка (линеаризованные уравнения допускают потенциальные возмущения поля скорости). В результате получим задачу

$$\begin{gathered}
H_t + 2R_t + \Delta_S U = 0,\\
WU_t = \Delta_S U + 2U - (3H_t + K_h H + K_\theta \Theta),\\
\delta W R_{tt} = \Delta_S R + 2R + 2\delta(3H_t + K_h H + K_\theta \Theta) - 6\gamma R_0,\\
\Theta_t = \delta L K_\theta H_t + M^{-1}\Delta_S \Theta,\\
\int\limits_S (H + 2R)\, d^2 s = 0,\ \int\limits_S (H + 3R)\,\mathbf{s} d^2 s = \mathbf{0},\ R_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S R d^2 s,
\end{gathered}$$

в которой возможно разделение переменных. А именно, пусть $R(\mathbf{s}, t) = R_m(\mathbf{s}) \exp(\omega t)$ и т. д. ($R_m(\mathbf{s})$ — сферическая функция степени m), тогда дисперсионное соотношение принимает вид $F_m(\omega) = 0$. Здесь

$$\begin{gathered}
F_m(\omega) = [\omega + M^{-1} m(m+1)]\{(\delta W\omega^2 + m^2 + m - 2)\times\\
\times[W\omega^2 + 2(2m^2 + 2m - 1)\omega + K_h m(m+1)] +\\
+ 4\delta\omega(3\omega + K_h)(W\omega + m^2 + m - 2)\} +\\
+ \delta L K_\theta^2 \omega\{\delta W(m^2 + m + 4)\omega^2 + (m^2 + m - 2)[4\delta\omega + m(m+1)]\},\quad m \geqslant 2,\\
F_1(\omega) = (\omega + 2M^{-1})[W\omega^2 + 6(3\omega + K_h)] + 6\delta L K_\theta^2 \omega,\\
F_0(\omega) = \delta W\omega^2 + 12\delta\omega + 2(3\gamma - 1) + 4\delta(K_h + \delta L K_\theta^2).
\end{gathered}$$

Пусть $K_h = K\delta$ и $\delta \to 0$, тогда справедливо разложение корня ω_m с наибольшей действительной частью по степеням малого параметра:

$$\begin{gathered}
\omega_m = -\frac{m(m+1)K\delta}{2(2m^2 + 2m - 1)}\left\{1 + \frac{M\delta}{4(2m^2 + 2m - 1)}\left[\left(1 + \frac{m(m+1)W}{M(2m^2 + 2m - 1)}\right)K -\right.\right.\\
\left.\left. - LK_\theta^2\right]\right\} + O(\delta^3),\quad m \geqslant 2,\\
\omega_1 = -\frac{K\delta}{3}\left\{1 + \frac{M\delta}{12}\left[\left(1 + \frac{2W}{9M}\right)K - LK_\theta^2\right]\right\} + O(\delta^3),\\
\mathrm{Re}\,\omega_0 = -6/W \text{ при } \gamma > 1/3.
\end{gathered}$$

Из этих представлений следует ожидаемая асимптотическая устойчивость однородной сферической пленки по линейному приближению при положительном K (термодинамический механизм стабилизации). Очевидна также дестабилизирующая роль зависимости τ от θ, описываемая параметром LK_θ^2.

Автор выражает признательность В. В. Пухначеву за постановку задачи и полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.— М.: Мир, 1975.
2. **Napolitano L. G.** Thermodynamics and dynamics of pure interfaces // Acta Astronaut.— 1978.— V. 5, N 9.
3. **Entov V. M.** On the dynamics of films of viscous and elasto-viscous liquids // Arch. Mech.— 1982.— V. 34, N 4.

Поступила 11/XII 1987 г.,
в окончательном варианте — 4/IV 1988 г.

УДК 532.529.5

УРАВНЕНИЯ МОДУЛЯЦИЙ ДЛЯ ПУЗЫРЬКОВОЙ СМЕСИ С НЕСЖИМАЕМОЙ НЕСУЩЕЙ ФАЗОЙ

С. Л. Гаврилюк

(Новосибирск)

Для односкоростного течения монодисперсной пузырьковой смеси с несжимаемой несущей фазой выведена система уравнений, промежуточная между известными равновесной и неравновесной моделями. Достоинство полученных уравнений — раздельное описание средних характеристик течения (скорость, давление, полная энергия смеси) и быстрых осцилляций на фоне этого среднего движения. При отсутствии диссипации уравнения для средних величин совпадают с уравнениями движения невязкого нетеплопроводного газа.

1. Исходные уравнения движения. В рамках модели Иорданского — Когарко [1, 2] (см. также [3, 4]) исследуется односкоростное течение монодисперсной пузырьковой смеси с несжимаемой несущей фазой:

$$v_t - u_x = 0, \quad u_t + p_x = 0; \tag{1.1}$$

$$RR_{tt} + 3R_t^2/2 = (p_2 - p - 2\sigma/R)/\rho_1 - 4\nu_1 R_t/R; \tag{1.2}$$

$$c_{2t} = 0, \quad n_t = 0. \tag{1.3}$$

Здесь t — время; x — массовая лагранжева координата (см., например, [5]); u — скорость смеси; $v = c_1/\rho_1 + c_2 v_2$ — удельный объем смеси; c_i — массовые концентрации ($c_1 + c_2 = 1$, $c_2 = \alpha_2 v/v_2$); α_2 — объемная концентрация газа; ρ_1 — плотность жидкости, которая предполагается несжимаемой; $v_2 = n4\pi R^3/(3c_2)$ — удельный объем газа; R — радиус пузырька; σ — коэффициент поверхностного натяжения; n — число пузырьков в единице массы смеси; p — давление в смеси, которое полагается равным давлению в жидкости; $p_2 = p_2(v_2)$ — давление в газе; ν_1 — коэффициент кинематической вязкости жидкости. Массовая лагранжева координата x введена для сокращения записи формул. Отметим, что уравнение Рэлея — Ламба (1.2) с учетом формул (1.1), (1.3) можно записать в виде

$$(\varepsilon + u^2/2 + n(E_r + E_\sigma))_t + (pu)_x = -8\nu_1 n E_r/R^2, \tag{1.2a}$$

где

$$\varepsilon = c_2\varepsilon_2(v_2), \quad d\varepsilon_2/dv_2 = -p_2, \quad E_r = 2\pi R^3\rho_1 R_t^2, \quad E_\sigma = 4\pi R^2\sigma. \tag{1.4}$$

Формула (1.2) вытекает из (1.2a) непосредственно после дифференцирования и использования соотношений (1.4). Для сжимаемой жидкости запись уравнения Рэлея — Ламба в виде закона сохранения имеется, например, в [6].

Исследуется класс быстро осциллирующих решений системы (1.1)—(1.3). Это означает, что в течении присутствуют два характерных масштаба: λ, L — длина короткой и модулированной волны, так что параметр $\delta = \lambda/L$ предполагается малым. Общий подход к изучению такого класса решений, представляющий, по существу, вариант метода усреднения Крылова — Боголюбова — Митропольского, был разработан для консервативных систем Д. Б. Уиземом [7] и его последователями. Различные асимптотические методы построения таких сингулярных решений и их